제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. 두 다항식 $A=x^2-2x+1$, $B=2x^2+2x-2$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2-x-1 ② x^2+x+1 ③ x^2+1
④ $3x^2-1$ ⑤ $3x^2+1$

2. 등식 $x^2+(a+2)x=x^2+4x+(b-1)$이 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a+2=4$, $a=2$

$b-1=0$, $b=1$

3. 좌표평면 위의 점 A$(a,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=4$일 때, a^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\sqrt{a^2+9}=4$

$a^2=7$

4. 연립부등식

$$\begin{cases} x+6 \le 4x \\ 3x+4 < x+16 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

$2 \le x < 6$

5. 등식 $\frac{2}{1-i}=a+bi$ 를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\frac{2}{1-i}\frac{1+i}{(1+i)}=1+i=a+bi$

$a=1$

$b=1$

6. 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 $(x+1)^2$으로 나누어떨어질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$x^3+ax^2+bx+3=(x+1)^2(x+3)$

$x=1 \to$ $a+b+4=16$

$\therefore$ $a+b=12$

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(-5,\ -1)$, $B(a,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\left(\frac{2a+5}{2-1},\ \frac{2+1}{2-1}\right)$

$2a+5=3$, $a=-1$

8. 이차방정식 $x^2+2x+7=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$\begin{cases} \alpha+\beta=-2 \\ \alpha\beta=7 \end{cases}$ $(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=4-7=-3$

9. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 5x^2-y^2=-5 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ 5\alpha^2-\beta^2=-5 \end{cases}$ $\rightarrow \beta=2\alpha-1$

$5\alpha^2-(2\alpha-1)^2=-5$

$5\alpha^2-4\alpha^2+4\alpha-1=-5$

$\alpha^2+4\alpha+4=0$

$(\alpha+2)^2=0$, $\begin{matrix}\alpha=-2 \\ \beta=-5\end{matrix}$) $\alpha-\beta=3$

10. 좌표평면 위의 점 $(1,\ a)$를 지나고 직선 $4x-2y+1=0$과 평행한 직선의 방정식이 $bx-y+5=0$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a\times b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

기울기: 2

$y=2(x-1)+a$

$y=2x+a-2$

$y=bx+5$) $\begin{matrix} b=2 \\ a=7 \end{matrix}$

11. 두 상수 a, b에 대하여 이차함수 $y=x^2-4x+a$의 그래프의 꼭짓점을 A라 할 때, 점 A는 원 $x^2+y^2+bx+4y-17=0$의 중심과 일치한다. $a+b$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$(x-2)^2+a-4$ $(2, a-4)$

$(x+\frac{b}{2})^2+(y+2)^2 \sim$

$(-\frac{b}{2}, -2)=(2, a-4)$

$a=2$
$b=-4$

12. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-4x-12 \le 0 \\ x^2-4x+4>0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$(x+2)(x-6) \le 0$ $-2 \le x \le 6$

$(x-2)^2 > 0$ $x \ne 2$

$-2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6$

13. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$x^2+(m+2)x+2m+1>0$$

이 성립하도록 하는 모든 정수 m의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

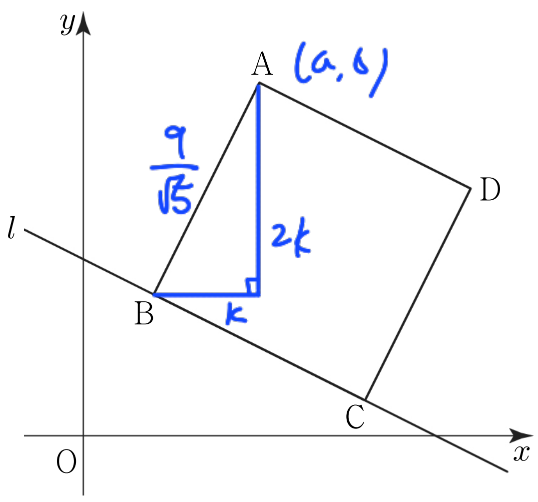
$D=(m+2)^2-8m-4<0$

$m^2-4m<0$

$0<m<4$

$1+2+3=6$

14. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(a,\ 6)\ (a>0)$과 두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나는 직선 l이 있다. 직선 l 위의 서로 다른 두 점 B, C와 제1사분면 위의 점 D를 사각형 ABCD가 정사각형이 되도록 잡는다. 정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$일 때, a의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$l: y=-\frac{1}{2}x+3$, 기울기: $-\frac{1}{2}$

AB 기울기: 2

$\sqrt{5}k=\frac{9}{\sqrt{5}}$, $k=\frac{9}{5}$

$B\left(a-\frac{9}{5},\ 6-\frac{18}{5}\right)$

$\frac{12}{5}=-\frac{1}{2}a+\frac{39}{10}$, $\frac{1}{2}a=\frac{15}{10}$, $a=3$

15. 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 직선 $y=2x+3$에 접할 때, 상수 m의 값은? [4점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

$y=-x^2$

$\downarrow$

$y=x^2$

$\downarrow$

$y=(x-4)^2+m$

$x^2-8x+16+m=2x+3$

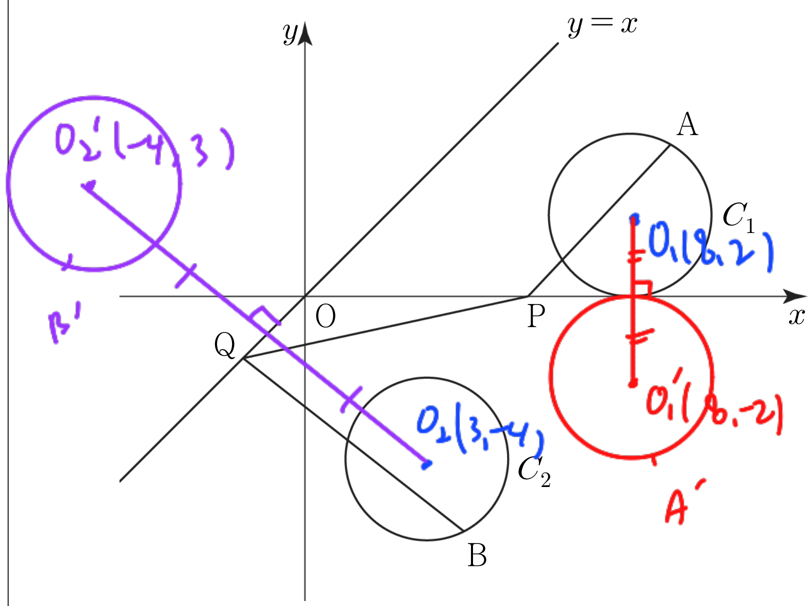
$x^2-10x+\underbrace{13+m}_{=25}=0$

$m=12$

16. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 원

$$C_1 : (x-8)^2+(y-2)^2=4,$$
$$C_2 : (x-3)^2+(y+4)^2=4$$

와 직선 $y=x$가 있다. 점 A는 원 C_1 위에 있고, 점 B는 원 C_2 위에 있다. 점 P는 x축 위에 있고, 점 Q는 직선 $y=x$ 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은? (단, 세 점 A, P, Q는 서로 다른 점이다.) [4점]



① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

$\overline{O_1P}+\overline{PQ}+\overline{QO_2}$

$=\overline{O_1'P}+\overline{PQ}+\overline{QO_2'}$

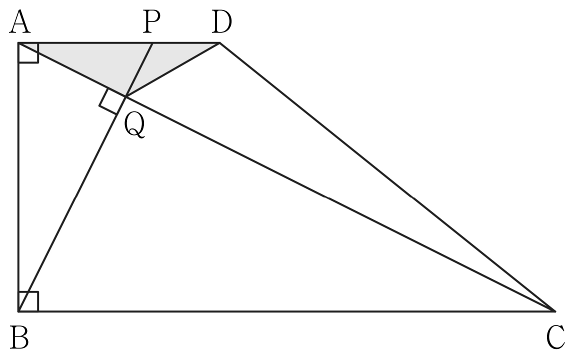
$\ge \overline{O_1'O_2'}=13$

$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\ge 13-2-2=9$

17. 그림과 같이 $\angle A = \angle B = 90°$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 8$인 사다리꼴 ABCD에 대하여 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자. 두 직선 AC, BP가 점 Q에서 서로 수직으로 만날 때, 삼각형 AQD의 넓이는? [4점]

$(0,4)$



$(0,0)$ $(8,0)$

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{13}{10}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

AC : $y = -\frac{1}{2}x + 4$

BP 기울기 : 2

BP : $y = 2x$, $y = 4 \to x = 2$

$P(2,4)$, $D(3,4)$

$-\frac{1}{2}x + 4 = 2x \to x = \frac{8}{5}$

$Q\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

$\therefore S = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(4 - \frac{16}{5}\right)$

$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

18. 세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) x에 대한 삼차방정식 $P(x) = 0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 곱은 5이다.
> (나) x에 대한 삼차방정식 $P(3x-1) = 0$은 한 근 0과 서로 다른 두 허근을 갖고, 서로 다른 두 허근의 합은 2이다.

$a+b+c$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

(나) $x = 0 \to P(-1) = 0$

(가) $\to P(x) = 0 \to x = -1, \alpha, \beta$, $\alpha\beta = 5$

(나) $\to P(3x-1) = 0 \to x = 0, \frac{\alpha+1}{3}, \frac{\beta+1}{3}$

$\frac{\alpha+1}{3} + \frac{\beta+1}{3} = 2$, $\alpha + \beta = 4$

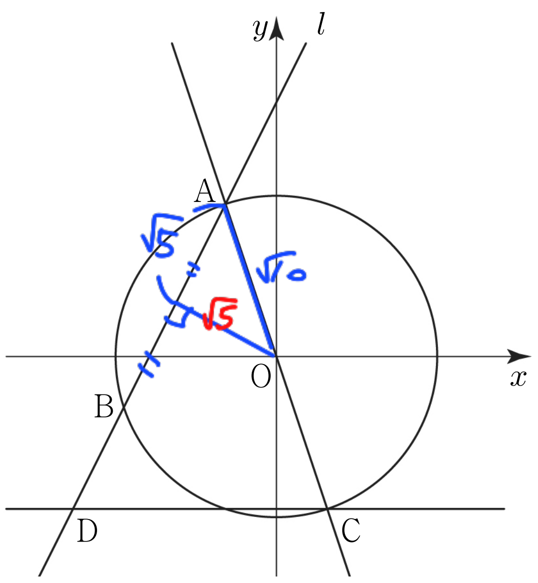
$\therefore x^2 - 4x + 5 = 0$

$P(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 5)$

$P(1) = 4 = 1 + a + b + c$

$\therefore a + b + c = 3$

19. 그림과 같이 기울기가 2인 직선 l이 원 $x^2+y^2=10$과 제2사분면 위의 점 A, 제3사분면 위의 점 B에서 만나고 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이다. 직선 OA와 원이 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 D$(a,\ b)$라 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① -8 ② $-\frac{15}{2}$ ③ -7 ④ $-\frac{13}{2}$ ⑤ -6

AD: $y=2x+k$

$(0,0)\sim 2x-y+k=0$

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $k=5$, $y=2x+5$

$x^2+(2x+5)^2=10$, $5x^2+20x+15=0$

$x^2+4x+3=0$ $x=-1, -3$

$A(-1, 3)$, $C(1, -3)$

$y=2x+5 \rightarrow y=-3$, $x=-4$ $D(-4, -3)$

20. 좌표평면 위에 세 점 A$(0,\ 4)$, B$(4,\ 4)$, C$(4,\ 0)$이 있다. 세 선분 OA, AB, BC를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하고, 세 점 P, Q, R를 지나는 원을 C라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

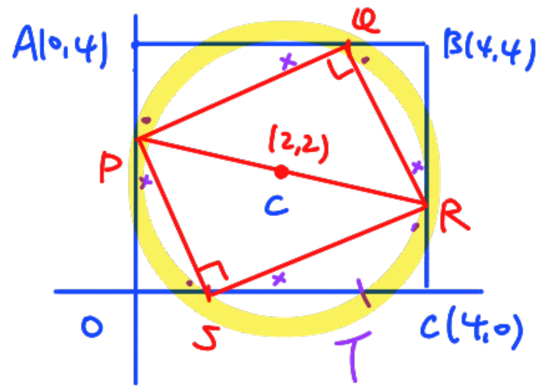
<보 기>

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

ㄴ. 점 $\left(\frac{4m}{m+n},\ 0\right)$은 원 C 위의 점이다.

ㄷ. 원 C가 x축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 3일 때, $\overline{PQ}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

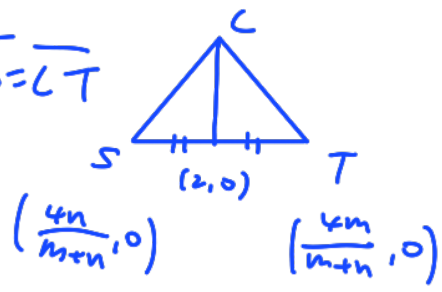


$\overline{OP}=\overline{AQ}=\overline{BR}=\overline{CS}$

ㄱ. $m=n \rightarrow 1:1 \rightarrow P(0,2)$

ㄴ. $P\left(0, \frac{4m}{m+n}\right)$, $\overline{OP}=\frac{4m}{m+n}$, $\overline{AP}=\frac{4n}{m+n}$

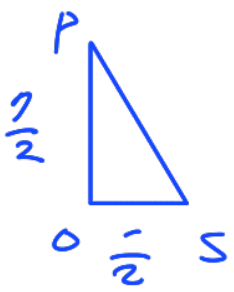
$S\left(\frac{4n}{m+n}, 0\right)$, $\overline{CS}=\overline{CT}$



$\therefore T\left(\frac{4m}{m+n}, 0\right) \Rightarrow$ 원 위의 점 (○)

ㄷ. $\overline{ST}=\frac{4m-4n}{m+n}=3$, $4m-4n=3m+3n$

$m=7n$



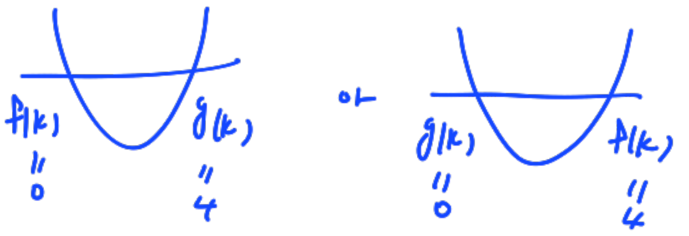
$\overline{PS}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\overline{PQ}$

21. 이차함수 $f(x)$ 와 이차항의 계수가 1 인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$$\{x-f(k)\}\{x-g(k)\}=0$$

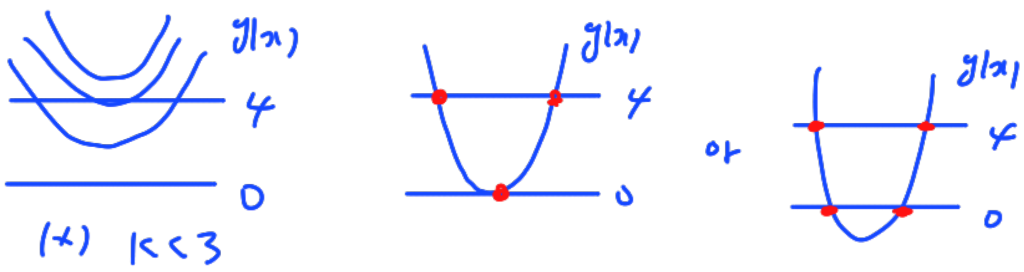
이 서로 다른 두 실근 0, 4 를 갖도록 하는 모든 실수 k 의 개수가 3 이다. $f(2)=4$ 일 때, $g(8)-f(8)$ 의 값은? [4점]

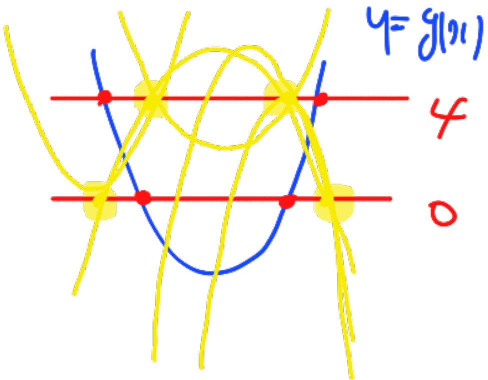
① 62 ② 64 ③ 66 ④ 68 ⑤ 70



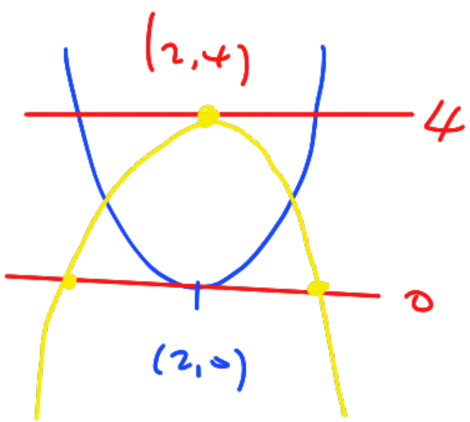
f(k)	g(k)
0	4
4	0

⇒ 3개





$f(2)=4$ 만족하면서
⇒ 4개의 점 중
3개의 점 지나는 $f(x)$
⇒ (ㄱ)



f & g 특징?
⇒ $g(x)=(x-2)^2$
$f(x)=-(x-2)^2+4$
$g(8)=36$
$f(8)=-32$

$\therefore g(8)-f(8)=68$

단답형

22. 다항식 x^3-3x^2+3x-6 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$x=3 \Rightarrow 27-27+9-6=3$

23. 부등식 $|x-5|<2$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{15}$

$3<x<7$

$4+5+6=15$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+a^2+4a-28=0$이 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 a의 개수를 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$D/4 = a^2-a^2-4a+28 \geq 0$

$a \leq 7$

$1 \leq a \leq 7$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+19=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다. 한 허근의 허수부분이 2일 때, 양의 실수 p의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$\alpha+2i$

$\alpha-2i$

합 $\Rightarrow 2\alpha = p$

곱 $\Rightarrow \alpha^2+4 = p+19$

$\alpha^2-2\alpha+4=19$

$\alpha^2-2\alpha-15=0$

$\alpha=-3, 5$

$\alpha=5\ (\because p>0) \Rightarrow p=10$

26. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선이 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$과 만나도록 하는 자연수 r의 최솟값을 구하시오. [4점]

$\boxed{8}$

$3x-4y=25 \quad (6,8)$

$\dfrac{|18-32-25|}{5} \leq r$

$r \geq \dfrac{39}{5} \quad r=8$

27. 다항식 $P(x)$에 대하여 $(x-2)P(x)-x^2$을 $P(x)-x$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $P(x)-3x$이다. $P(x)$를 $Q(x)$로 나눈 나머지가 10일 때, $P(30)$의 값을 구하시오. (단, 다항식 $P(x)-x$는 0이 아니다.) [4점]

$\boxed{91}$

$(x-2)P(x)-x^2=(P(x)-x)Q(x)+P(x)-3x$ 차수 ⇓

$P(x)=3x+k$

$(x-2)(3x+k)-x^2=(2x+k)Q(x)+k$

$2x^2+(k-6)x-2k$

$Q(x)=x-3$

$\Rightarrow P(3)=10$

$9+k=10$

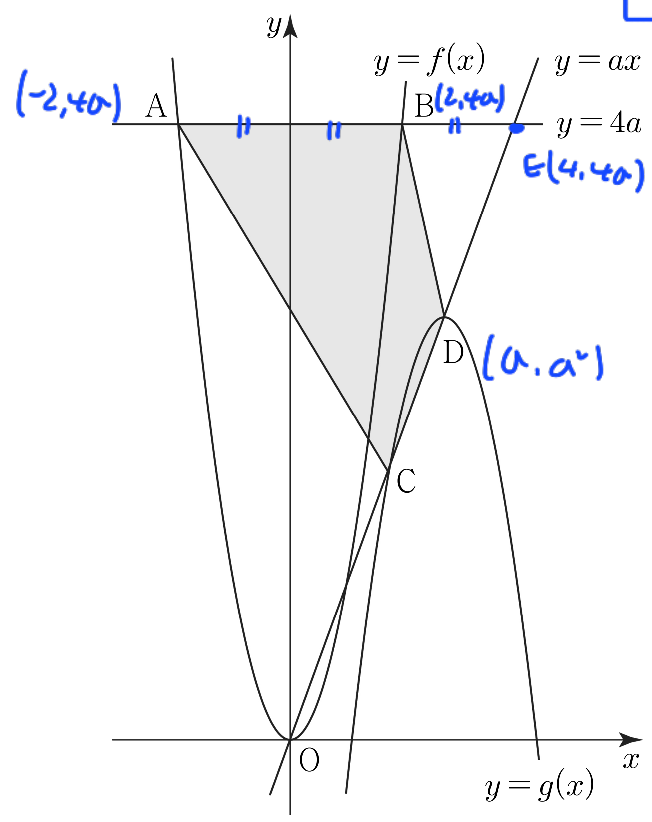
$k=1$

$P(x)=3x+1$

$P(30)=91$

28. 그림과 같이 $2<a<4$인 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=ax^2$, $g(x)=-a(x-a)^2+a^2$의 그래프가 있다. 직선 $y=4a$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=ax$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, $8\times M$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작다.) [4점]

$\boxed{121}$



$-a(x-a)^2+a^2=ax$

$(x-a)^2-a=-x$

$x^2-(2a-1)x+a^2-a=0$

$x=a,\ a-1$

$D(a,a^2)$

$C(a-1,\ a^2-a)$

$\square ACDB=\triangle ACE-\triangle BDE$

$=\frac{1}{2}\times 6\times(5a-a^2)-\frac{1}{2}\times 2\times(4a-a^2)$

$=15a-3a^2-4a+a^2=-2a^2+11a$

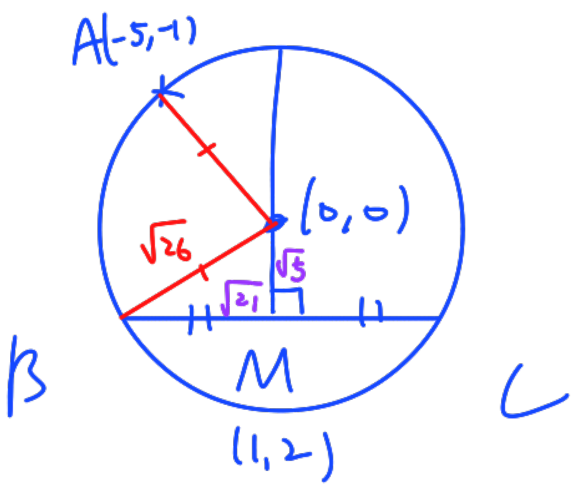
$=-2(a-\frac{11}{4})^2+\frac{121}{8}$

$a=\frac{11}{4}\rightarrow M=\frac{121}{8},\ 8M=121$

29. 좌표평면 위의 세 점 A$(-5,\ -1)$, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다. (나) 세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심은 원점이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{105}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



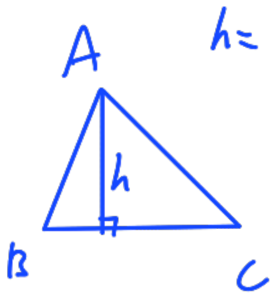
$\boxed{17}$

$\overline{AO}=\sqrt{26}=\overline{BO}$

$\overline{OM}=\sqrt{5}$ $\quad\therefore \overline{BM}=\sqrt{21}$

$BC: y=-\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$x+2y-5=0 \sim (-5,-1)$



$h=\frac{|-5-2-5|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}$, $\overline{BC}=2\overline{BM}=2\sqrt{21}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{21}\times\frac{12}{\sqrt{5}}$

$=\frac{12}{5}\sqrt{105}=\frac{q}{p}\sqrt{105}$

$\therefore p+q=17$

30. 이차함수 $y=f(x)$가 있다. 중심이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있고 반지름의 길이가 1인 원 중에서 다음 조건을 만족시키는 중심이 서로 다른 원의 개수는 5이다.

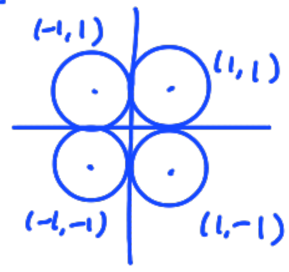
원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원이 x축과 y축에 동시에 접하도록 하는 실수 m의 값이 1개 이상 존재한다.

이 5개의 원의 중심의 x좌표를 작은 수부터 크기 순서대로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$라 하자.

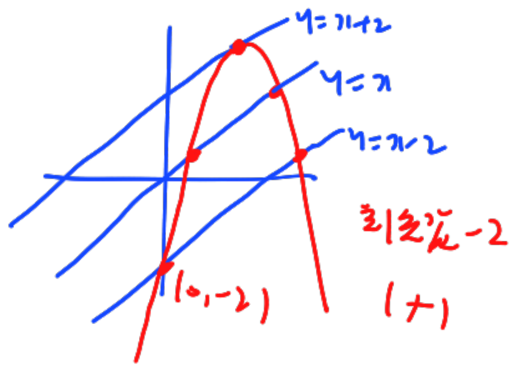
$$x_1=0,\ x_2+x_3+x_4+x_5=20$$

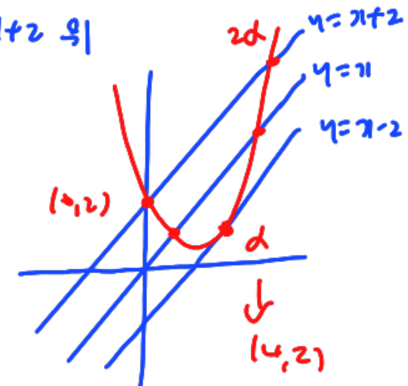
이고 $x_1 \le x \le x_5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 클 때, $f(20)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{82}$

$(a,b) \rightarrow (a+m,\ b+m)$



$a+m$	$b+m$	
1	1	$\rightarrow a-b=0 \rightarrow y=x$ 위
-1	-1	$\rightarrow a-b=0 \rightarrow y=x$ 위
1	-1	$\rightarrow a-b=2 \rightarrow y=x-2$ 위
-1	1	$\rightarrow a-b=-2 \rightarrow y=x+2$ 위





$\alpha+2\alpha+2\alpha=20$

$\alpha=4$

$f(x)=p(x-4)^2+x-2$

$f(0)=16p-2=2,\ p=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}(x-4)^2+x-2$

$f(20)=64+18=82$

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.