테마별 기출 분석서

6 주차

함수: THE ESSENTIAL

SEOL:NAME
THE SIGNATURE

설레임

설레임 모의고사
Team SeolName

06 함수: THE ESSENTIAL

[수학II]에서 물어볼법한 모든 함수에 대해 한 번씩 다뤄본다.

STYLE 01

입맛대로 PICK UP! : 구간별로 정의된 함수

구간별로 정의된 함수는 모의평가, 교육청, 수능 상관없이 항상 출제되는 단골 소재이지.
그런데, 잘 생각해보자. 출제자 입장에서는 왜 구간별로 정의된 함수를 내려는걸까?
바로 연속성과 미분 가능성에 관해 묻기 굉장히 좋기 때문이지. 그럼 우리는 어떤 자세로 접근해야 할까?
구간이 끊기는 부분 주위에서의 **연속성과 미분 가능성을 항상 염두해두고** 접근하는 게 좋아.
안 그러면 굳이 출제자가 이렇게 문제를 낼 이유가 없을 테니까.

[2023학년도 9월 모의평가 22번]

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

새로 정의된 함수가 나왔을 때, 우리는 하나의 자세를 취해야 해.

이 함수가 어떤 녀석인지 분석하는 것

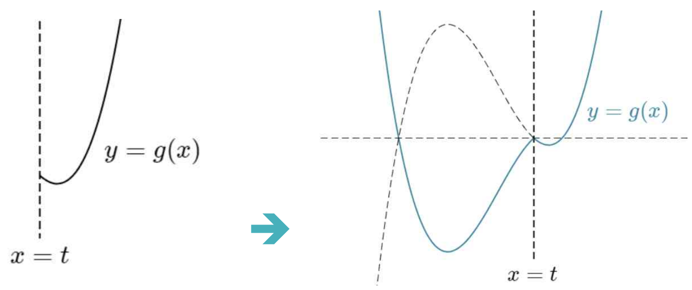
그것이 바로 그 문제의 핵심이 될 가능성이 매우 높아.
이때, 견지해야 할 우리의 태도가 무엇이다? 다른 조건들을 통해 이 함수를 더욱 정확하게 이해하는 것이다!
이 자세를 이 문제에서 적용시켜볼까?
$g(x)$ 라는 함수가 우선 튀어나왔네.

① 그러면 일단 가능한 $g(x)$ 가 어떠한 성질을 가지는지, 또는 어떠한 역할을 하는 함수인지를 분석해보는 거지.
② 아무리 분석해도 더 이상 얻을 건덕지가 없으면 이제 다른 조건들을 이용해서 분석을 하는거야.

다음의 과정대로 문제를 해결해보자.

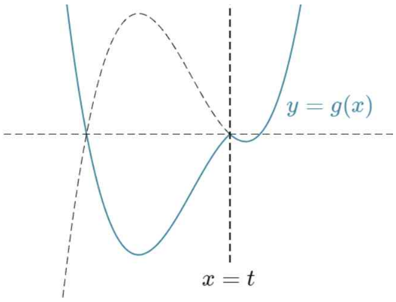
STEP 1 **함수의 해석은 기본!**

우선 $g(x)$ 라는 함수를 해석해 보아야 해. 그런데 구간별로 정의된 함수네?
아까 앞에서 이런 말 했는데 기억나? 구간별로 정의된 함수는 항상
구간이 끊기는 지점에서의 연속성과 미분가능성을 체크해 보아야 해.
문제에서 꼭 직접적으로 연속성을 묻지 않더라도 **함수의 그래프를 그리거나 할 때** 유용하게 사용되기 때문이지.
실제로 이 문제에서 $\lim_{x \to t+} g(x) = \lim_{x \to t-} g(x) = f(t)$ 이므로 $g(x)$ 는 $x = t$ 에서 연속이라는 것을 알 수 있지.
다음으로 각 구간에서 $g(x)$ 는 $f(x)$ 랑 $2f(t) - f(x)$ 인데, $f(x)$ 야 그냥 그리면 되니까 그만.
그런데 $2f(t) - f(x)$ 는 도대체 뭐지..?
어렵게 생각하지 말자.
$2f(t) - f(x)$ 라는 친구는 $f(x)$ 를 x 축에 대하여 뒤집은 다음에 평행이동시킨 친구에 불과해. ㅇㅋ?
그런데 어떻게 평행이동을 시킨 것이다? **$g(x)$ 라는 친구가 $x = t$ 에서 연속이 되도록** 평행이동시킨 것이다!
이를 그림으로 나타내면 다음과 같아. 지금은 이 함수의 특징만을 알아보는 과정이라 그래프의 엄밀성은 조금 내려놓고 지켜봐보자. $x = t$ 기점으로 $f(x)$ 를 뒤집은 뒤 $x = t$ 에서 딱 맞춰지도록 만든 것!



그것이 바로 $g(x)$ 의 정체라는 거지.

물론 우리는 여기서 $2f(t)-f(x)$라는 함수가 이런 함수라는 걸 외우는 게 목적이 아니야.
어떤 함수가 나오더라도 **이를 기하학적으로 해석할 수 있는 능력**을 기르는 게 목적인 것이지.
사실 고등 과정, 특히 [수학1/2]에서 낼 수 있는 함수의 변형은 **평행이동, 대칭이동 정도**가 전부야.
그리고 이런 요소들이 특히 구간별로 정의된 함수 문제에서 내기 딱 좋은 소재지.
일단 우리가 원래 풀려던 문제의 $g(x)$라는 친구가 다음과 같이 뒤집히는 함수라는 것만 기억하고
다음 파트로 넘어가보자.



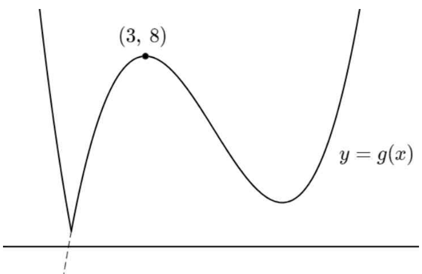
STEP 2 **남은 조건도 싸샤샥**

함수 해석이 어느 정도 되면 한 시름 놓았다 봐도 사실 상관이 없어. 이제 남은 조건이 몇 개인지 보자.
[조건 1] $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 8을 가지는 친구이다.

[조건 2] $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개다.

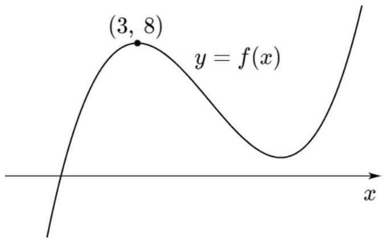
[조건 1]은 수식적으로 쉽게 분석은 되니 일단 보류, [조건 2]를 분석하는 게 좀 까다롭지.

그런데 이것도 그렇게 어려워 할 필요 없어. 고정된 대상에 집중해서 $h(t)$를 분석하면 돼.
약간 비유를 해볼까? 평범한 현대인들이라면 산에서 멧돼지 한 번쯤은 잡아본 적 있지?
움직이는 멧돼지랑 멈춰있는 멧돼지 중 뭐가 더 잡기 쉬워?
물론 둘 다 잡기 쉽긴 한데, 멈춰있는 게 아무래도 더 잡기 쉽겠지?
그래서 우리도 **멈춰있는 대상**, 즉, $f(x)$는 이미 정해져 있는거고 t만 변화하는거니까 $f(x)$를 고정시켜둔 뒤, t를 바꿔보면서 $h(t)$라는 함수를 분석하면 돼.

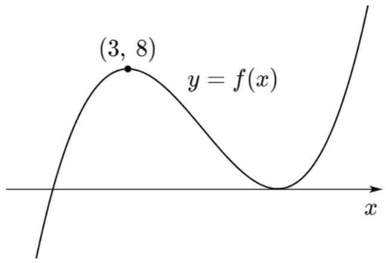


t를 움직이면서 분석해보자. $h(t)$는 언제 불연속일까? 즉, 방정식 $g(x)=0$의 해의 개수는 언제 바뀔까?
①**t가 $f(x)$의 x절편일 때**는 $h(t)$가 불연속이겠지?
그리고 ②**$g(x)$가 x축에 접하는 경우**, 즉, 다음과 같은 경우 역시 $h(t)$가 불연속이 돼.

①의 경우는 사실 함수 $f(x)$의 그래프 개형에 따라 개수가 바뀌어.
예를 들어, 다음 두 경우에는 ①에 해당하는 경우가 1개, 2개야.

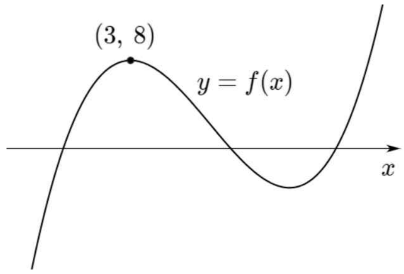


[Case A]



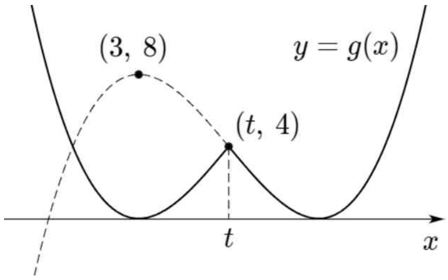
[Case B]

반면, 다음의 경우에는 ①의 해당하는 경우만 3개이므로 [조건 2]에 무조건 모순.



[Case C]

이 중 [Case A]와 [Case B] 중 하나일텐데, [Case B]가 정답이려면 ②에 해당하는 케이스가 하나도 존재하지 않거나, ①의 케이스와 겹쳐야 해. 하지만 당장 $f(t)=4$인 t가 존재해서 '응 수고' 이러고 있지?



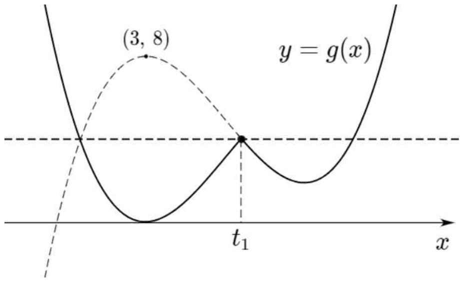
그럼 정답은 [Case A]에 있다는 것인데...
그런데 [Case A]도 그림만 봐서는 ②에 해당하는 케이스가 2개이기에 $h(t)$가 불연속인 t가 총 3개인데...
그럼 문제 오류인가..?
아니야! 잘 생각해보면 $h(t)$가 불연속인 지점이 2개만 되는 케이스가 존재해.
언제일까? 다음 질문을 참조로 하여 잘 생각해보자.

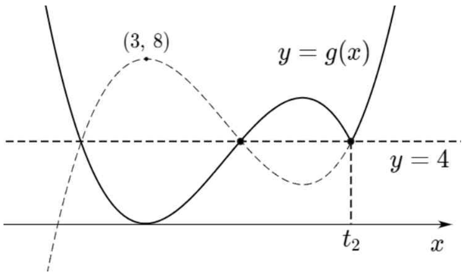
[질문] 위의 [Case A]에서 ②에 해당하는 케이스가 어디에서 나왔어?

STEP 3 **마무리도 가볍게 싹!**

[방금 질문] 위의 **[Case A]**에서 ②에 해당하는 케이스가 어디에서 나왔어?

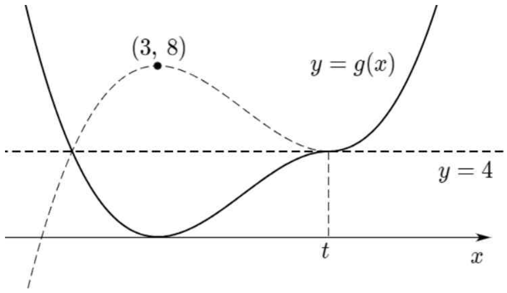
마찬가지로 $f(t)=4$인 지점 중 $x=3$ 뒤에 있는 점에서 $h(t)$가 불연속이 된다는 것을 판단할 수 있어.
잘 이해가 안 가면 다음 그림을 참조해 봐! 아래 그림에서 t_1, t_2일 때 $h(t)$가 불연속이야.





자, 지금 이 상황에서 ②에 해당하는 케이스가 2개씩 나오는 이유는 뭐야?
직선 $y=4$와 원래의 $y=f(x)$의 그래프가 $x=3$ 이후에 두 번 만나고 있기 때문이지?
그럼 이 개수를 1개로 줄여주려면 어떻게 해야 할까?

정답! 바로 접할 때로 옮겨준다! 어떻게? 다음과 같이!



다시 말해, 원래 함수 $f(x)$는 극솟값 4를 가진다는 것을 알 수 있어.
기억해두자. **상황을 변화시키면서 주어진 조건에 부합하려면 어떻게 되어야 할지 시뮬레이션을 돌리는 것.**
학생들이 고난도 수학 문제를 풀 때의 기본적인 자세이자 가장 어려워하는 부분이야.
수능 수학은 연습이 많이 필요하다는 이유 중 하나이기도 하지.

이쯤 오면 다 해석한 거 같으니 마무리를 짓자.
보통 **다항함수는 접하는 곳이나 극대점, 극소점을 기준으로 식**을 세우면 쉬워.
이 문제의 경우 $(3,\ 8)$이 극대점이니까

$$f(x)=(x-3)^2(x-k)+8$$

으로 식을 세우면 극솟값은 $x=\dfrac{2k+3}{3}$에서 가지므로 $f\left(\dfrac{2k+3}{3}\right)=-4\left(\dfrac{k-3}{3}\right)^3+8=4$

곧, $k=6$임을 알 수 있어. 따라서 $f(8)=5^2\times2+8=58$임을 얻지.

TIP 극대랑 극소가 4 차이나는 삼차함수는 극대점이랑 극소점의 x값의 차이가 2이다.
자주 나오는 수라 기억해두면 편리하다.

★ STYLE 01 부록 - 대칭이동과 평행이동에 대한 분석

이번 예제에서는 대칭이동과 평행이동된 함수의 특성을 분석해보자.

EXAMPLE

연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ -f(2-x)+4 & (x>1) \end{cases}$ 가 연속일 때, 이를 분석하라.

SOLUTION

$f(x)$라는 함수를 중심으로 생각해보는 게 좋겠지?

일단 구간별로 정의된 함수니까 무조건 $x=1$에서 분석해보는게 좋겠다!

$\lim_{x \to 1-} g(x)=f(1)$, $\lim_{x \to 1+} g(x)=-f(1)+4$

인데, 이 함수가 연속이므로 $f(1)=g(1)=2$라는 점 정도는 얻고 가자!

이제 $-f(2-x)+4$라는 함수를 분석해볼게.

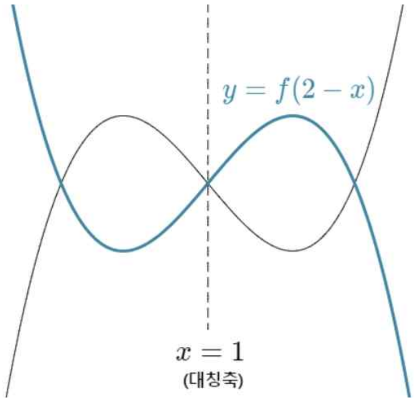
$f(2-x)$라는 함수는 무엇일까?

일단 x 대신에 $-x$이 들어갔으니 좌우대칭한 모양이라는 건 알 수 있을거야.

그런데 어느 지점을 기준으로? 서로 대칭인 함수는 대칭축에서 만난다는 것 기억하지?

그럼 $f(x)$와 $f(2-x)$에 어떤 x를 넣어야 둘이 함숫값이 같아지지?

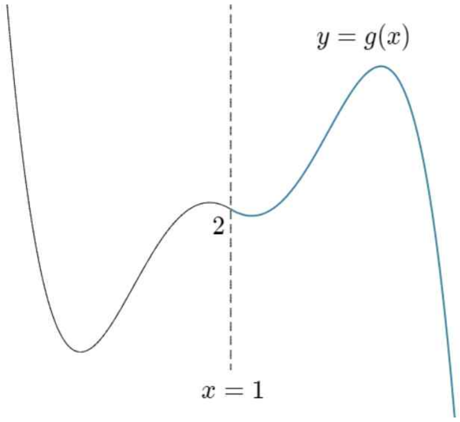
방정식 $x=2-x$에서 $x=1$이므로 $f(x)$와 $f(2-x)$의 함수의 그래프는 정확히 $x=1$에 대하여 대칭인 함수라는 것을 알 수 있다! 대충 그림으로 그려보면 다음과 같겠지?



자, 그 다음으로 $-f(2-x)+4$인데, 이건 결국 $f(2-x)$라는 함수를 상하대칭시킨 뒤 위아래로 평행이동한 것에 불과해.

그런데 어떻게?

$g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 딱~ 맞게 붙도록 대칭이동한 것이다!
지금까지 말한 내용을 정리한다면 $-f(2-x)+4$라는 친구는 $f(x)$를 $x=1$에 대하여 대칭이동하고, x축에 대하여 대칭도 시킨 뒤 이어붙인 다음과 같은 모습일 것이다!



그래프를 그려보니 어때?

점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동시킨 그래프가 $g(x)$의 나머지 부분, 곧, $x \geq 1$에서의 부분이겠구나! 라는 점을 알 수 있지!

STYLE 02

N축은 나가있어 : 합성함수에 대하여

합성함수가 나왔다는 말은 일단 이 문제가 이 시험에서 최소한 준킬러 역할을 한다는 거야.
그냥 함수도 생각하기 어려운데, 합성함수라니…
물론 여러 선생님들의 강의를 들으며 합성함수와 관련된 분석 방법은 배웠겠지만
방법론적인 측면 위주로 들었기에 **어떤 자세로 접근해야 할지**에 대해서는 제대로 모르고 있을 가능성이 높아.
이 챕터에서는 합성함수 분석법에 대해 알아보려 해.

[2022학년도 6월 모의평가 22번]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

(가) 조건은 사실 정말 쉽게 해석돼. 그런데, 우리 고난도 문제를 풀 때 습관 든 친구들은 이걸 알고 있을거야.

쉬운 조건은 바로 해석해서 별로 도움되는 정보를 얻기 힘들다는 것!

일단 보류하고 (나) 조건으로 넘어가보자. (나) 조건은 (가) 조건이랑 연계해서 생각할 필요가 있어.
물론, N축과 같은 유명한 스킬을 활용할 수도 있겠지만, 여기서는 조금 더 근본적인 방법에 대해서 설명해보려고 해. 잘 따라와 보자.

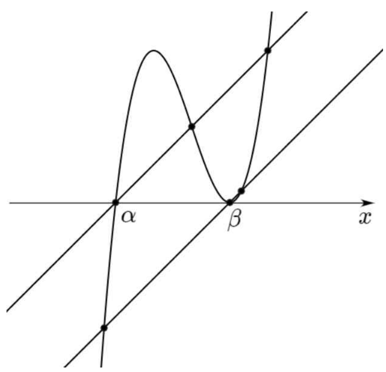
STEP 1 **함수보단 평가원을 합성해버리고 싶은 나의 마음으로**

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 $x=\alpha$, β라 해볼게.
그럼 조건 (나)는 어떻게 해석할 수 있다?

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

방정식 $x-f(x)=\alpha$의 실근과 방정식 $x-f(x)=\beta$의 실근을 겹치지 않게 전부 세면 3개라는 뜻으로 해석할 수 있지. … ㉠
그런데, 우리 출제자의 입장에서 생각해보자. 출제자는 과연 식만으로 문제가 풀리게 설계해놓았을까?
물론 그러지 말라는 법은 없겠지만, $f(x)$를 식을 세워서 하는 것보다는 그래프를 그리는 것이 훨씬 편하다는 사실을 직관적으로 알 수 있어.
애당초 실근의 개수 관련된 문항은 대부분 그래프 그려서 교점 개수로 푸는 게 익숙하지?
(4주차 주간지를 잘 읽어보자.)
㉠에서 두 방정식 $x-f(x)=\alpha$와 $x-f(x)=\beta$의 실근 중 겹치는 건 존재할 수 없어.
그러므로 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$이 만나는 점의 개수의 합이 3이라는 거로 해석해보면 되지?

일단 어떻게든 그래프를 그려봐야 하니, $y=x-\alpha$와 $y=x-\beta$의 위치를 대강 알아야겠지?
사실 뻔한 게 당장 각 직선에 $x=\alpha$, β를 대입하면 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이므로 교점이라는 걸 알 수 있어.
그래서 다음과 같이 그려볼 수 있지.



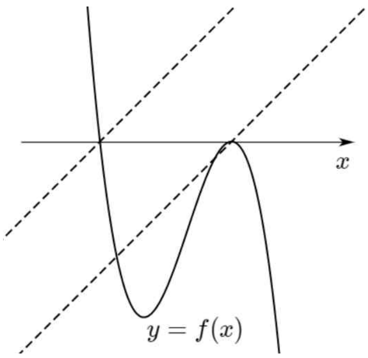
이렇게 되는데, 두 직선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 그래프의 개형을 잘 정해야 해. 문제는 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 직선 $y=x+\alpha$와 곡선 $y=f(x)$가 무조건 두 개 이상의 점에서 만나고, 직선 $y=x+\beta$와도 두 개 이상의 점에서 만나기 때문에 조건 (나)를 만족시키기 어려워.
이건 어지간한 그래프들을 다 그려보면 아마 금방 깨달을거야.
애시당초, 이 문제에서는 $f(x)$의 최고차항의 계수에 대한 정보가 전혀 주어지지 않았기 때문에,

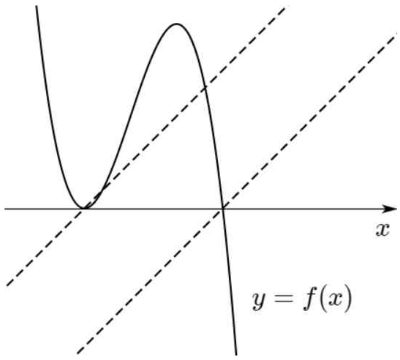
최고차항의 계수가 음수일 가능성도 무조건적으로 고려해보아야 해.

최고차항의 계수의 부호가 안 줬다는 건 기본적으로 '음수인 케이스 무시하지 마셈' 이라는 의미니까.

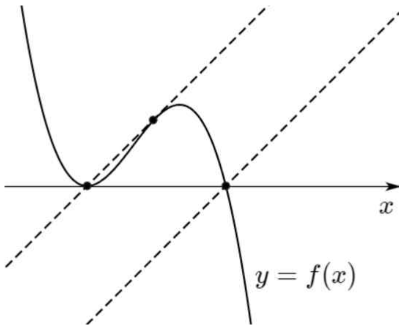
STEP 2 **생각을 바꿔서..**

자, 그럼 이번에는 최고차항의 계수가 음수인 케이스를 분석해보자.
아무래도 접하는 경우에는 케이스가 두 개가 나오긴 하지?





그런데, 왼쪽 케이스는 $f(1)=4$, $f'(1)=1$이라는 점에서 바로 아닌 것을 알 수 있어. 애당초 도함수가 양수인 부분은 모두 함숫값이 음수잖아? 그럼 오른쪽 형태의 그래프라는 것인데, 위의 그래프에서는 교점이 4개나 존재하지? 그럼, 교점의 개수를 줄이려면 어떻게 해야할까?
접하면 된다! 중요한 거 기억하지? **교점의 개수를 변화시키는 가장 큰 요인은 접선이다!** 라는 것.
실제로 그래프가 튀어나온 부분을 조금만 줄이면

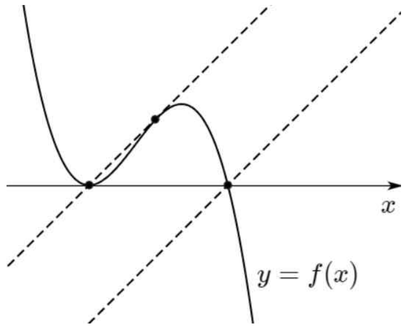


위와 같이 교점의 개수가 3개까지 확 줄어드는 것을 확인할 수 있어.
그럼 우리는 이 상황을 기준으로 식을 세워야 하는거지.

STEP 3 **마무리 계산하기!**

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$이라는 조건을 이용해서 모든 걸 풀어야 해.

그런데, 출제자 입장에서 잘 생각해보자. $f'(1)=1$이라고 했잖아?



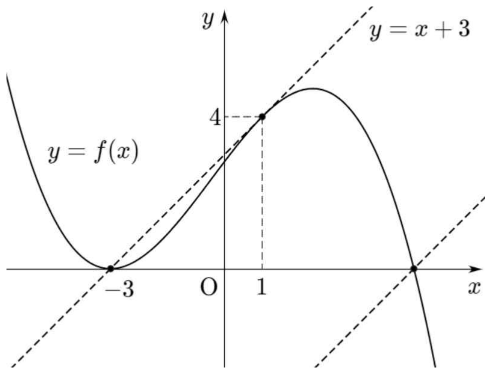
이 그래프에서 접하는 부분의 기울기가 1인데, 그 지점이 정확히 $x=1$이면 좋지 않겠어??

이런 의심으로부터 문제를 해결해 보는 거지.

실제로 접하는 지점이 아닌 다른 지점에서 $f'(1)=1$이면 $f'(0)<1$이 되어 모순이 발생해.

이때, $f(1)=4$라고 했으니까 왼쪽에서 접하는 직선은 $y=x+3$이라는 사실까지 가볍게 얻을 수 있지.

한편, $y=x+3$이 x축과 만나는 점이 α니까, $\alpha=-3$이라고 쓸 수 있겠네!



따라서 $y=f(x)$는 $y=x+3$과 $x=-3$에서 만나고, $x=1$에서 접하니까

$$f(x)=a(x+3)(x-1)^2+x+3$$

이라고 쓸 수 있고, $y=f(x)$가 $x=-3$에서 x축에 접하니까, $f'(-3)=0$에서

$$f'(3)=16a+1=0$$

곧, $a=-\dfrac{1}{16}$이고, $f(0)=-\dfrac{1}{16}\times3\times1+0+3=\dfrac{45}{16}$이므로 $p+q=61$이겠다!

ADVICE 최고차항의 계수가 1 또는 −1이라고 착각해서 실수하는 것은 전 국민 공통이다. 제발 최고차항의 계수가 항상 1 또는 −1일 것이다라는 편견은 버리자.

★ STYLE 02 부록 – 평가원의 SIGNAL

평가원이 문제를 낼 때, 제발 이것만큼은 기억해달라 하는 순간이 있어. 위의 경우 '최고차항의 계수'를 주지 않았을 때, 음수인 케이스를 고려해달라고 했지? 그것과 비슷하게 답이 나오는 경우를 미리 암시해주는 경우에 대해 알아볼거야.

[실근의 개수에 대한 발문] (2022학년도 수능)

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+}g(t)+\lim_{t\to a-}g(t)\le 2$이다.
(나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

어떤 두 그래프가 만나는 교점의 개수가 달라지는 지점은 어디라고 했지?

바로 **접할 때**를 기준으로 달라진다고 했어.

[수학 2]에서는 점근선을 다룰 일은 없으니,

[수학 2] 문제에서 **실근의 개수 문제가 나오면 사실상 그래프의 접선이 사용되는 문제**라고 봐도 무관해.

[구간별로 정의된 함수에 대한 문제] (2023학년도 6월)

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

중요한 내용이라 한 번만 더 강조할게.

구간별로 정의된 함수가 있다는 것은 **구간이 끊기는 지점 주위에서의 연속성과 미분가능성**에 대해 분석할 필요가 있어.

모든 문제가 항상 그렇다고 장담할 수는 없지만, 대부분의 경우는 그렇고, 문제 초반에 하는 분석이라 괜히 딴길로 샐까 걱정할 필요도 없지.

[최댓값과 최솟값에 관한 발문] (2023학년도 수능)

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $\lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-n+1)(x-n)\rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

최댓값과 최솟값이 나오는 경우는 문제 중 미분을 활용하는 문제의 경우에는 극대/극소 조건, 즉, 단순히 미분해서 0이다 라는 조건 외에 다른 조건을 활용할 가능성이 굉장히 높아.

극소라는 건 그 주변의 값보다만 작으면 되지만, 최소라는 건 다른 모든 값보다도 작아야 하니까 **다른 값들의 상황**도 같이 지켜봐야 해.

STYLE 03

22번의 국룰을 보여주마 : 특정 등식을 만족시키는 함수

'모든 실수 x에 대하여 ~~를 만족시킨다.' 자주 보는 표현이지만 항상 볼때마다 막막하지.
이런 문항의 특징은 해당 등식이 나타내는 바를 직접 해석해야 한다는 것이야.
이번 챕터에서는 이와 같이 등식과 관련된 정보가 주어져 있을 때,
여러분이 어떻게 식을 분석하고 파악해야 하는지에 대해 알아볼거야.
이번 챕터에서 강조할 점은 문제를 풀기 전에, **문제를 대수적으로도, 기하적으로도** 풀 수 있는
마음가짐이 되어 있어야 한다는 점이야. 준비가 되었다면 다음 문제를 풀어보자.

[2023학년도 대학수학능력시험 22번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

우리만의 실전 풀이

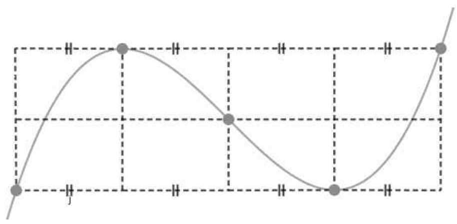
THINKING!

아무래도 22번이다보니 문제를 보자마자 바로 방향성이 보인다면 그건 천재겠지.
일단 문제를 보자마자 주어진 조건을 차근차근 해석해나가는 것이 중요해.
무턱대고 아무 조건이나 보지 않고 중요한 조건, 즉, **많은 정보를 주는 조건을 우선적으로** 해석해야 해.
그래야 나중에 적은 조건으로도 남은 해석이 쉬워지겠지?
많은 정보를 주는 조건이라 함은 **'모든 실수에 대하여'와 같이 그 함수 자체의 성질을 제공하는 조건**을 의미해.
다시 말해, 이 문제의 경우 가급적 (가) 조건을 먼저 해석할 필요가 있는 거지.

우선 이 문제를 설명하기 전에 '변곡점'의 개념에 대해 설명하려 해.
[수학 2]에서 배우는 과정은 아니지만, 알아뒀을 때 정말 도움이 많이 되는 내용이니 잘 알아두도록 하자.

| 삼차함수와 변곡점 |

변곡점이란 수학적으로는 $f'(x)$를 한 번 더 미분한 함수가 0이 되는 지점을 말한다. 특히, $f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)$는 이차함수이므로 당연히 대칭함수이기에, $f(x)$는 점대칭이다.
삼차함수의 경우 그 대칭점이 변곡점이 된다.
또, 변곡점은 $f'(x)$의 도함수가 0이 되는 지점이므로
도함수가 최소(또는 최대)가 되는 곳이 된다. 위의 그림에서는 중앙에 있는 점이 변곡점에 해당한다.



STEP 1 **주어진 등식을 해석하는 방법에 대하여**

우선 (가) 조건을 해석해볼거야. 그런데 주어진 식을 변형하지 않고 해석이 되니?
(음.. 이게 된다면 그대는 굳이 이 칼럼을 볼 필요는 없을 듯 하오.)
일반적으로는 바로 이해가 가진 않지. 그렇기 때문에 우리가 이 식을 적당히 변형해야 함은 필연적이야.
평가원은 **절대 발상적 사고를 요구하지 않아.**
따라서 가급적 식을 적게 변형하고 해석을 어렵게 하는 것이 평가원 문제의 특성이지. 이 문제도 마찬가지야.
결국 변형이라고 하는 것은 어지간하면 다음 세 가지 중에 하나로 결정이 돼.

① 각 항을 적당히 이항하기

② 각 항을 적당히 곱하고 나누기

③ 양변에 적당히 더하고 빼기

굳이 평가원이 선호할만한 순서를 나누자면 ① ⇒ ② ⇒ ③ 순이긴 해.
다시 말하지만 평가원은 '없던 걸 만드는 것'보다는 **'있던 걸 새롭게 해석하는 것'**을 좋아하는 집단이기 때문!

자, 그럼 이 문제의 경우에는 어떻게 변형하는 것이 좋을까?

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

가장 선호할법한 ①부터 해볼게. 그래도 복잡한 식보단 단순한 식을 이항하는 게 합리적이겠지?

$$f(x)-f(1)=(x-1)f'(g(x))$$

여기서 해석이 관건인데, ①만으로 해석이 안 되니 ②에 따라 양변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x)) \ \cdots \ ㉮$$

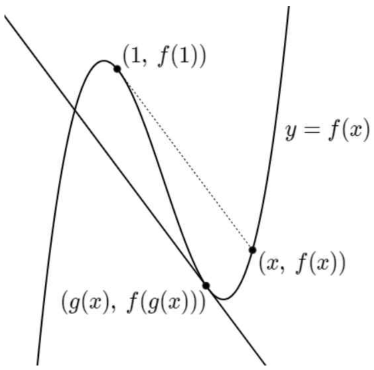
이 되어서 **평균변화율**(기울기함수라고도 부른다)에 대한 식이 등장해.
자, 이 정도쯤에서 기하학적 해석을 해볼거야.

Q. 왜 하필 지금? A. 우리가 아는 형태(기울기함수)가 등장했기 때문이지.

㉮를 해석해볼건데, 이런 형태의 식을 해석할 때는 우선 해당 등식이 의미하는 바를 한글로 생각해봐.

> 모든 x에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 $(x,\ f(x))$를 잇는 직선의 기울기와 점 $(g(x),\ f(g(x)))$에서의 접선의 기울기가 동일하다.

그리고 이를 직접 그래프로 그려봐. 그래프 자체의 엄밀함은 조금 줄어도 상관없어.
일단 지금은 함수를 해석하는 게 우선이니까.



아, $g(x)$라는 친구는 1과 x 사이에서 평균 변화율과 접선의 기울기가 같은 x의 값을 의미하는구나!

그런데 똑똑한 우리들은 이런 생각을 해볼 수 있어.
아니, 접선의 기울기가 같은 지점은 변곡점을 기준으로 대칭인 위치에 2개 존재하잖아.
그러면 $g(x)$라는 친구의 후보가 2개인데, 이걸 어떻게 생각해야 하지?

STEP 2 의문을 해결한 뒤 문제를 정복해버리자

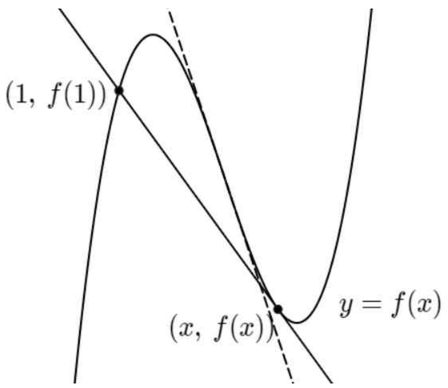
STEP 1 에서 $g(x)$에 대한 의문이 남았어. 일단 잠깐 보류해두고 나머지 조건들을 살펴볼까?

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다. (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

순서대로, 조건 (나)를 볼텐데 $g(x)$가 최소가 될 때는 어떤 의미일까?

이 조건과 관련해서 잘 생각해봐. **$g(x)$는 절대 $f(x)$의 변곡점에서의 x좌표 이하가 될 수는 없어. … ㉠**

왜? 점 $(1, f(1))$이 어디있든, 그 점과 다른 점을 이었을 때, 변곡점에서의 기울기보다 작아질 수는 없거든.



최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 접선의 기울기는 변곡점에서 최소가 된다는 사실 앞서 언급했지?

하지만, $(1, f(1))$과 $(x, f(x))$을 이은 접선의 기울기의 최솟값은 위의 그림과 같이 끽해봐야 변곡점이 아닌 다른 점의 기울기 정도야. 변곡점에서의 접선의 기울기 이하로는 구조적으로 불가능하지.

㉠이 거짓이어서 $f(x)$의 변곡점에서의 x좌표 이하인 $g(x)$가 존재한다 가정해보자.

그러면, 사잇값의 정리에 의해 $f(x)$의 변곡점에서의 x좌표인 $g(x)$도 존재해야 해.

그런데 이는 방금 거짓이라고 했지?

WHY? $f'(g(x))$가 변곡점에서의 기울기가 되면 문제인 게, 1과 x 사이를 잇는 직선의 기울기가 변곡점에서의 접선의 기울기와 같을 수 없다고 했잖아?

따라서 $g(x)$라는 친구는 변곡점 이후에서 $(1, x)$에서의 평균변화율과 같은 접선의 기울기를 갖는 x좌표를 의미해.

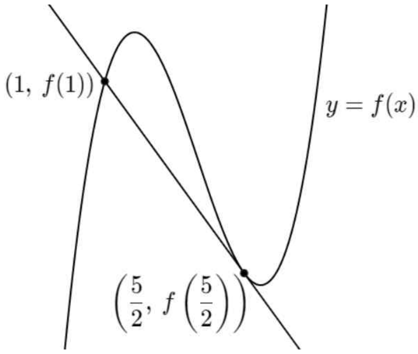
이제 $g(x)$라는 함수에 대한 의문이 어느 정도 풀렸을 거라 생각해.

자, 본론으로 넘어와서 그래서 $g(x)$라는 친구는 언제 최솟값을 가질까?

생각해보자. $g(x)$라는 친구가 작아질수록 $f'(g(x))$도 작아지겠지?

그러면 점 $(1, f(1))$과 $(x, f(x))$를 잇는 직선의 기울기가 작아질수록 $g(x)$가 작아지지 않겠어?

언제? 바로 다음과 같이 접할 때지!



자, 이쯤 되면 대충 $f(x)$의 식을 추론할 수 있을거라 생각해.

직선에 접하는 삼차함수의 식 정도는 세울 수 있지?

접하는 직선을 $y=ax+b$라고 하면

$$f(x)-(ax+b)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \cdots ㉡$$

으로 세울 수 있어. 이제, a와 b만 찾으면 되는데,

다행히 조건 (다)에 배분된 조건이 2개가 있는 것으로 보아 주어진 두 식만 잘 해석하면 이제 답을 구할 수 있을 것 같아.

이번 문제, 생각보다 많이 어렵다고 느꼈을 수도 있어. 아, 근데 진짜 어려운 거 맞긴 해ㅎㅎ..
하지만 포인트는 (가) 조건의 해석에 달려있던 문제였어.
이 함수를 잘 해석하면 나머지는 순리대로 풀리는 문항이었지.

그럼 종합적으로 이와 같이 식의 변형이 필요한 문제는 어떻게 접근해야 하면 좋을까?
아니, 구체적으로 식을 어떻게 변형해야 잘 변형했다는 말을 들을까?
그런 여러분들을 위해 부록에 대표적인 식 변형 예시를 몇 개 소개해보았어.

(다음 페이지에 계속)

★ STYLE 03 부록 – 대표적인 식 변형 방법에 대하여

01 복잡한 형태의 식 변형

[2022학년도 대학수학능력시험 12번]

다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 해석하시오.

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

식이 쓸데없이 복잡하게 나오는 데에는 이유가 다 있어.
무언가 간단하게 변형할 수 있기 때문이겠지? 대표적인 방법으론 무엇이 있을까?
인수분해가 떠오르면 훌륭해! 우변이 $=0$으로 끝나기 때문에 인수분해를 하면
각 인수가 0이 되는 형태로 식을 해석할 수 있겠지? 실제로 이 식은 인수분해가 가능해.

$$\{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$$

따라서 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x$ 또는 $-x$ 또는 1으로 해석하면 되는 거지.

이와 같이 복잡한 형태의 식 변형은 자신이 알고 있던 지식을 총동원해서 간단하게 만들만한 방법을 생각할 필요가 있어. **인수분해가 가장 대표적인 예시이지만, 경우에 따라서 부분분수분해, 절대부등식 등 원래 알고 있던 정보를 잘 이용해서 상황에 맞게 식을 변형할 줄 알아야 해.**

이 부분은 평가원 기출문제 뿐만 아니라 EBS, 사설 모의고사 등 여러 가지 문제를 풀다보면
자연스럽게 늘게 되는 부분이니 너무 걱정할 필요는 없어.

하지만, 만일 자신이 인수분해 같은 필수적인 기술에 조금 약하다면 조금 더 분발하도록 하긴 해야겠지?

(다음 페이지에 계속)

02 구간을 나누는 식 해석

[2021학년도 10월 22번]

양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 모든 실수 x에 대하여

$$|x(x-2)|g(x) = x(x-2)(|f(x)|-a)$$

이고, 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능할 때, $f(x)$에 대하여 가능한 많은 정보를 해석하시오.

구간을 나눴을 때 식이 오히려 간단해지는 케이스도 있지.
사실 이렇게 말할 뿐 대부분의 케이스는 절댓값이 포함된 경우이긴 해.
당연하겠지만, **절댓값이 들어간 식의 경우에는 구간별로 나눠서 식을 간단하게 만든 뒤** 해석하는 게 편해.
이 문제의 경우에는 비주얼 상으로도 제발 그렇게 해달라고 애원하고 있잖니?
$x<0$ 또는 $x>2$에서는 $|x(x-2)| = x(x-2)$이므로

$$x(x-2)g(x) = x(x-2)(|f(x)|-a)$$

즉, $g(x) = |f(x)|-a$이야. 반면, $0<x<2$에서는 $|x(x-2)| = -x(x-2)$이므로

$$-x(x-2)g(x) = x(x-2)(|f(x)|-a)$$

곧, $g(x) = -|f(x)|+a$이겠지? 그런데 $g(x)$가 $x=0$, 2에서 미분가능하다고 했으니까
절댓값 함수의 미분가능성과 관련하여 $g(0)=g(2)=g'(0)=g'(2)=0$이야.
따라서 $|f(0)| = |f(2)| = a$일 것이고, $f'(0)=f'(2)=0$임도 얻을 수 있겠지?

그런데, $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수라 했으니
$x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소인데 극댓값과 극솟값은 같을 수 없으니까 $f(0)=a$, $f(2)=-a$이겠네.

$$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2-6x$$
$$f(x) = x^3-3x^2+C$$

에서, $f(0)+f(2) = -4+2C = 0$이므로 $C=2$.
따라서 $f(x) = x^3-3x^2+2$이고, $a=f(0)=2$까지 얻을 수 있지.
생각보다 문제 자체는 간단하지?

03 기하학적/대수적 해석을 포함한 함수 해석

[2016학년도 9월 가형 30번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.

> $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \ge 0$이다.

함수 $f(x)$는 어떤 성질을 가지는가?

이쯤 되면 익숙해질만도 하지?

두 함숫값의 차와 관련된 식이 나오면 항상 기울기함수를 염두해 두는 것이 좋을 거야.

$f(x)$의 변화량, x의 변화량이 부등식 안에 딱 있으니까 뭐 이건 뻔하지.

$$f(x_2) - f(x_1) \ge -(x_2 - x_1)$$

양변을 $x_2 - x_1$로 나누면 $x_2 > x_1$이므로

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge -1$$

이지? 이 식을 그대로 해석하기에는 다소 그러니까 조금 조건을 축소해서 생각해볼까?

$x_2 \to x_1$로 극한을 보내면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge -1$임을 얻을 수 있지.

그런데 반대로 $f'(x) \ge -1$이라고 해서 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge -1$이라고 보장할 수는 없잖아?

그러니까 검증을 해보자.

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < -1$인 x_1와 x_2가 존재한다면 평균값 정리에 의해 $f'(c) < -1$인 c가 존재하므로 모순.

따라서 주어진 부등식은 $f'(x) \ge -1$으로 해석하면 충분하다 볼 수 있어.

주어진 조건을 해석할 때에 있어 **이 조건을 필요충분조건으로 해석했는 지 판단하는 부분**은 중요한 부분이야.

학생들이 제대로 문제를 풀었다고 생각했는데도 답이 안 나오는 이유는 보통 여기에 있어.

내 입장에서는 이 조건을 똑같은 조건으로 더 간단하게 해석했다 생각했는데, 알고보니까 똑같은 게 아니라 다른 조건으로 만들어 버린 거지. 이해하기 쉽게 가장 큰 예시로 다음을 들어볼까?

[EXAMPLE] 다음 논리는 참일까?

$$\frac{1}{x^2-1}\times(x+1)=0 \text{ 이면, } \frac{1}{x^2-1}=0 \text{ 또는 } x+1=0 \text{ 이므로 } x=-1 \text{ 이다.}$$

[SOLUTION] 안타깝게도 아니야. $x=-1$ 을 넣으면 $x+1=0$ 이겠지만, $\frac{1}{x^2-1}$ 은 정의되지 않기 때문이지.

함수 $y=\frac{x}{x}$ 와 함수 $y=1$ 은 다르다 약간 그런 갬성. ($x=0$ 에서 정의되는지의 여부)

특히, 22번과 같은 고난도 문항은 자신이 올바른 논리로 갔다 생각하지만 실제로는 그렇지 않은 경우도 있지. 그렇기 때문에 **문제를 맞췄다 하더라도 해설을 보면서 검토를 하거나, 아니면 양치기를 하면서 자신의 사고 체계를 확실하게 잡아야 할 필요**가 있어.

틀리면서 성장하는 너의 모습, 기대할게.

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 함수 해석의 기본 자세

① 주어진 함수의 함수식을 통해 어떠한 역할을 하는 함수인지를 분석한다.
② 아무리 분석해도 더 이상 얻을 건덕지가 없으면 이제 다른 조건들을 이용해서 함수를 분석한다.

조건을 해석할 때, 움직이는 대상(변수)를 인위로 정지시키기보다는 정지된 대상(함수 등)을 중심으로 변수를 움직이면서 보는 것이 편리하다.

CHECK 02 구간별로 정의된 함수의 해석

구간별로 정의된 함수는 우선 연속성, 미분가능성을 파악하고 출발한다.
대칭이동이나 평행이동이 있는 경우가 있다면 가급적 이런 요소들을 고려하여 해석해야 한다.
평가원은 절대 문제를 아무런 이유 없이 내지 않는다. 이러한 요소들이 자신의 눈에 보인다는 것은 평가원도 그 요소를 활용해서 냈고, 수험생에게 이걸 봐달라고 하는 격이나 다름 없다.

CHECK 03 합성함수의 해석

합성함수를 직접 그려야 하는 상황이 아니면 무조건적인 N축 사용이 독이 될 수 있다.
단순히 방정식의 해를 구할 때 합성함수가 사용되는 상황에서는 오히려 겉함수의 실근을 α, β, $\cdots$ 로 두고, 속함수의 값이 α, β, $\cdots$가 되도록 하는 경우를 분석하는 것이 더욱 효율적일 수 있다.
경우에 따라 알맞은 방법을 사용하여 합성함수를 해석해야 한다.

CHECK 04 식 변형의 기본 수칙

평가원은 **절대 발상적 사고를 요구하지 않는다.**

따라서 가급적 식을 적게 변형하고 해석을 어렵게 하는 것이 평가원 문제의 특성이다..

결국 변형이라고 하는 것은 어지간하면 다음 세 가지 중에 하나로 결정이 된다.

① 각 항을 적당히 이항하기

② 각 항을 적당히 곱하고 나누기

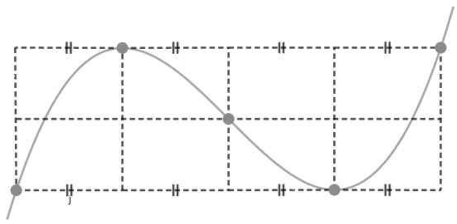
③ 양변에 적당히 더하고 빼기

CHECK 05 삼차함수와 변곡점

변곡점이란 수학적으로는 $f'(x)$를 한 번 더 미분한 함수가 0이 되는 지점을 말한다. 특히, $f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)$는 이차함수이므로 당연히 대칭축이 존재하기에, $f(x)$는 점대칭이다.

삼차함수의 경우 그 대칭점이 변곡점이 된다.

변곡점은 $f'(x)$의 도함수가 0이 되는 지점이므로 **도함수가 최소(또는 최대)가 되는 곳**이 된다. 위의 그림에서는 중앙에 있는 점이 변곡점에 해당한다.



CHECK 06 평가원의 SIGNAL

평가원이 문제를 내는 패턴을 잘 분석해보자. 언급한 바와 같이 '최고차항의 계수의 부호'를 안 주면 음수인 케이스도 생각해야 하는 등 항상 주던 조건을 안 준다는 것은 거기에 찜찜한 요소를 숨겨놨기 때문이라 볼 수 있다. 진짜 고정 100을 원하는 학생들이라면 이 '찜찜한 요소'들을 분석하는 능력을 길러야 한다. 교육청보다도 평가원 모의고사를 자주 풀어보라고 하는 이유이기도 하다. 본인이 문제를 읽고 스스로 문제의 숨겨진 조건을 빠르고 정확하게 파악하는 핵심이기 때문이다.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2021학년도 6월 나형 30번 변형]

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-4)+h'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

002 [2015학년도 4월 나형 29번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (|x|\le 2) \\ -2x+3 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

003 [2021학년도 7월 12번 선지 제거]

다항함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$을 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3} & (x\neq 3)\\ 1 & (x=3)\end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

004 [2022학년도 6월 14번 선지 제거]

두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx \rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

005 [2022학년도 4월 14번 선지 제거]

정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -4x+4 & (x>3) \end{cases}$$

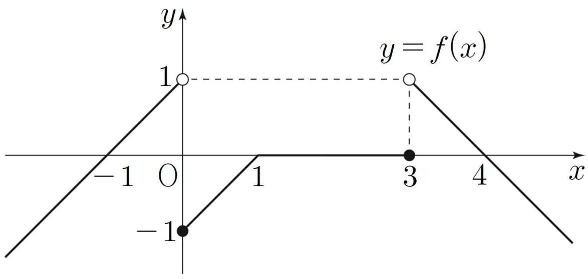
에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.



006 [2019학년도 수능 나형 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
> (나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값을 m이라 하자. $20\times\dfrac{1}{m}$의 값을 구하시오. [4점]

① $\dfrac{5}{13}$ ② $\dfrac{5}{14}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{5}{16}$ ⑤ $\dfrac{5}{17}$

007 [2022학년도 9월 20번]

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

008 [2021학년도 10월 13번 선지 제거]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. (단, a, b, c 는 상수이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $a^2 \le 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

009 [2016학년도 4월 나형 30번 변형]

함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

010 [2021학년도 수능 나형 30번 변형]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(6)$의 값을 구하시오. [4점]

011 [2017학년도 수능 나형 30번 변형]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$ 의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식

$$4f'(x)+12x-18=(f' \circ g)(x)$$

가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

[4점]

012 [2018학년도 9월 나형 29번 변형]

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $60\times f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

013 [2018학년도 수능 나형 29번 변형]

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

014 [2019학년도 9월 나형 30번 변형]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b 이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	30	2	16	3	8	4	8	5	ㄱ, ㄷ
6	52	7	21	8	ㄱ	9	15	10	149
11	9	12	140	13	82	14	87		

해 설

001

[정답] 30

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다. 그러므로

$f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

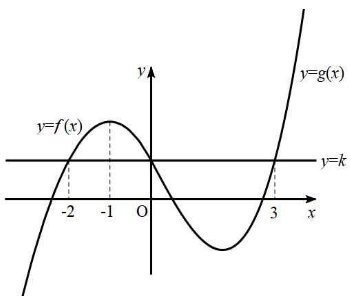
$f(x)=ax(x+2)+k=ax^2+2ax+k(a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x)=px(x-3)(x-q)+k=p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $q=-3$이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고

$f'(x)=2ax+2a$, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $2a=-9p$ ⋯⋯㉠

또, 구간 $[-2, 3]$에서

$h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$f(-1)-g(\sqrt{3})=(-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k)$

$=-a+6\sqrt{3}p=\frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p=\frac{9+12\sqrt{3}}{2}p=3+4\sqrt{3}$

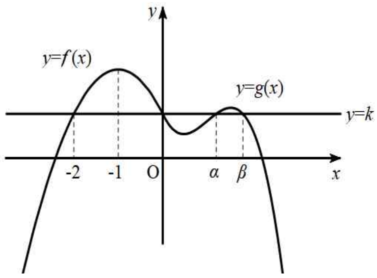
그러므로 $p=\frac{2}{3}$이고 $a=-\frac{9}{2}p=-3$

따라서

$f'(x)=-6x-6$, $g'(x)=2x^2-6$ 이므로

$h'(-4)+h'(3)=f'(-4)+g'(3)=18+12=30$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta=3)$ 로 놓으면

$g(x)=p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k=p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

002

[정답] 16

$\lim_{x\to 2-0} f(x)=5$, $\lim_{x\to 2+0} f(x)=-1$

$-x=t$라 하면

$x\to 2-$일 때, $t\to -2+$

$x\to 2+$일 때, $t\to -2-$이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(-x)=\lim_{t\to -2+0} f(t)=5$ $\lim_{x\to 2+0} f(-x)=\lim_{t\to -2-0} f(t)=7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\lim_{x\to 2-0} f(-x)\{f(x)+k\}=5(5+k)$, $\lim_{x\to 2+0} f(-x)\{f(x)+k\}=7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\}=5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는 $5(5+k)=7(-1+k)$

따라서 $k=16$

003

[정답] 8

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로 $f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서

(분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0

$\lim_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(2x+a+6)=0$

이므로 $a=-12$, $b=18$

$f(x)=2x^2-12x+18$

따라서 $f(1)=8$

004

[정답] 8

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

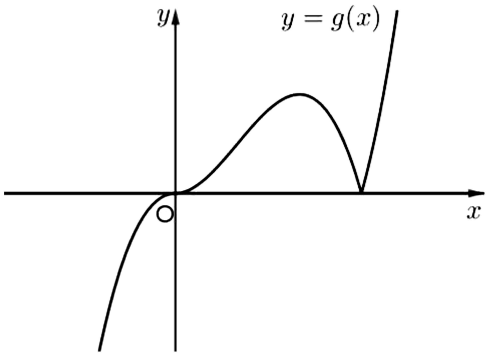
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1$, $q=7$이어야 한다. 따라서

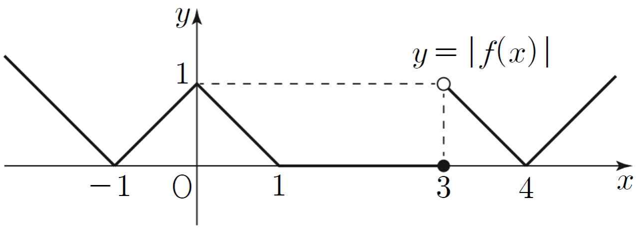
$p+q=1+7=8$



005

[정답] ㄱ, ㄷ

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to0-}f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq f(0)$

$k\neq-3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to 0-} g(x)=-\lim_{x\to 0+} g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

006

[정답] 52

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x)=x(x+3)$

이고 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0,\quad f(0)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

이때,

$$g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$ 에서

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=\frac{3}{b}$$

또, $g(0)=1$ 이므로 $b=3$

이때 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

함수 $g(x)$가 실수전체 집합에서 연속이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다. 그러므로

$D=a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ … ㉠

한편, $f(1)$이 자연수이므로

$f(1)=1\times(1^2+a+3)=a+4$

에서 $a+4$가 자연수이어야 하므로 $a>-4$이고 a는 정수이다.

㉠에서 a의 값은 -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3 이다.

한편 $g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$이고

$a=3$일 때, 이 값은 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

따라서 $20\times\dfrac{1}{m}=20\times\dfrac{13}{5}=52$

007

[정답] 21

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$ 라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\geq -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$$

$$\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를

$$h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$$

라 하면 $g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\geq 0)\end{cases}$이다.

$$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$$

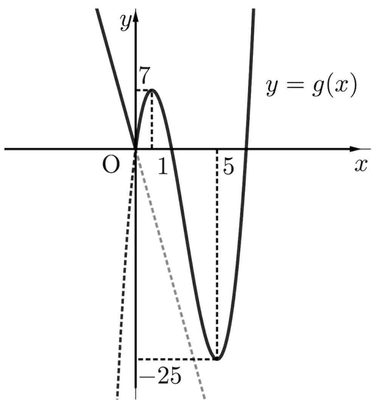
이므로 $h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $h(1)=1-9+15=7$을 갖고,

$x=5$에서 극솟값 $h(5)=125-225+75=-25$

를 갖는다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로

실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $1+2+3+\cdots+6=\frac{6}{2}(1+6)=21$

008

[정답] ㄱ

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$ 의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3b\leq 0$, $a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}=x^3+bx$$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D' 이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq\frac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

009

[정답] 15

주어진 이차함수 $f(x)$는 축의 방정식이 $x=4$이고

(가)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$f(0)=a>0$, $f(2)=a-12<0$ $\quad\therefore\ 0<a<12$

(나)에서

$f(a)g(a)=7a^2(a-7)$,

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-8x+a)(2x+5a)$$
$$=7a^2(a-7),$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-8x+a)f(x+4)$$
$$=(a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$$
$$=a(a-7)(a^2+a-16)$$

이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$

$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$ $\quad\therefore\ a=7$ 또는 $a=8$ $(\because\ 0<a<12)$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 15

010

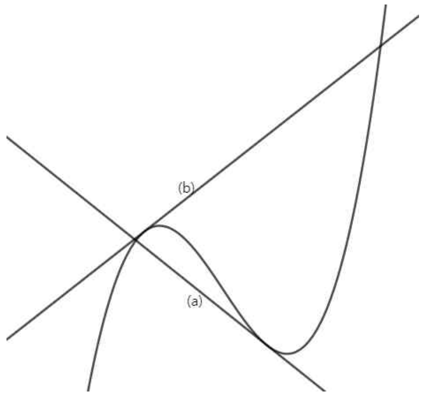
[정답] 149

$h(0)=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 교점을 갖는다.

$h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 접해야 한다.

아래 그림의 (a)처럼 접하면 $h(x)$는 $x<0$에서 미분가능하지 않은 경우가 생기므로 (b)처럼 접해야 한다.

$g(x)=mx+n$이라 하면



$f(x)-g(x)=f(x)-mx-n=x^2(x-k)$으로 놓을 수 있다.

(b)의 경우 $f(x)$와 $g(x)$가 접하는 점을 제외하고 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

(ⅰ) $k<1$이면

$x\to1-$일 때 $h(x)=f(x)-g(x)$

$x\to1+$일 때 $h(x)=f(x)+g(x)$

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이고

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $g'(1)=0$이다.

$g'(1)=0$이면 $g(x)$는 일차함수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $k\geq1$이면

$$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq1) \end{cases}$$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이고 미분가능하므로

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이고

$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $f'(1)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$g'(x)=p$

$f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서

$a=q$, $-2a+1=p$

$h(2)=f(2)+g(2)=2+a+2p+q=5$

이상에서 $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\frac{1}{2}$ 이므로

$h(6)=f(6)+g(6)=149$

011

[정답] 9

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

따라서 $g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(ⅰ) $g(x)-2x=0$일 때, 즉 $g(x)=2x$이면

$f(2x)=x$이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x \quad \cdots$ ㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$라 하면

$h_1'(x)=-24x^2+24x-11<0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-7 \le h_1(x) \le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는 $-7 \le k \le 0$

(ⅱ) $g(x)+2x-2=0$일 때, 즉 $g(x)=-2x+2$이면

$f(-2x+2)=x$이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k=8x^3-12x^2 13x-8 \quad \cdots$ ㉡

따라서, $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8$라 하면

$h_2'(x)=24x^2-24x+13>0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서

$-8 \le h_2(x) \le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는 $-8 \le k \le 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-8 \le k \le 1$이므로

$m=-8,\ M=1$

따라서 $M-m=9$

012

[정답] 140

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양의 실수이므로 삼차함수의 개형을 통해 $(x-3)$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

($g(x)$가 $(x-1)$을 인수로 가질 때, $x=2$에서 극솟값을 갖게 된다.)

$g(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $g(x)=3(x-1)^2(x-3)$이다.

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

$f(x)$를 미분하면 $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$이므로

$f'(0)=\frac{2}{3}(-1)(-2)+\frac{1}{3}(-1)^2=\frac{7}{3}$이다.

그러므로 $60\times f'(0)=140$이다.

013

[정답] 82

함수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{0-0}{x-a}=0$ ······㉠

또, $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$

여기서 $x\to a+$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재해야 하므로

(분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$,

$(a-1)^2(2a+1)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2=\frac{9}{2}$$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

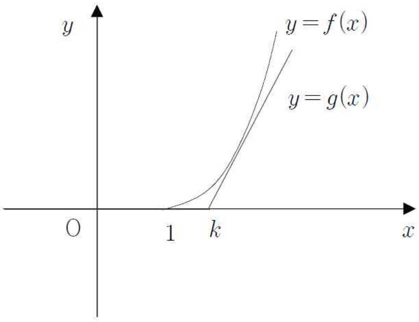
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)=0$$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a=1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이어야하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m,\ f(m))$ $(m>1)$라 하자.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\{(x-1)^2\}'(2x+1)+(x-1)^2(2x+1)'\\&=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2\\&=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}\\&=6x(x-1)\end{aligned}$$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$6m(m-1)=12$

$m^2-m-2=0 \quad \Rightarrow \quad m=-1$ 또는 $m=2$

이때, $m>1$이므로 $m=2$

그러므로 접선의 방정식은

$y-5=12(x-2)$

$y=12x-19$

$y=12\left(x-\frac{19}{12}\right)$

따라서 $k\geq\frac{19}{12}$이므로 k의 최솟값은 $\frac{19}{12}$이다.

그러므로 $a+2p+3q=1+24+57=82$

014

[정답] 87

$(f \circ f)(x) = x$을 만족하기 위해서는

(ⅰ) 모든 x에 대하여 $f(x) = x$이거나

(ⅱ) $f(p) = q$, $f(q) = p$가 되어야 한다.

(ⅰ)의 경우 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$가 되면 $f(x)$는 증가함수가 되어 $f'(1) < 0$, $f'(2) < 0$인 조건에 만족하지 않는다.

(ⅱ)의 경우 $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(0) = 0$와 $f'(0) - f'(1) = 6$을 만족해야 한다.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$라 하면 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx^2 + c$이고

$f(1) = a + b + c + d = 2$ $\cdots$ ①

$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 1$ $\cdots$ ②

$f(0) = d = 0$ $\cdots$ ③

$f'(0) - f'(1) = c - 3a - 2b - c = 6$ $\cdots$ ④

①, ②, ③, ④를 연립하면 $a = 1$, $b = -\frac{9}{2}$, $c = \frac{11}{2}$이므로

$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$을 얻는다.

따라서 $f(6) = 87$이다.