

著 : 雀

[sukita1729@gmail.com](mailto:sukita1729@gmail.com)

1. 적분가능한 함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $\int_0^1 xf(x)dx = 0$

을 만족시킬 때,  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4 \left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2$ 임을

증명하시오. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)

[★★★★☆☆]

2. 적분가능한 함수  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 에 대하여  
다음이 성립함을 증명하시오. [★★★★☆☆]

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 x^3 f(x) dx \right) \geq \left( \int_0^1 xf(x) dx \right) \left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)$$

3. 정의역에서 연속이고 위로볼록이며  $f(x) \geq 0$ 이고  $f(0) = 1$ 인 함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$(1) \int_0^x f(t)dt \geq \frac{1}{2}xf(x) + \frac{1}{2}x$$

$$(2) \int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3} \left[ \int_0^1 f(x)dx \right]^2$$

4. 증가하는 연속함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆]

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 xf(x)dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

5. 적분가능한 함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \text{이고 정의역의 모든 } x \text{에 대하여}$$

$-1 \leq f(x) \leq 1$ 일 때, 다음 식의 값의 최댓값을 구하여라. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)

[★★★★☆]

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx$$

6. 연속함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 식의 최댓값을  $L$ 이라 하자. 식의 값이 최대가 될 때의 함수  $f$ 를  $f_0$ 라 할 때,  $128f(L)$ 의 값을 구하시오. (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.) [★★★★☆☆]

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx - \int_0^1 x [f(x)]^2 dx$$

7. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

$$\int_1^e \frac{3\ln x - 1 + 2x}{x \ln x + x^2 + 2x^4} dx$$

8. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

(단,  $\{x\}$ 는  $x$ 의 소수부이다.)

$$\int_0^{\ln 2} \left\{ \frac{1}{e^x - 1} \right\} dx$$