제 2 교시

2024학년도 *Habanero* 모의고사 제1회 문제지

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

문제 제작에 고민하는 삶의 가치

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

김규민수학연구소

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $a^4=2$일 때, $\dfrac{a^6+a^{-6}}{a^2+a^{-2}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{7}{6}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

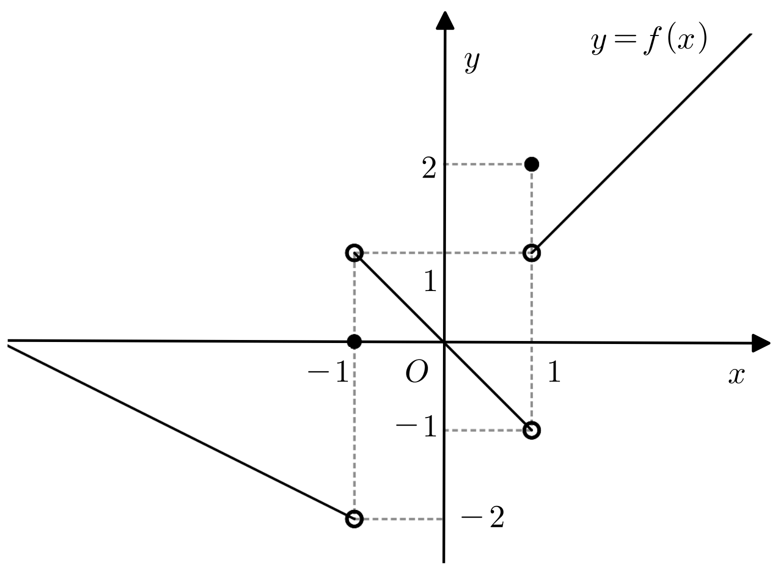
2. 함수 $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [2점]

① 192 ② 194 ③ 196 ④ 198 ⑤ 200

3. 세 수 $a-1$, $b+1$, $3b+1$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 b, $a-1$, $2-b$가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, ab의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to-1-}f(f(x^2))+\lim\limits_{x\to5-}f(f(x-4))$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=2^{x-3}+5$의 그래프와 일치하였다. $f(12)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{13}{6}$일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{17}{13}$ ② $-\dfrac{7}{13}$ ③ $\dfrac{7}{13}$ ④ $\dfrac{17}{13}$ ⑤ $\dfrac{19}{13}$

7. 함수 $y=x^3-2x^2+2x$의 그래프와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{5}{24}$ ⑤ $\dfrac{1}{4}$

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-12}{x^2-9}=3,\ \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-3}{x-1}=9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(g(x))-12}{x^3-1}$의 값은? [3점]

① 51 ② 54 ③ 57 ④ 60 ⑤ 63

9. 함수 $f(x)$가 10 이하의 자연수 a, b에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \leq -1) \\ x^2+8x+b & (x > -1) \end{cases}$$

일 때, 함수 $f(x)f(-2-x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

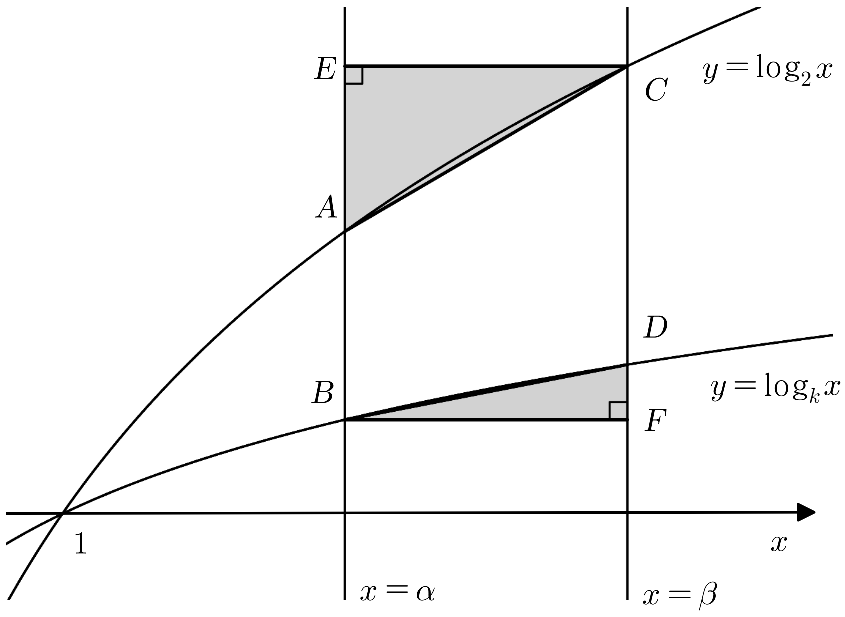
10. 5 이하의 자연수 n에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)}=n$$

을 만족시키는 다항함수 $f(x)$의 차수를 a_n, 극값의 개수를 b_n이라 하자. $a_n+b_n=5$를 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{5}(a_n-b_n)$ 의 최솟값은? [4점]

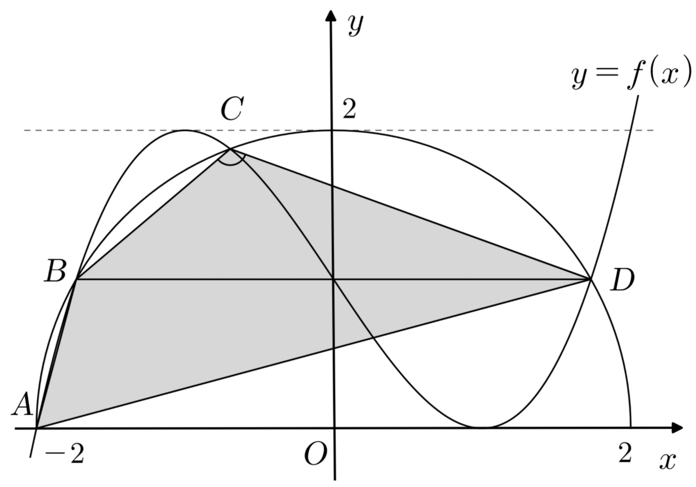
① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

11. 그림과 같이 직선 $x=\alpha$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_k x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=\beta$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_k x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 C에서 직선 $x=\alpha$에 내린 수선의 발을 E, 점 B에서 직선 $x=\beta$에 내린 수선의 발을 F라 할 때, 삼각형 ACE의 넓이는 삼각형 BDF의 넓이의 3배이다. 실수 k의 값은? (단, $\beta>\alpha$이다) [4점]



① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

12. 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 반원이 네 점 A, B, C, D에서 만난다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\angle BCD=120^\circ$

ㄴ. $30^\circ<\angle BOC<60^\circ$

ㄷ. $3<$(사각형 $ABCD$의 넓이)$<2\sqrt{3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. $a_1 \neq 0$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_n = \sin(pn+q)$ (p와 q는 양의 실수)
(나) $S_{n+1} = a_n$

$0 < p+q < 6\pi$일 때, p의 최댓값은? [4점]

① $\frac{25}{6}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ $\frac{16}{3}\pi$ ⑤ $\frac{17}{3}\pi$

14. $x \geq 0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=0,\ 1,\ \alpha,\ 2$ $(1 < \alpha < 2)$에서만 극값을 가진다. 함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [4점]

(가) $f(1)-f(0) = 2\{f(2)-f(1)\}$
(나) $\int_0^1 \lvert f'(x)\rvert dx$, $\int_0^2 \lvert f'(x)\rvert dx$, $\int_0^3 \lvert f'(x)\rvert dx$의 값이 차례대로 첫째항과 공차가 모두 d인 등차수열이다.
(다) $\lvert f(0)+f(3)-2f(\alpha)\rvert = \frac{1}{8}kd$

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

15. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1}-3 & (a_n=2k-1) \\ \dfrac{a_na_{n+1}}{2} & (a_n=2k) \end{cases} \quad (k\text{는 정수})$$

이다. $a_3=1$, $a_2-a_6=3$일 때, a_1의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

단답형

16. 1보다 큰 실수 m에 대하여 세 수

$$\log_8 m,\ \log_m 8,\ (\log_m 8)^2+6\log_m 8$$

가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, m의 값을 구하시오. [3점]

17. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3-x^2+6x}{x-1}dx+\int_3^2 \frac{2x^2+3x+1}{x-1}dx=\frac{q}{p}$ 일 때,

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

18. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - 3t$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=\frac{9}{2}$까지 움직인 거리를 구하시오. [3점]

19. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $|\sin \pi x| = k$의 양의 실근을 작은 것부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, a_2, a_3, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $33a_7$의 값을 구하시오. (단, $0 < k < 1$이다.) [3점]

20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = \frac{3}{2},\ a_n = \begin{cases} n+4 & (f(n) \geq 0) \\ \frac{n^2}{4} & (f(n) < 0) \end{cases} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

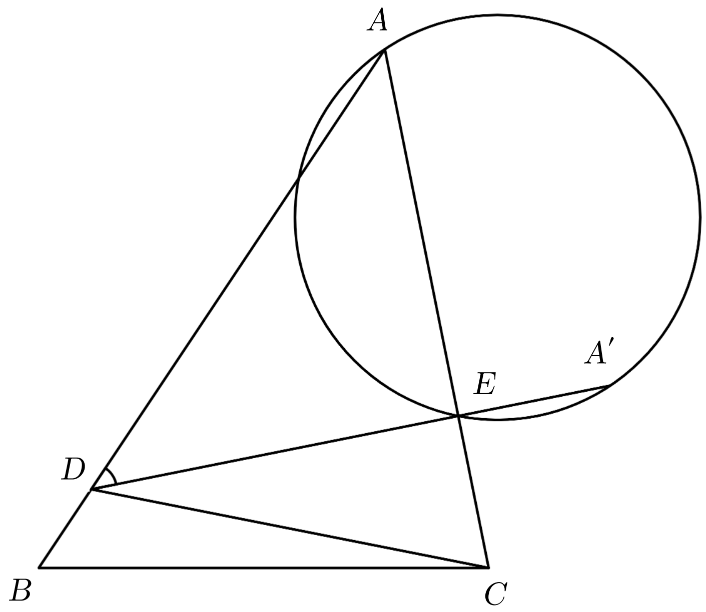
을 만족시킨다. 함수 $f(x)$와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $4\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > n$이다.

(나) $\int_n^{a_n} |f(x)|dx = \left| \int_n^{a_n} f(x)dx \right|$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 9이다.

21. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}=\overline{AC}$를 만족하도록 변 AB 위에 잡은 점 D에 대하여 점 A를 점 D를 중심으로 시계 방향으로 45° 만큼 회전한 점을 A'이라 하고, 선분 $A'D$가 변 AC와 만나는 점을 E라 하자. 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. $32k$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 점 E에서 세 점 A, A', E를 지나는 원에 그은 접선이 선분 CD와 평행하다. (나) $\overline{AB}\times\overline{AC}=2+\sqrt{2}$이고, $\overline{BC}$: $\overline{BD}=\sqrt{17}$: 1이다.



22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 네 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $g(x,y)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 도형 $g(x-t,y)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. t에 대한 함수 $h(t)$가 불연속인 모든 t값을 작은 것부터 순서대로 a_1, a_2, $\cdots$, a_6이라 하면 함수 $f(x)$와 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a_3)=f(a_6)$ (나) 함수 $h(t)$의 최댓값이 4이다. (다) $\lim\limits_{t\to a}\lvert h(t)-h(a)\rvert=1$을 만족시키는 실수 a값이 a_1, a_5뿐이다.

$a_3=0$, $a_5=\dfrac{4}{9}$, $a_6=1$일 때, $f(a_5)+f'(a_5)=\dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{4n^2+4n+2}-\sqrt{n^2+2}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 함수 $(x^2-6x+k)e^x$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

25. 반지름의 길이가 1인 원 위에 한 점 P와 이 점에서 원에 접하는 직선 l이 있다. 점 P를 지나는 현이 직선 l과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi k}{2n}$(단, $k=1, 2, 3, \cdots, 2n-1$)일 때, 현의 길이를 r_k라고 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}{r_k}^2$의 값은? [3점]

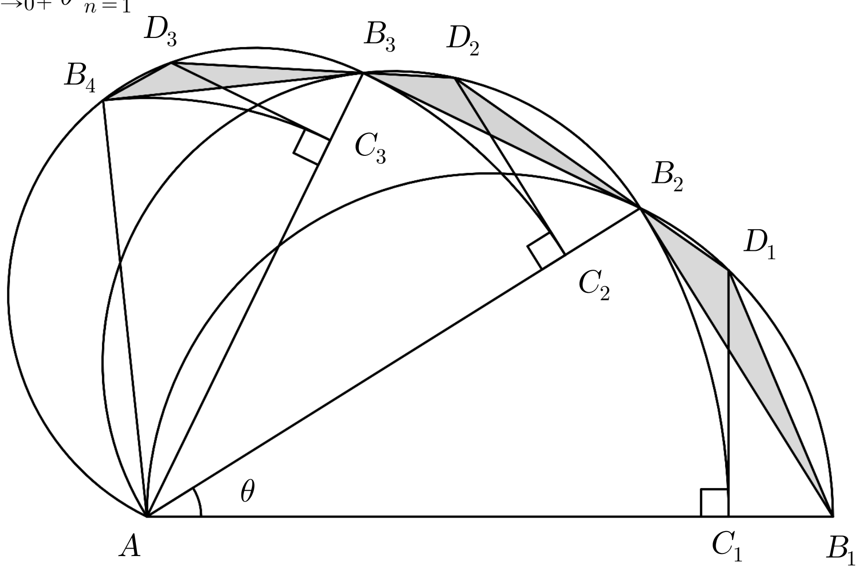
① 1 ② $2-\frac{1}{\pi}$ ③ $2-\frac{1}{2\pi}$ ④ 2 ⑤ $2+\frac{1}{2\pi}$

26. xy평면에 곡선 $y=\frac{1}{x}\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형이 있다. 이 도형을 밑변으로 하는 입체를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체의 부피는? [3점]

① $\frac{\pi}{8e}(2e-5)$ ② $\frac{\pi}{16e}(2e-3)$ ③ $\frac{\pi}{8e}(e-2)$
④ $\frac{\pi}{16e}(5e-12)$ ⑤ $\frac{\pi}{4e}(2e-5)$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB_1 위의 점 B_2에 대하여 중심각이 $\angle B_2AB_1 = \theta$이고 반지름의 길이가 선분 AB_2인 부채꼴 AB_2C_1의 호 B_2C_1를 만든다. 점 C_1에서 호 B_2C_1에 그은 접선이 주어진 반원과 만나는 점을 D_1이라 할 때, 삼각형 $B_2B_1D_1$의 넓이를 $S_1(\theta)$라 하자.
선분 AB_2를 지름으로 하는 반원에서 호 AB_2 위의 점 B_3에 대하여 중심각이 $\angle B_3AB_2 = \theta$이고, 반지름의 길이가 선분 AB_3인 부채꼴 AB_3C_2의 호 B_3C_2를 만든다. 점 C_2에서 호 B_3C_2에 그은 접선이 주어진 반원과 만나는 점을 D_2라 할 때, 삼각형 $B_3B_2D_2$의 넓이를 $S_2(\theta)$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 도형을 $S_n(\theta)$라 할 때,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n(\theta)$의 값은? [3점]



① $\sqrt{2}-1$　② $\sqrt{3}-1$　③ $2\sqrt{2}-2$
④ $2\sqrt{3}-2$　⑤ $2\sqrt{2}-1$

28. 꼭짓점의 y좌표가 t인 이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\dfrac{1}{f(x)}$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자.
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보　기>

ㄱ. $g(0)=2$
ㄴ. $\left\{t \,\middle|\, \lim\limits_{h\to0+}\{g(t+h)-g(t-h)\}^2=4\right\}=\{-1,\,1\}$
ㄷ. 실수 t에 대하여 $f(p)-g(p)=t$를 만족시키는 실수 p의 개수가 5일 때, $f'(0)=-1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

29. 최고차항의 계수가 p $(p>0)$이고, $x=k$에서 극솟값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $-3 \le \log p < -2$를 만족하도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=2f(0)$ $(f(0) \neq 0)$ 이 성립한다.
(나) 합성함수 $f(f(x))$가 극값을 가지는 모든 x값이 등차수열을 이룬다.

30. 점 $(0, 1)$을 지나는 이차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가진다. 양의 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하고,

$$h(t)=\lim_{x\to 0}\{f(x)\}^{\frac{t}{x}}$$

라 하자. 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

점 $(\frac{\alpha+\beta}{2}, 0)$을 지나는 일차함수 $i(t)$에 대하여 함수 $\{g(t)-i(t)\}\{h(t)-i(t)\}$는 $t=\frac{1}{e}$에서 최댓값 0을 가진다.

* 확인 사항
○ 문제 제작에 도움을 주신 화성고등학교 선생님(**진성빈, 김성빈**)과 화성고등학교 학생들(**이창준, 조원태, 소은우, 봉현수, 강승우**), 기흥고등학교 학생(**김경민**)께 감사드립니다.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.