SEOL:NAME THE SIGNATURE

설레임 N

# 테마별 **기출** 분석집

## STORY 3. 수열은 함수, 근본은 나열

설레임 모의고사
Team SeolName

# 03 수열은 함수, 근본은 나열

수열은 함수다! 그렇지만 근본적으로 나열로 풀린다!

STYLE 01

## 수열도 익숙한 다항함수로

수열이 자연수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 함수라는 사실은
이미 어느 정도 알려져 있는 사실이고 많이들 쓰고 있을 거야.
즉, 등차수열이 일차함수고, 그 합은 이차함수가 된다는 의미이지.
우리가 [수학II] 하면서 익숙해진 다항함수, [수학I]에서도 쓰면 참 편하지 않을까?

[ 2022학년도 10월 전국연합학력평가 15번 ]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. 두 자연수 $p$, $q$에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, $S_n$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 $p$의 최솟값을 $p_1$이라 하자.

> 임의의 두 자연수 $i$, $j$에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 $k$의 개수가 3이 되도록 하는 모든 $q$의 값의 합은? [4점]

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

## 우리만의 실전 풀이

### THINKING!

문제 풀이 스킬에 대한 무지의 베일을 쓰고 문제를 바라보면 그냥 어쩌자는 건지 싶을 것이다.
$p$의 최솟값도 구해야 하고, 그때의 $|a_k| < a_1$인 $k$의 개수도 조절해야 되는데
뭘 어떻게 해야 할지 감도 잘 안 잡힌다.
그럴 때 바라봐야 할 관점이 바로바로 수열이 함수라는 것!
특히나 박스의 조건을 보면 그럴 것이다.
비록 요새 수열이 귀납적으로 정의되는 것이 많이 나오지만, 혹여나 등차가 나오면 날먹할 수 있도록 출발해보자!

**STEP 1 수열로만 생각말기**

계속 강조하는 관점은 "수열 = 함수"라는 것이다.
엄밀히 말하면 수열이 함수의 일부가 되는 거지만, 이런 구분 솔직히 우리가 신경써야 할까?
어찌 되었건 간에, 우리는 이제 조건을 해석해보자!

**임의의 두 자연수 $i$, $j$에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.**

[수학 (하)]를 열심히 한 친구들이라면 뭔가 익숙한 문장이어야 한다.
[함수] 단원에서 배우는 어떤 함수의 부류 중 하나이기 때문이지!
저 정의는 긴가민가 하신 친구들을 위해 다른 표현을 가져와본다면

**임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.**

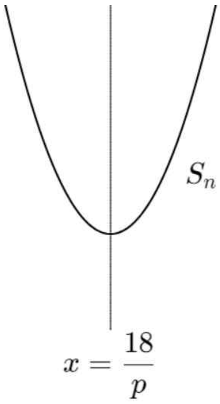
이제 알 것 같아?
$S_n$이라는, 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수가, 일대일함수가 된다는 사실을 말이지!
일대일함수가 1학년 때에는 크게 어려운 조건이 아니었을 거야.
그래프를 그냥 스윽 그어보면 바로 감이 잡히는 경우가 대다수였을 테니까!
그런데 자연수라고 다를까?
뭔가 찝찝하지만, 일단 그런가 보다 하고 시작해볼까?

**STEP 2 등차는 일차, 등차합은 이차!**

사실 등차수열을 일차함수로 생각할 수 있다는 것보다도,
등차수열의 합을 이차함수로 생각할 수 있는 것이 더 중요한 포인트이다.
더군다나 이 문항에서는 $q \neq 0$이기에 수열의 합의 상수항이 $0$이 아닐 가능성이 높은 상황이라
첫째항을 포함하면 $\{a_n\}$이 등차수열조차 아니니까! … (부록 참조)
각설하고, 수열의 합은 이차식이니 당연히 대칭축 조사하려면 완전제곱식을 만들어봐야 할 것이다.

$S_n = pn^2 - 36n + q = p\left(n - \frac{18}{p}\right)^2 + C$ 이니 실수에서 정의된 함수였다면

그래프는 직선 $x = \frac{18}{p}$ 을 기준으로 대칭인 다음과 같은 개형이 그려진다.




우리가 지금은 '그냥 그런가 보다'하고 푸니까, 저 대칭축도 당연히 자연수여서
$S_n$이 일대일함수가 되기 위해서는 축이 $1$이거나 그보다 왼쪽이면 된다.

즉, $\frac{18}{p} \le 1$이면 $p_1 = 18$일 것이다.

와! $p_1$이 이렇게 쉽게 구해지다니 말이 안 될 것이다.

일단 $p$의 최솟값이라는 것은 뭔가 값이 여러 개 존재해서 그 중에 최소가 되는 애가 있는건데,
찝찝한 발상에서는 그런 애가 유일했기 때문이다

여기에서 **자연수와 실수의 차이**가 발생한다.
실수는 쭉 이어져있으니까, 즉 연속적이니까 이런 발상이 당연하게 이어지는 것이 맞지만,
자연수는 끊어져있으니까, 즉 불연속적이니까 이런 발상으로 이어지면 위험한 것이다.

이제 문제의식을 가졌으니 일대일함수가 되기 위한 조건을 새로 떠올려봐야 할 것이다.
우선 새 조건을 세팅하기 위해서 어디서 문제가 되는지,
즉, **대칭이 문제가 되는 원인**이 무엇인지 찾아보자!

$i \ne j$이면 $S_i \ne S_j$이니까 $i$랑 $j$가 애초에 대칭축에 대해 선대칭이면 안 될 것이다.

즉 $\frac{i+j}{2}$가 대칭축이 되면 안 되니까, $\frac{18}{p} \ne \frac{(\text{자연수})}{2}$ 여야 한다.

$p$의 최솟값을 구하려 하면 얼마 안 되니까 $1$부터 차례대로 넣어봐도 되고,

정수가 되는 $p$랑 $2^{(\text{자연수})+1} \times 3^2$ 꼴로 나타나는 $p$를 모두 거르고 최솟값을 찾아도 되는데,

전자가 아무래도 편하겠지? 넣어보면 $p_1 = 5$인 것을 알 수 있다.

### STEP 3 또 너야 절댓값?

이제 마지막으로 해야 할 작업은 $|a_k| < a_1$을 잘 개조하는 것 뿐이다.

그런데 STEP 2에서 우리는 $S_n$이 대칭축에 대하여 선대칭이 되지 않도록, 즉, **비대칭**이 되도록 했기 때문에,

최솟값 네 개만 찾아서 $a_1$이 **세 번째보다 크고 네 번째보다 작거나 같게**만 해주면 된다.

우선 $k \neq 1$이니까, $n \geq 2$에 대해 $a_n = 10n - 41$, $a_1 = q - 31$이라는 사실을 얻어내면

$|10k - 41| < q - 31$인 $k$가 세 개인 $q$를 찾아야 된다는 것으로 바로 이어질 수 있을 것이다.

최솟값을 구하면 모두 $4$ 주변에서 얻어지고, 순서대로 $1$, $9$, $11$, $19$니까 $11 < q - 31 \leq 19$

즉, $42 < q \leq 50$이 되는 것이다!

따라서 등차수열의 합으로 $q$의 합을 구하면 $372$가 답이 된다.

그래도 이 문제는 이차함수를 가볍게 쓰는 문제라서 그렇게 어렵지는 않았을 거 같아.

등차수열이면 몰라도 등차수열의 합은 이차식이라는 것을 기억두자!

더불어 이차함수의 중요한 특징인 대칭성도!

### STYLE 1 부록 - 아오 상수시치!

등차수열이 일차식이니까, 등차수열의 합이 이차식이 되는 건

시그마 전개만 할 줄 알면 금방 인지되는 개념이다.

[질문] 그런데 수열의 합이 이차식이면 항상 등차수열일까? (물론 결론을 아는 친구들이 많겠지?)

예를 들어, $S_n = an^2 + bn + c \ (a \neq 0)$을 가지고 생각해보자.

$S_n$은 자연수 전체의 집합을 정의역으로 한다는 점을 생각하면,

일반항을 $a_n = S_n - S_{n-1}$을 이용해 구하는 것은 $n \geq 2$일 때만 통용된다는 것을 알 수 있다.

그러니 우선 $n \geq 2$일 때에 일반항을 구해보면 $a_n = 2an + b - a$이고, $a_1 = a + b + c$이다.

$a_n$이 완전한 등차수열이 되기 위해서는 $2a \times 1 + b - a = a + b$가 $a + b + c$와 같아야 하므로

$c = 0$이어야 완전한 등차수열이 된다.

$c \neq 0$일 때에는 첫째항을 빼고 등차수열이 된다.

STYLE 02

## 찐 알고리즘으로 돌리는 수열

귀납적으로 정의된 수열은 대체로

$a_{n+1}$을 $a_n$에 대한 혹은 $a_n$과 $a_{n-1}$에 대한 식으로 나타내는 경우가 많지만,

각 항이 결정되지 않아 경우의 수를 나눠야 하는 상황이 발생하곤 한다.

그러한 이유에 종종 $a_{2n}$이나 $a_{2n+1}$을 $a_n$에 대해 나타내기도 한다.

이런 경우에 우리는 트리구조를 사용할 수 있다.

**[ 2022학년도 수능 예비시행 15번 ]**

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

## 우리만의 실전 풀이

### THINKING!

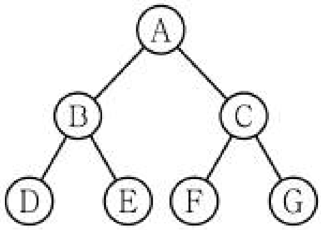
알고리즘은 '어떤 문제를 해결하기 위한 일련의 논리적인 절차'로 정의된다.
컴퓨터과학에서 많이 쓰는 용어이지만, 친구들도 사실 익숙할 것이다.
사실 엄밀히 따지자면, 트리는 자료구조에 해당되지만 거기서 거기기도 하고 업계 사람도 아니니까
사소한 차이는 역시 넘어가자ㅎㅎ...
하여간 알고리즘이 수열 파트에서 쓰기 편한데, 그 중 하나가 바로 트리라는 아이인거지.
수열의 각 항을 나열하더라도 어떻게 나열하는지에 따라 풀이의 편한 정도가 달라지겠지?
트리는 그런 **나열하는 법 중 하나**로 소개해줄 것이다.

### STEP 1 트리 그리기

일단 트리를 뭔지 알아야 그리겠지? 트리는 순환 구조가 없는 선으로 연결된 구조를 말한다.
아래 그림처럼 일종의 수형도 개념으로 생각하면 좋을 것이다.

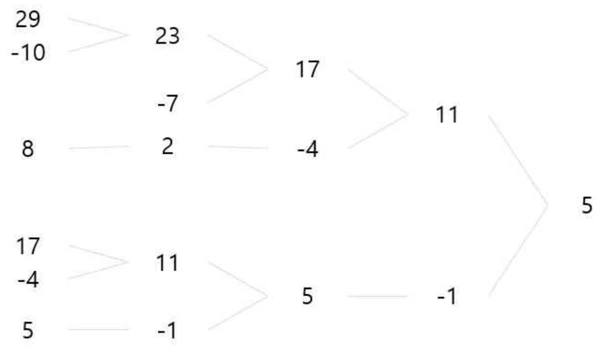
트리는 점들로 구성되어 있고, 어떤 애를 맨 꼭대기로 해서 각 점의 위아래로 점들이 연결되어 있다.
이때, 위쪽으로 연결된 점을 부모, 아래쪽으로 연결된 점을 흔히 자식이라고 한다.

그러한 트리 중에서도 이진트리라는 애가 있다!
모든 점들의 자식이 항상 둘 이하이면 이진트리가 되는데,
다음은 자식이 있는 점이 모두 두 개의 자식을 갖는 완전이진트리의 예이다.




뭔가 어렵게 주절주절 써놓은 것 같지만, 우리 수형도 그릴 줄 알지? 그 느낌으로 그리면 된다.
다만 완전이진트리라는 것은 **경우의 수가 항상 둘로 분기되는 수형도**인 것 뿐이다!

여하튼 문제로 다시 돌아와서, 맨 위의 점, 즉, 꼭대기 역할을 할 친구를 먼저 설정해야 한다!
$a_5$의 값이 나와 있으니 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_{n+4}$의 값은 정해져있다!
그럼 우리는 $a_1$부터 $a_4$까지의 값만 구해보면 될 것이다.
$a_{n+1}=a_n-6$에 따른 항들을 위에, $a_{n+1}=-2a_n+3$에 따른 항들을 아래에 배치해 다음과 같은 트리를 그릴 수 있을 것이다.




실전에서 그릴 시간 없으니 편의상 정점에 동그라미를 씌우는 거는 패스한 간단한 그림이다.

그럼 이제 $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 최솟값과 최댓값을 구하면 되는데, 가능한 값이 위에서부터 순서대로

$80$, $41$, $17$, $32$, $11$, $8$이므로, $\sum_{k=5}^{100} a_k = \alpha$라 하면 $M - m = (80+\alpha) - (8+\alpha) = 72$가 될 것이다.

STYLE 02에서는 **수열을 나열하는 하나의 방법으로써 트리**를 익혔으면 충분하다.
굳이 하나 더 챙겨보자면 문제에 확인하지 않은 조건이 있는지 보는건데, 이건 고질적인 문제이기도 해서
한마디 말로만 하기에는 조금 무리가 있지?
간단하게만 설명하자면 문제 해결이 안 된 상태에서 어떤 미지수에 대한 정보가 하나 더 필요하거나,
아니면 몇 가지 케이스가 나와있는데 그 중 하나만을 골라야 하는 상황이 생기면,
그 경우는 거의 100% 문제의 조건을 전부 활용하지 못해서 생기는 문제이다.
**문제가 잘못 되기를 의심하기보다는 가급적 발견을 못한 자신을 의심하도록 하자.**

우리가 문제를 못 풀 때 그것이 문제의 조건을 다 활용하지 못한 것인지,
아니면 잘못된 방법으로 활용한 것인지는 구분할 줄 알아야 한다.
당연히 이를 판단하는 것은 스스로가 할 수 있어야 한다.
정보가 부족해서 못 푸는 것인지, 아니면 그냥 답과 모순되는 결과가 나오는 것인지. 그 차이이다.
이를 스스로 판단하여 실전에서의 행동책을 세울 수 있도록 노력하자.

그리고 지금이야 이진트리를 그렸지만, 사실 $\mathrm{N}$진트리 $(\mathrm{N} \geq 3)$도 얼마든지 가능하다.
이 칼럼을 보시는 여러분들이라면 충분히 해낼 수 있으리라 믿는다.

STYLE 03

## 수열은 함수, 그런데 n과 상관없는.

수열이 함수라는 건 STYLE 01에서도 이야기했다.

그런데 고작 등차수열만 얘기하면 뭔가 식상하고 '어... 그런가?'싶은 애매한 기분 들지 않는가?

그래서 이번에는 수열이 함수가 되는 또다른 방법을 볼 것이다.

제목에서도 알 수 있듯이 이번에는 **$a_n$ 을 $n$ 에 대한 함수로 보는 대신, $a_{n+1}$ 을 $a_n$ 에 대한 함수**로 보자!

[ 2022학년도 9월 모의평가 15번 ]

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고, $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $5$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $6$ ⑤ $\frac{13}{2}$

## 우리만의 실전 풀이

### THINKING!

귀납적으로 정의된 수열은 요즘 들어 15번에 자꾸만 등단하는 녀석이다.

기본적으로는 나열해서 규칙이 보이는 쪽이 편하지만,

얘는 2가 자꾸 등장하는 것만 봐도 뭔가 다르다는 느낌이 든다.

어짜피 이런 문제 풀려면 한 항의 값 정도는 알아야 하니 이렇게 해보면 어떨까?

**STEP 1 수열은 함수요, $a_{n+1}$이 $a_n$에 대한 함수요.**

제목에 벌써 다 스포가 되어있지? 함수가 뭔지 다시 생각해보면 당연히 말이 된다.

**$X$의 각 원소에 $Y$의 원소가 오직 하나씩 대응하면 $X$에서 $Y$로의 함수이다.**

범위를 보니 $a_n$이 정해지면 $a_{n+1}$이 유일하게 결정된다.

그래서 $a_{n+1}$은 $a_n$에 대한 함수로 생각할 수 있는 것이다.

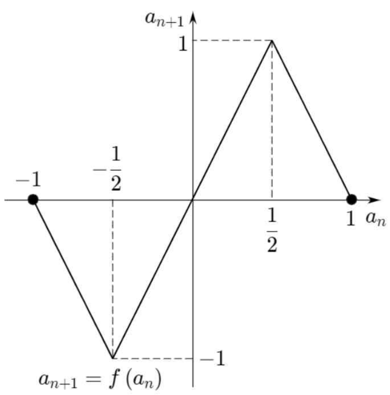
마찬가지로 $a_{n+2}$가 $a_n$과 $a_{n+1}$에 대해 나타내어지면 이 역시도 함수는 함수인데,

다만 이때에는 변수가 여러 개인 함수가 되니까 조금 곤란하겠지?

어찌되었건 우리는 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 대응 관계를 알고 있으니, $a_n$축과 $a_{n+1}$축을 그리고

$a_{n+1}=f(a_n)$의 그래프를 그려보도록 하자!

$x$축 대신 $a_n$축을, $y$축 대신 $a_{n+1}$축을 생각하면 된다.




이제 조건을 해석해보면, $a_5+a_6=0$은 $a_5=a_6=0$을 의미한다는 사실을 알 수 있다.

$a_5+a_6=0$이면 $a_5=-a_6$인데, 위의 그래프에서 $a_5=-a_6$이 되는 지점은 점 $(0,\ 0)$이 유일하기 때문이다.

$a_5=0$을 구했다면 이제부터가 관건이 되겠다.

과연 나머지 조건은 어떻게 받아들이면 될까?

조건 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$을 해석해야 하는데,

<u>주어진 값을 0과 비교를 하고 있으니 부호를 중심적으로 판단해야 한다.</u>

이 그래프를 가만 보면, $a_n \geq 0$이면 $a_{n+1} \geq 0$이고, $a_n \leq 0$이면 $a_{n+1} \leq 0$이라는 사실을 관찰할 수 있다. 이제 끝.

$\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$라는 조건이 $a_1 > 0$라는 것과 같은 말이 되기 때문이다.

더불어서 $a_2$도 $a_3$도 $a_4$도 $0$ 내지는 양수가 된다는 것까지 얻는다.

## STEP 3 N개로 나뉘는건 트리로 나열하자!

흔히 역추적이라 불리는 방법을 이용해 $a_1$을 추적해나가자.

$a_{n+1} = 0$이려면 $a_n = 0$ 또는 $a_n = 1$이어야 한다.

$a_{n+1} = 1$이려면 $a_n = \frac{1}{2}$여야 한다.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}$이려면 $a_n = \frac{1}{4}$ 또는 $a_n = \frac{3}{4}$여야 한다.

이런 식으로 나아가면 다음과 같은 트리를 그려볼 수 있겠다.

(트리는 위쪽에서 아래쪽으로만 쓸 필요가 없다. 아래처럼 오른쪽부터 써도 구분만 된다면 전혀 상관없다.)

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1 | | | |
| 1/4 | 1/2 | 1 | | |
| 3/4 | | | | |
| 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | |
| 7/8 | | | | |
| 3/8 | 3/4 | | | |
| 5/8 | | | | |

왼쪽에서부터 순서대로 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$이고, $a_1$ 쪽은 구분을 위해 미세한 선이 그어져 있다.

이제 모든 $a_1$의 값의 합을 구해야 하는데,

가만 보면 분모가 $8$이고 분자가 $1$부터 $8$까지인 분수들이 다 되는 걸 알 수 있다.

따라서 $\frac{36}{8} = \frac{9}{2}$가 답이겠다!

수열을 함수로써 생각하는 또다른 관점을 소개시켜주었다.

**함수의 정의**를 제대로 이해하고 있다면, 그 어디에서도 **함수를 찾아** 써먹을 수 있다.

함수가 되는 순간, **그래프를 통해 한눈에 볼 수 있는 시각화**가 가능해진다는 이점이 있으니

이런 시각도 가져보는게 어떨까?

STYLE 04

## 주기 하나, 주기 둘, 주기 셋

나열도 나열이지만 수열에 따라서는 주기성을 가지는 경우도 많다.
수열의 주기성, 어떻게 판단해야 할까? 단순히 노가다만이 답일까?
그렇다면 평가원이 15번 같은 객관식 최고난도 문제에 노가다 문제 출제를 장려하고 있다는 말일까?
모든 문제에는 출제 의도가 있기 마련이다. 주기성 문제는 그 의도 파악이 중요하다.

[ 2023학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 15번 ]

수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 $k$에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.

(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$ 이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 $m$의 개수를 $p$라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

# 우리만의 실전 풀이

## THINKING!

일정 간격으로 특정한 규칙이 반복되는 수열은 그 규칙을 파악하는 것이 중요하다.
특히 아무런 정보 없이 그냥 띡 하고 귀납적 정보만 툭 던져놓거나, 수열의 각 항의 부호 변화가 잦을 때도 리셋 형태의 주기성이 자주 나타나기 때문에 항상 경계해야 한다. … (부록 참조)
한편, 이 문제를 보자마자 주기성이 있는 수열임을 파악했다면 그 규칙의 실체를 파악해야 한다.
규칙의 실체라 함은 '주기', '주기를 이루는 각 항의 정보', '주기마다 유지/변화하는 특징' 등이 될 것이다.
이러한 정보를 바탕으로 위에서 한 트리, 함수 그리기, 나열 등의 방법을 활용하면 어지간해서 다 풀린다.

### STEP 1 시작은 항상 하던 방법으로

트리는 항상 애용하도록 하자. 물론 이 문제는 숫자가 없이 (가) 조건이 문자로 되어 있어서 당혹스러울 수는 있다. 하지만, 그렇다고 트리를 못 만드는 건 아니지 않겠는가?
트리를 전부 그릴 수는 없으니 시작점을 $a_{4k}=r^k$으로 하여 $a_{4k+4}=r^{k+1}$까지 그려보자.
적어도 이 두 개의 항은 $r$만 정해지면 확실하게 정해지는 값이니
모든 자연수 $k$에 대하여 $a_{4k}=r^k$일 때, $a_{4k+4}=r^{k+1}$이 되도록 잘 만들어주면 된다.

<table>
<tr><th>$a_{4k}$</th><th>$a_{4k+1}$</th><th>$a_{4k+2}$</th><th>$a_{4k+3}$</th><th>$a_{4k+4}$</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$r^k$</td><td rowspan="4">$r^k+3$</td><td rowspan="2">$r^k+6$</td><td>$r^k+9$</td><td>(B) 미충족</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{2}r^k-3$</td><td>$-\frac{1}{2}r^k$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$-\frac{1}{2}r^k-\frac{3}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}r^k+\frac{3}{2}$</td><td rowspan="5">(B) 미충족</td></tr>
<tr><td>(A) 미충족</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$-\frac{1}{2}r^k$</td><td rowspan="2">$-\frac{1}{2}r^k+3$</td><td>$-\frac{1}{2}r^k+6$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}r^k-\frac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{4}r^k$</td><td>$\frac{1}{4}r^k+3$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{8}r^k$</td><td>(A) 미충족</td></tr>
</table>

위에서 조건을 미충족하는 경우 중
(A)는 주어진 조건을 만족하는 $r^k$가 존재하지 않는 경우,
(B)는 주어진 항이 $r^{k+1}$ 꼴의 형태로 만들 수 없는 경우, 즉, $k$에 대한 항등식이 아닌 경우에 해당한다.
위의 상황에서 $a_{4k+4}=r^{k+1}$의 형태 되는 경우는 딱 하나만 된다는 것을 알 수 있다.

이러한 생각을 하게 된 원리는 다음과 같다.
어떻게든 이 문제를 풀만한 방법을 찾아야 하는데 $a_{4k}$와 $a_{4k+4}$ 정도면 단순한 나열로도 충분히 풀어볼 수 있을 것이라 생각해서 위와 같이 트리 그리기를 시도한 것이다.
그래서 위와 같이 나열을 하다 보니 되는 케이스가 하나밖에 없음을 깨달은 것이다.
자, 위의 상황에서 $-\frac{1}{2}r^k = r^{k+1}$이므로 $r=-\frac{1}{2}$임은 당연하게 얻는다.

## STEP 2 자신감을 가지라, 거의 다 왔다

중요한 조건을 해석했으면 나머지는 쉽게 풀리기 마련.
문제에서 구하는 것은 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 $m$의 개수 $p$와 $a_1$의 값이다.

우선 $a_1$ 먼저 구해보자. 수열 전체를 정복해야 $p$도 구할 수 있을테니 말이다.

우리는 앞선 일련의 과정에서 $k \geq 1$일 때

$$a_{4k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k,\quad a_{4k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 3,\quad a_{4k+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 6,\quad a_{4k+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 3,\quad a_{4k+4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

임을 얻었다. 근데, 여기에 $k=0$을 넣을 수는 없으니 $a_1$을 구하려면 $a_4$부터 역추적을 해야 한다.

뭐, 마찬가지로 트리를 그려보자.

| $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{2}$ | $7$ | $4$ |
| | | | $-14$ |

주어진 조건에 따라 트리를 그려보면서 골라내면 $a_1 = -14$임을 얻는다. $(\because\ a_1 < 0)$

이제 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 $m$의 개수를 구하면 된다.

상식적으로 위의 식들 중에서

$$|a_{4k}|,\ |a_{4k+1}|,\ |a_{4k+3}|,\ |a_{4k+4}|$$

는 5보다 항상 작을 것이다. 그럼 $a_{4k+2}$의 꼴만이 해당 조건을 만족시킨다는 것인데,

100 이하의 자연수 중 $4k+2$ 꼴로 나타낼 수 있는 자연수의 개수는 $6, \cdots, 98$까지 24개다. ($k$는 자연수)

그래서 $p=24$인가? 아니다. $a_1$부터 $a_3$까지도 한 번 체크해주어야 한다.

조건 (가)에 의한 주기성이 반복되는 지점은 $a_4$부터이지, $a_1$부터 $a_3$까지는 주기성과 관련 없는 부분이기 때문이다.

실제로 $|a_1|$, $|a_2| \geq 5$이므로 $p = 24+2 = 26$이 되는 것이고, $p + a_1 = 26 + (-14) = 12$이다.

## STYLE 4 부록 - 규칙 찾기란, 땅바닥에서 10원 줍기

사실 규칙을 찾아라 찾아라 말은 많이 하지만, 막상 찾으라고 하면 찾기 힘들어하는 학생들이 많다.
하지만 평가원이 귀납적 정의와 관련하여 낼 수 있는 규칙은 생각보다 몇 가지가 없다.
크게 $2$ 가지 정도로 나누면

부호 변화에 의한 규칙, 특정 패턴이 반복되는 규칙

이렇게 나눌 수 있다.

### 1) 부호 변화에 의한 규칙

부호 변화의 경우에는 일종의 수렴성을 판단하기 위한 준비가 되어야 한다. 다음 문제를 보라.

[2021학년도 4월 공통 21번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 $a_1$의 최솟값을 구하시오. [4점]

이와 같이 빼고 더하고 형태의 수열이 가장 대표적인 예시이다.
$a_1$이 아무리 커도 계속 $2$씩 빠지다가 어느 순간 다시 $5$를 더해서 반복이 된다.
자, 이 문제도 마찬가지로 주기성을 가진 문제이다.
주기성 문제의 핵심은 주기를 파악하는 것! 주기가 파악되었으면 주기를 이루는 각 항의 정보를 파악하는 것!

항상 잊지 말자. 그런데 출발을 어디에서부터 해야할지 잘 모르겠다.
그럼 하나씩 넣어보는 것이 가장 꿀팁이다.
이건 진짜 제발 부탁, 아무거나 한 번씩 넣어보기만 해도 대부분 문제는 감이 잡힌다.

아주 간단하게 $a_1=3$ 같은 걸 넣어보자. 그러면

$$3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ /\ 3,\ 1,\ \ldots$$

이 되어 $a_1$부터 $a_7$까지의 부분이 반복되는 것을 확인할 수 있다. 이번에는 $a_1=6$을 넣어보자.

$$6,\ /\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1,\ /\ 4,\ 2,\ \ldots$$

이번에도 마찬가지로 $7$ 간격으로 반복이 되는 모습을 확인할 수 있다.
그럼 여기에서 우리는 이러한 정보를 얻을 수 있다.

다른 수를 넣더라도 어차피 $a_n$은 언젠가 위의 **패턴과 똑같은 반복패턴**이 나타날 것이다.

그렇다면 $a_1$을 어떻게 잡더라도 패턴의 반복주기는 7이겠지?

한편, $a_{15} < 0$이라 했는데 위의 수열을 나열해보면 알겠지만 $a_{15}$로 가능한 것은 $-1$, $-2$ 밖에 없다.

**① $a_{15} = -1$인 경우**

주기가 7이므로 $a_8 = a_{15}$라고 생각하기 쉽다. 하지만, 이것은 순방향으로 갔을 때의 이야기.

즉, $a_8 = -1$일 때 $a_{15} = -1$은 맞지만, $a_{15} = -1$이라고 $a_8$은 아니라는 소리다.

$a_{15} = a_8 - 14$일 수도 있기 때문이다.

즉, 다음과 같은 상황을 의미한다.

$$a_8 = 13,\quad 11,\quad 9,\quad 7,\ \cdots\ ,\quad 1,\quad a_{15} = -1$$

그래서 이 케이스는 사실 경계해야 한다.

하지만 우리는 $a_1$의 최솟값을 구하는 것이니 만큼 이 경우는 무시해주어도 된다.

그럼 $a_8 = -1$이고, 같은 방식으로 $a_1 = a_8$이면 참 좋겠지만 안타깝게도 $a_1$이 자연수이기 때문에

이는 불가능하다.

따라서 $a_8 = -1$부터 역추적해나가면

<table>
<tr><th>$a_7$</th><th>$a_6$</th><th>$a_5$</th><th>$a_4$</th><th>$a_3$</th><th>$a_2$</th><th>$a_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td></tr>
<tr><td>$-2$</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$-4$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

이므로 이때의 $a_1$의 최솟값은 6이다. 주의할 점만 체크!

순방향 추적이랑 역방향 추적은 경우에 따라 똑같은 패턴이 아닐 수도 있음에 항상 유의하라.

**② $a_{15} = -2$인 경우**

같은 방식으로 $a_8 = a_{15} = -2$일 때 최솟값을 갖고, 마찬가지로 $a_1 > 0$이므로 역추적을 해야 한다.

<table>
<tr><th>$a_7$</th><th>$a_6$</th><th>$a_5$</th><th>$a_4$</th><th>$a_3$</th><th>$a_2$</th><th>$a_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$-1$</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

이므로 이때의 $a_1 = 5$이다. 따라서 $a_1$의 최솟값은 5이다.

### 2) 특정 패턴이 반복되는 규칙

위에서 본 문제의 경우가 이에 해당한다. 어떠한 수가 반복되는 것은 아니지만,
그래도 일정한 패턴을 가지고 계속해서 반복되는 형태의 수열이다.
이러한 수열 문제의 경우 역시 패턴을 파악하기 위해서는 나열을 하는 것이 가장 일반적인 형태이다.

---

[2021학년도 9월 나형 21번]

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ $0$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

---

일단 1)처럼 부호 변화가 반복되는 사례는 확실히 아닌 것 같다.
하지만 $a_3$과 $a_6$은 오직 3개의 항밖에 차이가 없다.
그러면 우리는 위의 문제처럼 트리를 활용해서 문제를 풀어볼 수 있다.
항 개수 차이가 5개만 나도 흠칫할텐데 3개 정도의 노가다는 충분히 해볼만하다.

<table>
<tr><th>$a_3$</th><th>$a_4$</th><th>$a_5$</th><th>$a_6$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">$2a_2+2$<br>$(a_2 \le 2)$</td><td>$2a_2+6$<br>$(a_3 \le a_4)$</td><td rowspan="2">㉠</td></tr>
<tr><td>$2a_2+4$<br>$(a_3 > a_4)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_2+2$<br>$(a_2 > 2)$</td><td>$a_2+6$<br>$(a_3 \le a_4)$</td><td rowspan="2">㉡</td></tr>
<tr><td>$a_2+4$<br>$(a_3 > a_4)$</td></tr>
</table>

여기서는 여러분의 직관적 이해를 위해 어떤 경우에 어떻게 트리가 그려지는 지를 명시하였지만
실제 시험때는 $a_n \le a_{n+1}$이면 위쪽에, $a_n > a_{n+1}$이면 아래쪽에 다음 항을 그리는 방식 등으로
자신만의 규칙을 세워 트리를 구축해나가는 것이 좋다.

우선 위의 ㉠과 ㉡을 일부러 나눈 이유는 모든 케이스를 다 적기에는 조금 귀찮기 때문이다.
여차하면 그냥 다 쓴 다음에 생각해도 되긴 하지만, 그러면 시간이 더 걸릴 뿐이다.

㉠ 케이스 중 가능한 것만 추려보자. 일단 ㉠은 $a_2 \le 2$이다.
이때, $a_4 \le 6$, $a_5 \le 10$이기 때문에 $a_4 > a_5$이면 $a_6 = a_4 + a_5 \le 16$이 되어
주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 따라서 $2a_4 + a_5 = 19$여야 한다.

$a_5 = 2a_3 + 6$이면 : $a_6 = 6a_2 + 10 = 19$이므로 $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$이 되어 나머지 조건도 만족시킨다.

이때, $a_2 = \frac{3}{2}$인데, $a_1 \le a_2$이면 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_1 > a_2$이면 $a_1 = \frac{1}{2}$이 되어야 한다.

한편, 두 경우 모두 $a_1 \le a_2$이므로 $a_1 = \frac{1}{4}$이다.

$a_5 = 2a_3 + 4$이면 : $a_6 = 6a_2 + 8 = 19$이므로 $a_2 = \frac{11}{6}$, $a_4 = \frac{17}{3}$이 되는데, 여기서 $a_3 > a_4$가 성립하지 않으므로 모순.

다음으로 ㉡ 케이스 중 가능한 것만 추려보자. 일단 ㉡은 $a_2 > 2$이다.
당연하겠지만 $a_2 + 2 > 2$이므로 $a_4 \ge a_3$이다.
따라서 자연스럽게 $a_5 = a_2 + 6$임을 얻는다.
또한, 당연하게도 $a_4 \le a_5$이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 2(a_2 + 2) + a_2 + 6 = 3a_2 + 10 = 19$$

따라서 $a_2 = 3$임을 얻는다. $a_1 \le a_2$이면 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$이면 $a_1 = -1$이 되어야 한다.

한편, 두 경우 모두 $a_1 \le a_2$이므로 $a_1 = -\frac{1}{2}$이다.

따라서 전체 경우에서 가능한 $a_1$의 합은 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$이다.

## SEOL:NAME, The Signature [ 테크닉 총정리 ]

### CHECK 01 등차수열은 일차함수

등차수열은 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하지만, 일차함수로 생각할 수 있다.
이 점을 적극적으로 활용하면 $x$절편이 되는 값을 이용해 문자를 쉽게 줄일 수 있다.
그게 아니더라도 등차중항의 값이 주어진다면, 또는 해석을 통해 그런 결과가 나온다면
**지나는 점을 아는 일차함수**가 되는 것이니, 역시 식을 완성할 수 있다.

### CHECK 02 이차함수가 되는 순간

등차수열이든, 첫째항을 빼면 등차수열이 되는 수열이든 수열의 합은 이차식이다.
이차식이 되면 이차함수로 생각하는 것이 유리한 것이 아닌지 한 번 쯤은 생각해보고 넘어가야한다.
**이차함수의 최댓값/최솟값**으로 해석하면 빠르게 풀릴 수도 있고, **이차함수의 그래프**를 그림으로써
절댓값 같이 해석하기 난해한 요소를 쉽게 풀어버릴 수도 있기 때문이다.

### CHECK 03 나열하는 또 하나의 방법

수열은 참으로 고마운 파트인데, 나열만 잘 해놓고 생각하다 보면 그래도 답은 나온다.
그런데 나열도 어떻게 하느냐에 따라 더 잘 보일 수 있지 않을까?
경우의 수가 나뉘는 수열은 **시작점 역할을 할 $a_n$을 잡고,**
**경우가 나뉠 때 가지를 쳐서** 조금 더 가시성이 좋은 시각화를 해보자.
머리가 해야 했던 것이 눈이 대신할 수 있던 것일지 모른다.

**CHECK 04　어디에나 있고 어디에도 없는 함수**

함수는 학생들이 잘 조작만 해준다면 함수로써 기능할 수 있다.
따라서 **수열이 자연수 $n$에 대한 함수**라는 것은 중요한 정의 중 하나이다.
그런데 우리가 귀납적으로 정의되는 수열을 배운 뒤로부터는
꼭 $n$에 대한 함수로만 생각해야 하는 것이 아니라는 것도 기억해야 한다.
때로는 수열의 뒷 항이 수열의 앞 항에 대한 함수가 될 수 있기 때문이다.

**CHECK 05　주기성의 파악과 정보 얻기**

주기가 반복되는 수열에서 가장 중요한 것은 다음 두 가지이다.

첫째, 주기가 얼마인가?　/　둘째, 주기를 이루는 각 항의 정보는 어떠한가?

이 두 가지 정보만 있으면 사실상 무적으로 보아도 된다.
또한, 주기성 파악의 경우 부호 변화에 의한 반복 및 특정 패턴에 의한 반복으로 크게 나뉜다.
그래봐야 결국 위에서 했듯 가시성이 좋은 트리를 만들어서 해결하면 끝이다.

PRACTICE
# 기출문제 ATTACK

## 001 [2022학년도 9월 공통 13번]

첫째항이 $-45$이고 공차가 $d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 $d$의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 $m$이 존재한다.

(나) 모든 자연수 $n$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44　② 48　③ 52　④ 56　⑤ 60

## 002 [2019학년도 7월 나형 29번]

첫째항이 $0$이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 $T_n$을

$$T_n = \{S_k \mid k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n\}$$

이라 하자. 집합 $T_n$의 원소의 개수가 $13$이 되도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오. [4점]

## 003 [2014학년도 3월 B형 28번]

첫째항이 $a$이고 공차가 $-4$인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. 모든 자연수 $n$에 대하여 $S_n < 200$일 때, 자연수 $a$의 최댓값을 구하시오. [4점]

## 004 [2013학년도 3월 A형 30번]

첫째항이 $60$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

| | |
|---|---|
| (가) $T_{19} < T_{20}$ | (나) $T_{20} = T_{21}$ |

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 $n$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]

## 005 [2019학년도 10월 나형 17번]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_n$은 $n$에 대한 이차식이다.
> (나) $S_{10} = S_{50} = 10$
> (다) $S_n$은 $n = 30$에서 최댓값 $410$을 갖는다.

$50$보다 작은 자연수 $m$에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 $m$의 최솟값을 $p$, 최댓값을 $q$라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은?

[4점]

① $39$　② $40$　③ $41$　④ $42$　⑤ $43$

**006** [2023학년도 사관학교 19번]

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 $n$ 에 대하여

$$a_{2n} = 2a_n, \quad a_{2n+1} = 3a_n$$

을 만족시킨다. $a_7 + a_k = 73$ 인 자연수 $k$ 의 값을 구하시오. [3점]

## 007 [2022학년도 사관학교 15번]

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최솟값을 $m$이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(가) 모든 자연수 $n$에 대하여
$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$
이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9$의 값은? [4점]

① $-53$ ② $-51$ ③ $-49$ ④ $-47$ ⑤ $-45$

## 008 [2020학년도 수능 나형 21번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$

(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

## 009 [2022학년도 3월 공통 20번]

수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

## 010 [2023학년도 4월 공통 20번]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$ 항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_n$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{13}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $S_n$은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.

(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.

## 011 [2023학년도 6월 공통 15번]

자연수 $k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 $k$의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

## 012 [2006학년도 수능 나형 29번]

$p \geq 2$ 인 자연수 $p$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) $a_{k+1} = a_k + 1 \ (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p} = a_k \ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

[ 보 기 ]

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$

ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \dfrac{p(p-1)}{2}$

ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | 273 | 3 | 37 | 4 | 61 | 5 | ① |
| 6 | 64 | 7 | ① | 8 | ④ | 9 | 70 | 10 | 30 |
| 11 | ② | 12 | ④ | | | | | | |

해 설

## 001

[정답] ②

$a_1=-45<0$이고 $d>0$이므로

조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$a_m<0$, $a_{m+3}>0$

즉, $-a_m=a_{m+3}$에서 $a_m+a_{m+3}=0$

따라서

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)d=0$

$(2m+1)d=90$ …… ㉠

이고 $2m+1$은 $1$보다 큰 홀수이므로 $d$는 짝수이다.

그런데, $90=2\times 3^2\times 5$이므로 ㉠을 만족시키는 $90$의 약수 중에서 짝수인 것은 $2$, $6$, $10$, $18$, $30$이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2}>-100$$

$n\{-90+(n-1)d\}>-200$ …… ㉡

따라서 $2$, $6$, $10$, $18$, $30$ 중에서 모든 자연수 $n$에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 $18$, $30$이므로 구하는 모든 자연수 $d$의 값의 합은

$18+30=48$

## 002

**[정답] 273**

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a \neq 0)$, 공차를 $d$라 하면

$S_9 = S_{18}$ 이므로

$$\frac{9(2a+8d)}{2} = \frac{18(2a+17d)}{2}$$

$a = -13d$

$$S_n = \frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n(n-27)$$

$S_1 = S_{26} = -13d$,

$S_2 = S_{25} = -25d$,

$S_3 = S_{24} = -36d$,

$\vdots$

$S_{13} = S_{14} = -91d$,

$S_{27} = 0$, $S_{28} = 14d$, $S_{29} = 29d$, $\cdots$

집합 $T_n$의 원소의 개수가 $13$이 되도록 하는 자연수 $n$의 값은

$13$, $14$, $\cdots$, $26$

따라서 모두 자연수 $n$의 값의 합은 $13+14+15+\cdots+26 = 273$

## 003

**[정답] 37**

첫째항이 $a$이고 공차가 $-4$인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

$$S_n = \frac{n\{2a-4(n-1)\}}{2} = -2n^2+(a+2)n$$

모든 자연수 $n$에 대하여 $S_n < 200$이므로

$-2n^2+(a+2)n < 200$

$2n^2+200 > (a+2)n$

$2n + \frac{200}{n} > a+2 \quad \cdots$ ㉠

이때 $n > 0$이므로

$$2n + \frac{200}{n} \geq 2\sqrt{2n \times \frac{200}{n}} = 2\sqrt{400} = 40$$

(단, 등호는 $n = 10$일 때 성립)

따라서 모든 자연수 $n$에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a+2 < 40$이어야 하므로 자연수 $a$의 최댓값은 $37$이다.

## 004

**[정답]** 61

수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$T_n = \left| \dfrac{n\{120+(n-1)d\}}{2} \right|$

$T_{20} = T_{21}$이므로

$\left| \dfrac{20(120+19d)}{2} \right| = \left| \dfrac{21(120+20d)}{2} \right|$

i) $\dfrac{20(120+19d)}{2} = \dfrac{21(120+20d)}{2}$ 일 때, $d=-3$

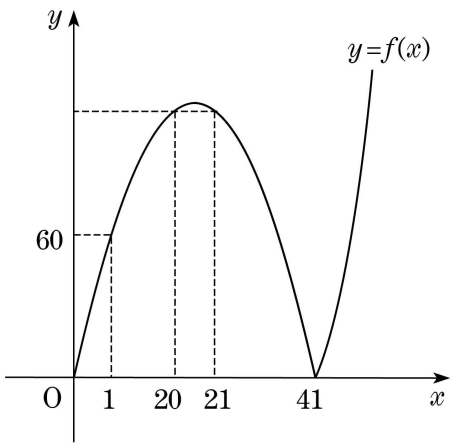
이때 조건 $T_{19} < T_{20}$이 성립한다.

ii) $\dfrac{20(120+19d)}{2} = -\dfrac{21(120+20d)}{2}$ 일 때, $d=-\dfrac{123}{20}$

이때 조건 $T_{19} < T_{20}$이 성립하지 않는다.

따라서 $T_n = \left| \dfrac{-3n^2+123n}{2} \right|$ 이다.

$f(x) = \left| \dfrac{-3x^2+123x}{2} \right|$ 라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




위 그래프에서 $f(41)=0$이므로 $T_{41}=0$

그러므로 $T_{21} > T_{22} > T_{23} > \cdots > T_{41}=0$, $T_{41} < T_{42}$

따라서 $T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 $n$의 값은

$21, 22, 23, \cdots, 40$이다.

그러므로 최솟값과 최댓값의 합은

$21+40=61$

## 005

[정답] ①

$S_n$ 의 이차항의 계수를 $a$ 라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$ 이고 $S_n$ 은 $n=30$ 일 때 최댓값 $410$ 을 가지므로

$S_n=a(n-30)^2+410$

$S_{10}=10$ 이므로 $10=a(10-30)^2+410$ 에서 $a=-1$

그러므로 $S_n=-(n-30)^2+410$

$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 $m$ 의 범위는

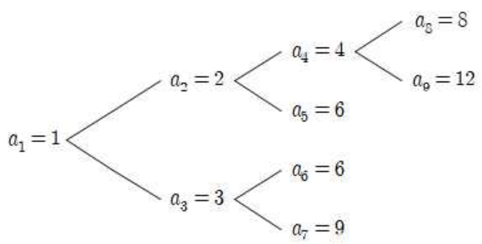
$10<m<50$ 이므로 $p=11$, $q=49$

따라서 $\sum_{k=p}^{q} a_k=\sum_{k=11}^{49} a_k=S_{49}-S_{10}$

$=\{-(49-30)^2+410\}-10=39$

## 006

[정답] 64




$a_k=64 \Rightarrow k=64$

## 007

[정답] ①

$$\begin{cases} a_2=a_1a_3+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ a_3=2a_1-2a_2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_2=a_1(2a_1-a_2)+1$

$\therefore\ a_2=\dfrac{2{a_1}^2+1}{a_1+1}=2(a_1-1)+\dfrac{3}{a_1+1}$

이때 $a_1+1$이 $3$의 약수가 되어야 하므로

$\therefore\ a_1+1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$

따라서 $a_1$의 최솟값 $m$은 $m=-4$

따라서 $a_2=-11$, $a_3=3$이므로

$a_9=2a_4-a_2=2(a_2a_3+1)-a_2=2\{(-11)\times3+1\}+11=-53$

## 008

**[정답]** ④

$a_{20}=a_{10}-1$에서 $a_{20}=1$이므로 $a_{10}=2$

또, $a_{10}=a_5-1$에서 $a_5=3$

$a_5=2a_2+1$에서 $a_2=1$

$a_2=a_1-1$에서 $a_1=2$

한편,

$a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-1)+(2a_n+1)=3a_n$

이므로

$a_2+a_3=3a_1$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3a_2+3a_3=3^2a_1$

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}=3a_4+3a_5+\cdots+3a_7=3^3a_1$

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}=3a_8+3a_9+\cdots+3a_{15}=3^4a_1$

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}=3a_{16}+3a_{17}+\cdots+3a_{31}=3^5a_1$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{63}a_n&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})\\&\quad+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})\\&=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)\\&=2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728\end{aligned}$$

## 009

**[정답]** 70

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\ge 0)\end{cases}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이고 $1<a_1<2$에서 $a_1\ge 0$이므로

$a_2=a_1-2<0$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-2)>0$

$a_4=a_3-2=-2(a_1-2)-2=-2(a_1-1)<0$

$a_5=-2a_4=4(a_1-1)>0$

$a_6=a_5-2=4(a_1-1)-2=4a_1-6$

이때 ㉠에서 $a_6<0$이면 $a_7=-2a_6>0$이므로

$a_7=-1\le 0$에서 $a_6\ge 0$이다.

$a_7=a_6-2=(4a_1-6)-2=4a_1-8=-1$ $\qquad\therefore\ a_1=\frac{7}{4}$

따라서 $40\times a_1=40\times\frac{7}{4}=70$

## 010

**[정답]** 30

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

조건 (가)에 의해 $a_8 = S_8 - S_7 = 0$이므로

$a_8 = a_1 + 7d = 0$에서 $a_1 = -7d$

$S_n$의 값은 $n = 8$에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$a_9 = a_8 + d = d \geq 0$

$d = 0$이면 $a_1 = 0$에서 모든 자연수 $n$에 대하여

$S_n = 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$

$n \geq 9$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n > 0$

$m > 8$일 때 $S_{2m} > S_m$

조건 (나)에 의하여 $-S_m = S_{2m} = 162$

$$-\frac{m\{2a_1 + (m-1)d\}}{2} = \frac{2m\{2a_1 + (2m-1)d\}}{2}$$

$14d - (m-1)d = -28d + 2(2m-1)d$

$-m + 15 = 4m - 30$에서 $m = 9$

$S_9 = \dfrac{9(-14d + 8d)}{2} = -162$에서

$d = 6$, $a_1 = -42$

따라서 $a_{13} = a_1 + 12d = -42 + 12 \times 6 = 30$

## 011

**[정답]** ②

$a_1 = 0$이므로

$a_2 = a_1 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$

$a_2 > 0$이므로

$a_3 = a_2 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

$a_3 < 0$이므로

$a_4 = a_3 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k = 1$이면 $a_4 = 0$이므로 $n = 3m - 2$($m$은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다.

즉, $a_{22} = 0$이므로 $k = 1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k > 1$이면 $a_4 > 0$이므로

$a_5 = a_4 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{2}{k}$

$a_5 < 0$이므로

$a_6 = a_5 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{2}{k} = \dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6 = 0$이므로 $n = 5m-4$($m$은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다.

즉, $a_{22} \neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k > 2$이면 $a_6 > 0$이므로

$a_7 = a_6 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{3}{k}$

$a_7 < 0$ 이므로

$a_8 = \dfrac{4}{k+1} - \dfrac{3}{k} = \dfrac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8 = 0$이고 이때 $a_{22} = 0$이다.

$k=4$이면 $a_{10} = 0$이고 이때 $a_{22} \neq 0$이다.

$5 \leq k \leq 9$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22} = 0$이다.

$k \geq 11$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 $k$의 값은 $1,\ 3,\ 10$

이므로 구하는 모든 $k$의 값의 합은

$1+3+10=14$

## 012

**[정답]** ④

ㄱ. (반례) $p=2$이면 $a_2 = a_1 + 1 = 1 \neq 2a_1 = 0$ (거짓)

ㄴ. (가), (나)에서

$a_1 = 0,$

$a_2 = a_1 + 1 = 1$

$a_3 = a_2 + 1 = 2$

$\cdots$

$a_p = a_{p-1} + 1 = p-1$

$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 0 + 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \dfrac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ. (다)에 $k=p$를 대입하면

$a_{p+p} = a_{2p} = a_p = p-1,$

$a_{2p+p} = a_{3p} = a_{2p} = a_p = p-1,$

$\cdots$

$a_{kp} = a_p = p-1$

$\therefore\ a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1) = k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**[참고]**

$p=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ \cdots$