2016 대수능 대비 모의고사 해설

1. $\log_4 27 \times \log_9 16$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 AB의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

3. 함수 $y=4\sin x+3\cos x$의 최댓값은? [2점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

4. 수열 $\{a_n\}$의 부분합을 S_n이라 할 때, $S_n=2n+1$이다. $\sum_{n=2}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

5. 부등식 $\frac{4}{x+3}+\frac{2}{x+1}\geq 2$를 만족하는 정수 x의 개수는? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

6. 역변환이 존재하는 일차변환 f에 대하여 $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$가 성립할 때, 합성변환 $f\circ f$에 대하여 실수 x, y가 $(f\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$를 만족시킨다. $x+y$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

1. (답 : ④)

$\log_4 27\times\log_9 16=\log_{2^2}3^3\times\log_{3^2}2^4=(\frac{3}{2}\log_2 3)(\frac{4}{2}\log_3 2)=3$

2. (답 : ①)

$AB=\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$이므로 모든 원소의 합은 10

3. (답 : ③)

$y=4\sin x+3\cos x=5\sin(x+\alpha)$이므로 최댓값은 5

(단, $\tan\alpha=\frac{3}{4}$)

4. (답 : ②)

$\sum_{n=2}^{10}a_n=S_{10}-S_1=18$

5. (답 : ①)

$\frac{4}{x+3}+\frac{2}{x+1}-2=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x+1)(x+3)}\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\leq 0,\ x\neq -1,\ -3$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 -2, 0, 1

6. (답 : ②)

주어진 식의 양변에 역변환을 취하면 $f^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(f^{-1}\circ f^{-1})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

7. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$이고
$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \frac{1}{3}$일 때, $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

8. 같은 부호로 대전된 두 점전하 간에 작용하는 전기적인 반발력을 쿨롱힘이라고 한다. 두 전하의 거리가 r, 각 전하의 전하량을 Q_1, Q_2, 쿨롱힘을 f라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\log f = k + \log Q_1 + \log Q_2 - 2\log r \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

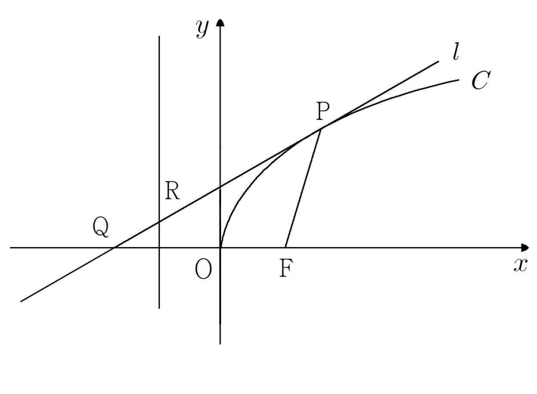
어떤 특정 실험상황으로부터 한 전하는 고정시킨 채 다른 전하를 전하량이 100배인 전하로 바꾸었더니 쿨롱힘이 50배 증가하였다. 두 전하사이의 거리는 몇 배가 되었는가? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

9. 어떤 공장에서 생산하는 제품 A의 무게는 평균이 100g, 표준편차가 5g인 정규분포를 따른다. 이 제품들 중에서 임의로 100개의 제품을 뽑아 무게의 표본평균에 대한 신뢰구간을 구했더니 [100, 110]이 나왔다.
이번엔 400개의 표본을 뽑아서 무게의 표본평균을 구하였더니 앞서 구한 것과 동일한 표본평균이 나왔다.
신뢰도가 동일하다고 할 때, 400개 표본에 대한 표본평균의 신뢰구간은 $[a,\ b]$이다. $2b-a$의 값은? [3점]

① 105.5 ② 111 ③ 111.5 ④ 112 ⑤ 112.5

10. 그림과 같이 포물선의 일부 $C: y^2=8x\ (y \ge 0)$위의 한 점 P에서 그은 접선을 l이라 하자.
x축과 직선 l의 교점을 Q, 직선 $x=-2$와 직선 l의 교점을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{QR}}=5:1$이 성립한다.
F$(2, 0)$에 대해, 선분 PF의 길이는? [3점]



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ 5 ⑤ $\frac{31}{6}$

7. (답 : ①)
$$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = [x^2 f(x)]_0^1 - \int_0^1 2xf(x)dx = f(1) - 2\int_0^1 xf(x)dx$$
로부터 주어진 조건을 대입하면 $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{3}$

8. (답 : ②)
주어진 등식에
$f_1' = 50f_1,\ Q_1' = Q_1,\ Q_2' = 100Q_2,\ r' = xr$
을 대입하여
$\log 50 + \log f = k + \log Q_1 + \log 100 + \log Q_2 - 2\log x - 2\log r$
을 얻고, 양변에 원래의 관계식
$\log f = k + \log Q_1 + \log Q_2 - 2\log r$
을 변끼리 빼어 소거해주면 로그방정식
$\log 50 = \log 100 - 2\log x$
을 얻는다. 이를 풀면 $x = \sqrt{2}$

9. (답 : ⑤)
100개 표본에 대한 신뢰도
$$[\overline{X} - \frac{5}{\sqrt{100}}k,\ \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{100}}k] = [\overline{X} - \frac{1}{2}k,\ \overline{X} + \frac{1}{2}k]$$
와 같이 주어지고, 연립방정식
$$\begin{cases} \overline{X} - \frac{1}{2}k = 110 \\ \overline{X} + \frac{1}{2}k = 100 \end{cases}$$
으로부터 $\overline{X} = 105,\ k = 10$이다.
따라서 동일한 신뢰도 및 표본평균 하에서 400개 표본에 대한 신뢰구간을 구하면
$$[\overline{X} - \frac{5}{\sqrt{400}}k,\ \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{400}}k] = [\overline{X} - \frac{1}{4}k, \overline{X} + \frac{1}{4}k] = [102.5, 107.5]$$
이다. 따라서 $2 \times 107.5 - 102.5 = 112.5$

10. (답 : ④)
P의 x축에 내린 수선의 발을 P$'$, R의 x축에 내린 수선의 발을 R$'$라 하면 $\overline{\mathrm{P'R'}}:\overline{\mathrm{QR'}} = 5:1$이다.
P$'(a,\ 0)$, Q$(-a,\ 0)$로 두면 $(a+2):(a-2)=5:1$로부터 $a=3$이다. 점 P의 x좌표가 3이므로 $\overline{\mathrm{PF}} = 3+2 = 5$

11. 다음은 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 점화식

$$a_{n+1}-na_n=n^2-n-1 \qquad \cdots (*)$$

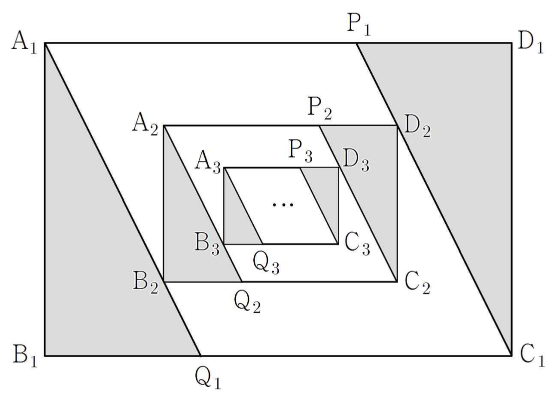
이 성립할 때, $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> (*)의 양변을 정리하여
> $$a_{n+1}+n+1=na_n+n^2 \qquad \cdots (1)$$
> 을 얻는다.
> 이제 $b_n=a_n+n$와 같이 놓으면
> $b_{n+1}=a_{n+1}+n+1$이므로 이를 (1)에 대입하여
> $$b_{n+1}=\boxed{\text{(가)}}\times b_n$$
> 를 얻는다.
> 한편, $a_1=1$로부터 $b_1=2$이므로
> $$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\times\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\times\cdots\times\frac{b_2}{b_1}\times b_1$$
> $$=\boxed{}$$
> 이다.
> 따라서 $a_n=b_n-n=\boxed{\text{(나)}}$이 된다.

(가)에 들어갈 식을 $f(n)$, (나)에 들어갈 식을 $g(n)$이라할 때, $f(4)g(5)$의 값은? [3점]

① 172 ② 172 ③ 188 ④ 192 ⑤ 200

12. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}=3$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$가 있다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_1}$이라 하자. 이 때, 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 평행사변형 $\mathrm{A_1Q_1C_1P_1}$을 제외한 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
두 대각선의 교점이 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 두 대각선의 교점과 일치하고, 선분 $\mathrm{A_1Q_1}$과 선분 $\mathrm{P_1C_1}$에 접하며, 긴 변과 짧은 변의 길이의 비가 $3:2$인 직사각형을 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$라 하자.
이 때, $\overline{\mathrm{A_2D_2}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=3:2$이고, 점 $\mathrm{B_2}$와 $\mathrm{D_2}$는 각각 선분 $\mathrm{A_1Q_1}$, 선분 $\mathrm{P_1C_1}$ 위에 있다. 선분 $\mathrm{A_2D_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P_2}$, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 이 때, 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 평행사변형 $\mathrm{A_2Q_2C_2P_2}$를 제외한 부분의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 시행을 계속하여 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 및 평행사변형 $\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n\mathrm{P}_n$을 만들어 나아갈 때, 직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 평행사변형 $\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n\mathrm{P}_n$을 제외한 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? [3점]



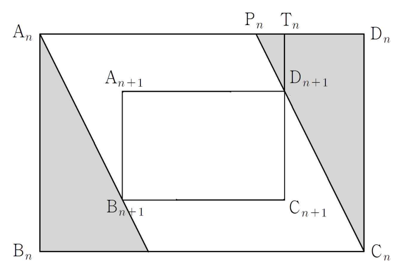
① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

11. (답 : ①)

(가) (1)의 우변을 n으로 인수분해하면 (1)식은
$a_{n+1}+n+1=n(a_n+n)$
이고, $b_{n+1}=a_{n+1}+n+1$, $b_n=a_n+n$을 대입하면
$b_{n+1}=nb_n$
을 얻는다. 따라서 $f(n)=n$

(나) $\frac{b_n}{b_{n-1}}=n-1$, $\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=n-2$, $\cdots$, $\frac{b_2}{b_1}=1$, $b_1=2$
를 차례로 대립하여 $b_n=2\times(n-1)!$을 얻는다.
따라서 $g(n)=a_n=2\times(n-1)!-n$

12. (답 : ⑤)



편의상 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=x_n$이라고 두면 $S_n=\frac{2}{3}x_n^2$이다.

D_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$에 내린 수선의 발을 T_n이라 하자.

그러면 $\overline{\mathrm{T}_n\mathrm{D}_n}=\frac{x_n-x_{n+1}}{2}$이 성립한다.

또한 $\overline{\mathrm{T}_n\mathrm{D}_{n+1}}=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x_n-\frac{2}{3}x_{n+1})=\frac{x_n-x_{n+1}}{3}$이다.

이 때, $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n\mathrm{D}_{n+1}\propto\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n\mathrm{D}_{n+1}$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{T}_n\mathrm{D}_{n+1}}=\frac{x_n-x_{n+1}}{6}$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{D}_n}=\frac{x_n}{3}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n}+\overline{\mathrm{T}_n\mathrm{D}_n}=\frac{2(x_n-x_{n+1})}{3}$이 성립하고,

$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$이다. 이제 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=(\frac{x_{n+1}}{x_n})^2=\frac{1}{4}$이고 $S_1=2$이므로

$\{S_n\}$은 초항이 2, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

13. 선분 P_1P_2이 y축과 평행할 때의 $\angle P_1OP_2$를 θ라 하자. $\cos^2\theta = p\cos\theta + q$가 성립할 때, $p+q$의 값은?
(단, p, q는 유리수이다.) [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

14. 선분 P_1R의 길이가 1일 때, 선분 P_1Q의 길이의 시간에 대한 변화율은?
(단, 점 P_1의 x좌표가 점 P_2의 x좌표보다 크다.) [4점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

15. 이차정사각행렬 A, B가 다음을 만족한다.

$$AB + A + E = O, \quad A^2B + 2E = O$$

다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB = BA$
ㄴ. $A + 2E$의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. $(A+2B)^3 = -27E$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. (답 : ⑤)
P_1, P_2의 시간 t에서의 호의 길이가 각각 $3t$, $10t$이므로 각의 크기는 각각 t, $2t$이다. 따라서 두 점의 좌표는 각각 $P_1(3\cos t,\ 3\sin t)$, $P_1(5\cos 2t,\ 5\sin 2t)$이다.
그런데 선분 P_1P_2가 y축에 평행하면 두 점의 x좌표가 같아야 하고, 시간 t에서의 $\angle P_1OP_2 = t$로 선분 OP_1와 x축의 양의 방향이 이루는 동경과 일치하므로

$$5\cos 2\theta = 3\cos\theta$$

가 성립한다. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$를 대입하여 정리하면 방정식

$$\cos^2\theta = \frac{3}{10}\cos\theta + \frac{1}{2}$$

을 얻는다. 따라서 $p = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{2}$이다.

14. (답 :)
선분 P_1R의 길이가 1이되는 시각을 t_0라 하자.
문제의 조건에서 $3\cos t_0 - 5\cos 2t_0 = 1$이어야 한다.
$\cos 2t_0 = 2\cos^2 t_0 - 1$을 대입하여 정리하면 방정식

$$10\cos^2 t_0 - 3\cos t_0 - 4 = 0$$

을 얻는다. 이를 풀면 $\cos t_0 = \frac{4}{5}$ 또는 $\cos t_0 = -\frac{1}{2}$인데,
$0 < \cos t_0 < 1$이므로 $\cos t_0 = \frac{4}{5}$이다.
한편 $\overline{QP_1} = f(t)$로 두면 주어진 시각에서

$$f(t) = 5\sin 2t - 3\sin t$$

이 성립한다. $f'(t) = 10\cos 2t - 3\cos t$이고,
$\cos 2t_0 = \frac{7}{25}$, $\cos t_0 = \frac{4}{5}$를 각각 대입하여
$f'(t_0) = \frac{2}{5}$를 얻는다.

15. (답 : ③)
ㄱ. $AB + A + E = O$를 변형하여 $A(B+E) = -E$를 얻으므로 $A^{-1} = -(B+E)$이다. $AA^{-1} = A^{-1}A$로부터 이를 대입하여 $-A(B+E) = -(B+E)A$를 얻는다. 양변을 정리하여 $AB = BA$를 얻는다. (참)
ㄴ. $AB + A + E = O$의 양변에 A를 곱하여 $A^2B + A^2 + A = O$을 얻는다. 여기에 $A^2B = -2E$를 대입하여 $A^2 + A - 2E = O$을 얻는다. 좌변을 인수분해하여 $(A+2E)(A-E) = O$을 얻으므로 $A = E$라면 $A + 2E = 3E$가 되어 역행렬이 존재한다. 또한 $A = E$를 주어진 두 등식에 대입하면 $B = -2E$를 얻으며, 주어진 등식을 모두 만족하게 된다. (거짓)
ㄷ. $A^2B + 2E = O$를 B에 대해 정리하여 $B = -2(A^{-1})^2$를 얻는다. 그런데 $A^2 + A - 2E = O$으로부터 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+E)$이므로 이를 대입하여 $B = -\frac{1}{2}(A+E)^2 = -\frac{1}{2}(A+3E)$를 얻는다.
이를 정리하여 $A + 2B = -3E$를 얻으므로 $(A+2B)^3 = -27E$ (참)

16. 자연수 n에 대해 함수 $f(x)=(x^2-3x+2)e^{-x}$의 그래프 위의 한 점 $(n,\ f(n))$에서의 접선이 이 함수의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다. 가능한 자연수 n의 개수는? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

17. 10 이하의 정수 $x,\ y,\ z,\ w$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $x>0,\ y>0,\ z\geq 0,\ w\geq 0$
(나) $zw=2k$ (단, k는 음이 아닌 정수)

방정식

$$x+y+zw=10$$

의 해가 되는 서로 다른 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는? [4점]

① 230 ② 232 ③ 234 ④ 236 ⑤ 238

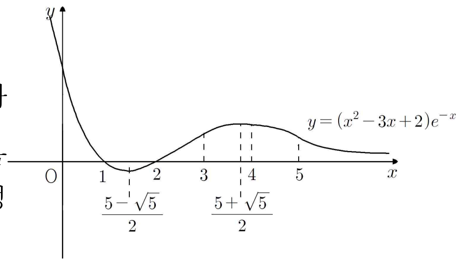
18. 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대해, 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\leq 0)\\ \mathrm{P}(-1\leq X\leq 1-x) & (0<x<2)\\ 0 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$f'(x)$가 $0<x<2$에서 이차함수일 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

16. (답 : ③)
$f'(x)=(-x^2+5x-5)e^{-x},\ f''(x)=(x^2-7x+10)e^{-x}$로부터 그림과 같이 $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$에서 극값, $x=2,\ x=5$에서 변곡점을 갖는 그래프가 도출된다.



$\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$라 하면 x의 범위에 따라 다음과 같이 교점의 개수가 생성된다.

x	$x\leq\alpha$	$\alpha<x<2$	2	$2<x\leq\beta$	$\beta<x<5$	5	$x>5$
교점	1	2	1	2	3	2	3

이상에서 교점이 2개가 생기는 자연수 x의 값은 3, 5이다.

17. (답 : ③)
zw의 값에 따라 경우의 수를 나누어 구해보면 다음과 같다.

$x+y$	경우	10	8	6	4	2
	가짓수	9	7	5	3	1
zw	경우	0	2	4	6	8
	가짓수	21	2	3	4	4
전체		$9\times 21=189$	$7\times 2=14$	$5\times 3=15$	$3\times 4=12$	$1\times 4=4$

따라서 구하는 경우의 수는 $189+14+15+12+4=234$가지이다.

18. (답 : ④)
$f(x)$가 $x<0,\ x\geq 2$에서 상수함수이므로
$f'(0)=f'(2)=0$이다. 따라서 $0<x<2$에서
$f'(x)=kx(x-2)$ $(k<0)$이고,
$\int_0^2 f'(x)dx=f(2)-f(0)=-1$로부터 $k=\frac{3}{4}$이다.
한편 X의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하면
$\mathrm{P}(-1\leq X\leq 1-x)=\int_{-1}^{1-x}g(t)dt$이므로
$f(x)=\int_{-1}^{1-x}g(t)dt$ $(0<x<2)$이고, 양변을 미분하여
$f'(x)=-g(1-x)$를 얻는다. 따라서 $g(x)=-\frac{3}{4}(x-1)(x+1)$
한편, $\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{1}xg(x)dx=0,\ \mathrm{E}(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2g(x)dx=\frac{1}{5}$이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{1}{5}$이다.

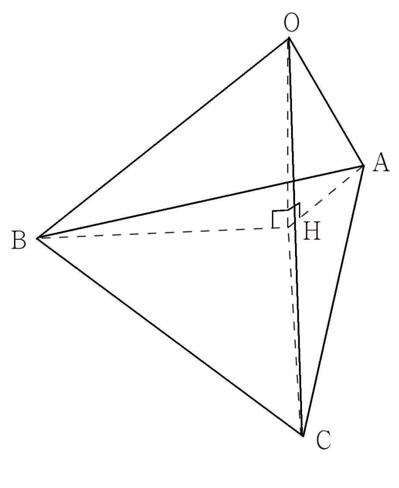
19. 원점 O를 지나는 직선 $x=y=\dfrac{z}{2}$와 원점 O를 지나는 구 $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$가 있다. 직선 위의 점 P, 구 위의 점 Q, 구의 중심 C에 대하여 선분 PQ와 구가 점 Q 이외의 점에서 만나지 않고, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{9}{2}$가 성립한다. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $(a+b+c)^2$의 값은? [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

20. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC를 한 면으로 갖는 사면체 O−ABC가 있다. 점 O에서 삼각형 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 다음이 성립한다.

(가) $\overline{\mathrm{OH}}=2$
(나) $\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{CH}}=1:\sqrt{7}:\sqrt{7}$

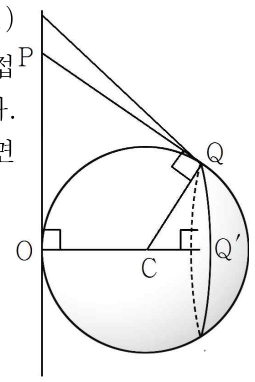
직선 OA와 직선 BC 사이의 거리는? [4점]



① $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

19. (답 : ⑤)

직선의 방향벡터 $\vec{d}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-1,-1,1)$에서 $\vec{d}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$이다. 따라서 직선은 구에 접하며, 접 P의 직선 OC로의 정사영은 O이다. 또한 Q의 직선 OC로의 정사영을 Q′라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=\dfrac{9}{2}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 즉, Q는 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$이고, 원점으로부터 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$만큼 떨어진 평면과 구가 만나서 생기는 원 위의 점이다.



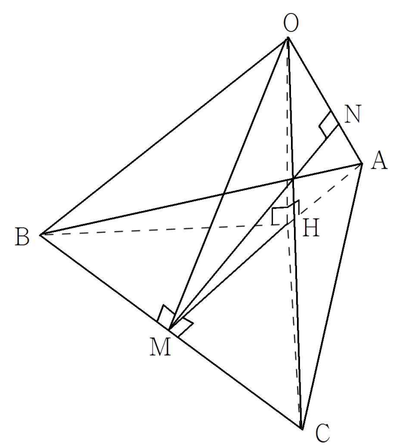
한편, 선분 PQ가 구와 두 점에서 만나지 않기 위해선 그림과 같이 선분 PQ가 구에서 접하도록하는 점 P보다 점 O에서 멀리 떨어져있어야 한다. 그런데 $\cos\angle \mathrm{Q'CQ}=\dfrac{1}{2}$이고, $\triangle\mathrm{POC}\equiv\triangle\mathrm{PCQ}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최소일 때의 $\cos\angle\mathrm{PCO}=\dfrac{1}{2}$이고, $\angle\mathrm{PCO}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geq\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$이다.

한편 직선의 단위 방향벡터가 $\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}(1,1,2)$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{3}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

따라서 $(a+b+c)^2=24$

20. (답 : ①)



선분 BC의 중점을 M, M에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 N이라 하자. $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}$고 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{MH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이다.
또한 $\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$로부터 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이고, 따라서 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이다.
이로부터 $\overline{\mathrm{BC}}\perp$(평면 OMA)임을 알 수 있다.
한편 선분 MN은 평면 OMA 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$이다.
정의로부터 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$이므로 결국 두 직선의 거리는 $\overline{\mathrm{MN}}$이다.
한편 $\overline{\mathrm{AH}}=k$, $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{7}k$라 하면 $\angle\mathrm{HAC}=\dfrac{\pi}{6}$으로부터

$$\cos\angle\mathrm{HAC}=\frac{k^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}k)^2}{2\times k\times 2\sqrt{3}}=\frac{12-6k^2}{4\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

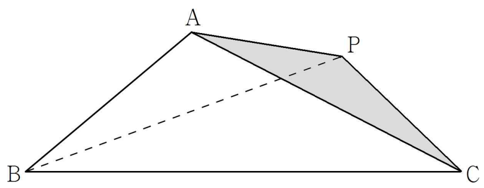
이를 정리하면 $6k^2-6k-12=0$로부터 $k=1$ $(\because k>0)$을 얻는다.
따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{MH}}=2$이다.

한편 $\cos\angle\mathrm{OAM}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+3^2-(2^2+2^2)}{2\times\sqrt{5}\times 3}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$에서

$\sin\angle\mathrm{OAM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고, 따라서 $\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{MA}}\times\sin\angle\mathrm{OAM}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

21. $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\angle ABC=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 각 B의 이등분선 위의 한 점 P를 $\overline{AP}=\overline{CP}$가 되도록 잡을 때, 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$라고 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

22. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2e^2$이고,

$$f'(x)=4e^{2x}-3x^2$$

일 때, $10\times f(0)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 평면 $\alpha: x+2y+2z-10=0$과 직선 $l:\frac{x}{a}=y=z$가 서로 평행할 때, a^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

21. (답 : ①)

$\overline{BP}=x$라 두면

$\triangle APC=\triangle ABP+\triangle APC-\triangle ABC$

$=\frac{3}{2}x\sin\frac{\theta}{2}-\sin\theta\ \cdots$ (*)

가 성립한다.

한편 $\overline{AP}=\overline{PC}$에서 각 길이에 대해 제이코사인법칙을 적용하여 다음 등식을 얻는다.

$$1^2+x^2-2x\cos\frac{\theta}{2}=2^2+x^2-4x\cos\frac{\theta}{2}$$

이를 정리하여 $x=\frac{3}{2\cos\frac{\theta}{2}}$를 얻고, (*)에 대입하여

$\triangle APC=\frac{9}{4}\tan\frac{\theta}{2}-\sin\theta$를 얻는다.

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{9}{4}\tan\frac{\theta}{2}-\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{9}{8}\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$$

를 얻는다.

(다른 풀이)

$\overline{AP}=\overline{CP}$이고 $\angle ABP=\angle PBC$이므로 네 점 A, B, C, P는 한 원 위에 있다. 따라서 $\angle APC=\pi-\theta$이다.

또한 삼각형 ABC에 사인법칙을 적용하면 외접원의 지름의 길이는 $\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{\sin\theta}$이다. 이를 이용하여 다시 삼각형 PBC에 사인법칙을 적용하면 $\overline{PC}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{\sin\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 삼각형 PAC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{PC}^2\times\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{5-4\cos\theta}{2}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{5-4\cos\theta}{2}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{5-4\cos\theta}{4}\times\tan\frac{\theta}{2}\quad(\because\theta\neq 0)$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{5-4\cos\theta}{4}\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{5-4\cos\theta}{8}\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\times 1=\frac{1}{8}$$

22. (답 : 30)

$$f(x)=\int(4e^{2x}-3x^2)=2e^{2x}-x^3+C$$

$f(1)=2e^2$으로부터 $C=1$

따라서 $f(x)=2e^{2x}-x^3+1$이고, $f(0)=3$

23. (답 : 16)

평면과 직선이 이루는 각이 0이므로 법선벡터와 방향벡터는 서로 수직하다. 내적 조건 $(1,2,2)\cdot(a,1,1)=0$으로부터 $a=-4$

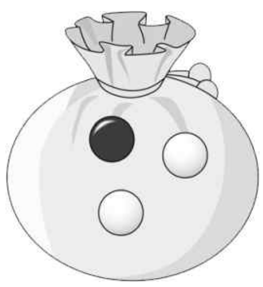
24. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(2+\frac{ax+b}{x+1}\right)^x=20$$

a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]

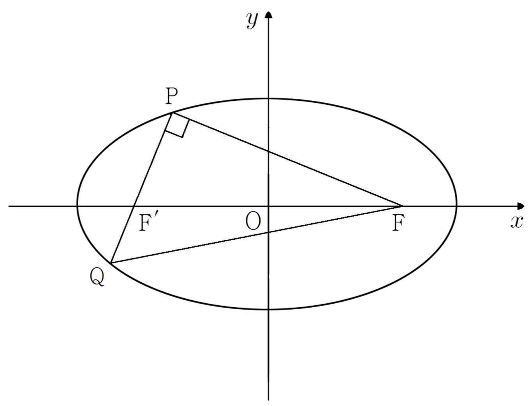
25. 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 번에 한 개씩 공을 꺼내는 시행을 반복하되, 꺼낸 공이 검은 공이었으면 꺼낸 공과 함께 다른 검은 공을 추가로 다시 주머니에 넣고, 흰 공이었으면 꺼낸 채로 주머니에 다시 넣지 않는다. 이러한 시행을 네 번째 반복한 시점에서 흰 공이 모두 꺼내어졌을 때, 첫 번째 시행에서 흰 공이 꺼내어졌을 확률은 $\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



26. 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 점 P, Q 및 두 점 F$(5,0)$, F$'(-5,0)$에 대하여 삼각형 FPQ는 $\angle\text{FPQ}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 직선 PQ는 점 F$'$를 지난다.
삼각형 QFF$'$의 넓이를 S라 할 때, $10S$의 값을 구하시오.

[4점]



24. (답 : 362)

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(2+\frac{ax+b}{x+1}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(2+\frac{a(x+1)+(b-a)}{x+1}\right)^{x+1}\right\}^{\frac{x}{x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(2+a+\frac{b-a}{x+1}\right)^{x+1}\right\}^{\frac{x}{x+1}}=20$

따라서 $a=-1$, $b-a=20$으로부터 $b=19$이다.

25. (답 : 14)

첫 번째, 네 번째에서 흰 공을 뽑을 확률 :

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

두 번째, 네 번째에서 흰 공을 뽑을 확률 :

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

세 번째, 네 번째에서 흰 공을 뽑을 확률 :

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{60}$

따라서 구하는 조건부 확률은

$$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}}=\frac{5}{9}$$

26. (답 : 96)

$\overline{\text{F}'\text{P}}=x$, $\overline{\text{F}'\text{Q}}=y$라 하자. 이 때 타원의 장축은 $2\times\sqrt{49}=14$,

초점거리는 $2\sqrt{49-24}=10$이다.

수직 조건에서 $x^2+(14-x)^2=10$이므로 $x=6$ ($\because x\le 7$)이고,

마찬가지로 수직조건에서 $(y+6)^2+8^2=(14-y)^2$이므로

$y=\frac{12}{5}$이다. 따라서 $\triangle\text{QF}'\text{F}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{F}'\text{Q}}\times\overline{\text{PF}}=\frac{48}{5}$

27. 일차함수 $f(x)=x+k$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\sqrt{2+f(x)}-\sqrt{2-f(x)}=f(x)$$

의 모든 실근의 합이 -30일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

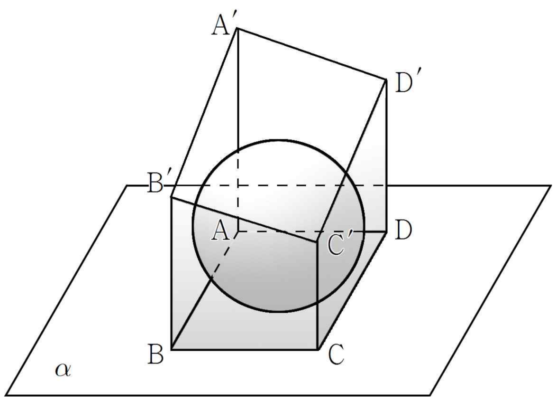
28. $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라고 하자.
이 때, 다음을 만족시키는 x의 값을 작은 것부터 순서대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$이라 하자.

(가) $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$는 5 이하의 자연수이다.

(나) $f(x^2)-2f(x)=0$

$\sum_{n=1}^{13}\dfrac{1}{g(x_n)}=p$일 때, $6p$의 값을 구하시오. [4점]

29. 평면 α 위에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 평면 α 위에 있지 않고, 평면 α를 기준으로 서로 같은 편의 공간에 있는 네 점 A′, B′, C′, D′의 평면 α 위로의 정사영은 각각 A, B, C, D이다. 또한 $\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$, $\overline{\mathrm{AA'}}>\overline{\mathrm{CC'}}$이 성립하며, 이 점들로 육면체 A′B′C′D′−ABCD를 만들면 반지름의 길이가 2인 구가 육면체의 모든 면에 접한다. 사각형 A′ACC′의 넓이가 $18\sqrt{2}$일 때, 평면 A′B′C′D′와 평면 DCC′D′가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos^2\theta=\dfrac{p}{q}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



27. (답 : 10)
주어진 무리방정식을 풀면 $f(x)=-2$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=2$이다. 따라서 실근은 $-2-k$, $-k$, $2-k$이다.
합 조건에서 $-3k=-30$이므로 $k=10$이다.

28. (답 : 649)
(가) 조건에서 $g(x)=\dfrac{f(x)}{n^2}$ (단, n은 자연수, $f(x)<n^2\le 5^2$)
여야 하며, (나) 조건에서 $0\le g(x)<\dfrac{1}{2}$이다.
이 두 조건을 모두 만족하는 $\log x$는 $f(x)$에 따라 다음과 같다.

$f(x)$	$g(x)$
1	$\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{5^2}$
2	$\frac{2}{3^2}$, $\frac{2}{4^2}$, $\frac{2}{5^2}$
3	$\frac{3}{3^3}$, $\frac{3}{4^2}$, $\frac{3}{5^2}$
4	$\frac{4}{3^3}$, $\frac{4}{4^2}$, $\frac{4}{5^2}$
⋮	⋮

따라서 $\sum_{n=1}^{13}\dfrac{1}{g(x_n)}=(3^2+4^2+5^2)\times(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})+2^2=\dfrac{649}{6}$

29. (답 : 59)
구의 중심을 O라고 하자. 또한 $\overline{\mathrm{A'A}}=x$, $\overline{\mathrm{B'B}}=y$라 하자. 이 때, AA′CC′의 넓이가 $2\sqrt{2}(x+y)$이므로 $x+y=9$이다. 육면체의 부피는 밑면이 한 변의 길이가 4인 정사각형이고 높이가 $x+y$인 정사각뿔을 정확히 합동인 육면체로 자른 것과 같으므로 $8(x+y)=72$이다. A′B′C′D′의 넓이를 S라 하면 입체도형의 겉넓이가
$S+16+8(x+y)=S+88$이므로 $S=3\times\dfrac{72}{2}-88=20$
($\because$ 입체도형의 부피를 V, 겉넓이를 A라 할 때 $V=\dfrac{1}{3}Ar$)이다.
따라서 평면 A′B′C′D′와 평면 ABCD의 각을 α라 하면
$\cos\alpha=\dfrac{(\text{사각형 ABCD의 넓이})}{(\text{사각형 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{의 넓이})}=\dfrac{4}{5}$이다.
그런데 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{A'D'}}$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=\overline{\mathrm{D'C'}}$이므로 $\overline{\mathrm{B'D'}}\perp\overline{\mathrm{A'C'}}$이고, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}//\overline{\mathrm{B'D'}}$이므로 이면각 α는 선분 A′C′와 선분 AC의 각과 같다.
$\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{A'C'}}=\sqrt{(x-y)^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{(x-y)^2+32}$에서
$\dfrac{4}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(x-y)^2+32}}$이고, $|x-y|=3\sqrt{2}$이다.
한편 B′의 직선 CC′ 위로의 정사영을 B″, A′의 직선 DD′ 위로의 정사영을 A″라 하면 사각형 A′B′C′D′의 평면 DCC′D′로의 정사영은 평행사변형 B″C′D′A″이고, 넓이는
$\overline{\mathrm{B''C'}}\times\overline{\mathrm{CD}}=|\dfrac{x-y}{2}|\times 4=6\sqrt{2}$이다.
따라서 $\cos\theta=\dfrac{(\text{사각형 B}''\text{C}'\text{D}'\text{A}''\text{의 넓이})}{(\text{사각형 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{의 넓이})}=\dfrac{6\sqrt{2}}{20}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$,
$\cos^2\theta=\dfrac{9}{50}$

30. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$이라고 하자.

$x \geq 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 역함수 $f^{-1}(x)$를 갖고, 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족한다.

(가) $f(a_n) = a_n$
(나) $y = f(x)$의 그래프는 구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{n}$인 이차함수의 그래프의 일부이다.

부등식 $\displaystyle\int_0^m \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx \geq 72$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. (답 : 38)

(가), (나)에 의해 구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 함수 $f(x)$는 x절편을 갖고 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{n}$인 이차함수와 항등함수의 합, 즉

$$f(x) = \frac{1}{n}(x - a_n)(x - a_{n+1}) + x \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

와 같이 표현할 수 있다. 또한 $a_n \leq x \leq a_{n+1}$에서

$\dfrac{1}{n}(x - a_n)(x - a_{n+1}) \leq 0$이므로 $x \geq 0$인 모든 x에 대하여 $f(x) \leq x$이다. 따라서

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$
$$= 2\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{x - f(x)\}dx$$
$$= 2\int_{a_n}^{a_{n+1}} \left\{-\frac{1}{n}(x - a_n)(x - a_{n+1})\right\}dx$$
$$= \frac{2}{n} \times \frac{(a_{n+1} - a_n)^3}{6} = \frac{n^2}{3}$$

이 성립한다. 즉,

$$\int_0^{a_n} \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx = \int_{a_1}^{a_n} \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{18} \quad (n \geq 2)$$

이 성립한다. 이 때,

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{k^2}{3} = 68 < 72 < \sum_{k=1}^{9} \frac{k^2}{3} = 95$$

이므로 $a_9 = 36 < m \leq a_{10} = 45$임을 알 수 있다.

한편 구간 $[a_9,\ a_{10}] = [36,\ 45]$에서 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{1}{9}(x - 36)(x - 45) + x$$
$$= \frac{1}{9}(x - 36)(x - 36 - 9) + x$$
$$= \frac{1}{9}(x - 36)^2 + 36$$

와 같으므로 역함수는 다음과 같다.

$$f^{-1}(x) = 3\sqrt{x - 36} + 36 \quad (36 \leq x \leq 45)$$

따라서 $[36,\ 45]$에서 구하는 적분은 다음과 같이 정의된다.

$$\int_0^m \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$
$$= \int_0^{36} \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx + \int_{36}^m \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$$
$$= 68 + \int_{36}^m \left\{3\sqrt{x - 36} - \frac{1}{9}(x - 36)^2\right\}dx$$
$$= 68 + 2(m - 36)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}(m - 36)^3$$

$m = 37$일 때 적분값은 $68 + 2 - \dfrac{1}{27} < 70$이고,

$m = 38$일 때 적분값은

$$68 + 4\sqrt{2} - \frac{8}{27} > 68 + 3\sqrt{2} \quad \left(\because -\sqrt{2} + \frac{8}{27} < 0\right)$$
$$> 68 + 4 \quad (\because\ 3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4)$$
$$= 72$$

이므로 주어진 부등식을 만족시키는 가장 작은 자연수 m의 값은 38이다.