

2016학년도 대학수학능력시험 대비 모의평가 문제지

1

제 2 교시

수학 영역(B형)

홀수형

5지선다형

1. $\log_4 27 \times \log_9 16$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여, 행렬 AB 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

3. 함수 $y = 4\sin x + 3\cos x$ 의 최댓값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 부분합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 2n + 1$ 이다.

$\sum_{n=2}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

2

수학 영역(B형)

5. 부등식 $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x+1} \geq 2$ 를 만족하는 정수 x 의 개수는?

[3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 역변환이 존재하는 일차변환 f 에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{4}\right)$ 가 성립할 때, 합성변환 $f \circ f$ 에 대하여 실수 x, y 가 $(f \circ f)\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)$ 를 만족시킨다. $x+y$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

7. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$ 이고

$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{3}$ 일 때, $\int_0^1 x f(x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

8. 같은 부호로 대전된 두 점전하 간에 작용하는 전기적인 반발력을 쿨롱힘이라고 한다. 두 전하의 거리가 r , 각 전하의 전하량을 Q_1, Q_2 , 쿨롱힘을 f 라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\log f = k + \log Q_1 + \log Q_2 - 2 \log r \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

어떤 특정 실험상황으로부터 한 전하는 고정시킨 채 다른 전하를 전하량이 100배인 전하로 바꾸었더니 쿨롱힘이 50배 증가하였다. 두 전하사이의 거리는 몇 배가 되었는가?

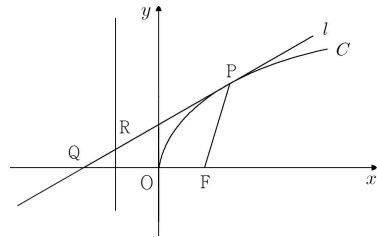
[3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

9. 어떤 공장에서 생산하는 제품 A의 무게는 평균이 100g, 표준편차가 5g인 정규분포를 따른다. 이 제품들 중에서 임의로 100개의 제품을 뽑아 무게의 표본평균에 대한 신뢰구간을 구했더니 [100, 110]이 나왔다. 이번엔 400개의 표본을 뽑아서 무게의 표본평균을 구하였더니 앞서 구한 것과 동일한 표본평균이 나왔다. 신뢰도가 동일하다고 할 때, 400개 표본에 대한 표본평균의 신뢰구간은 $[a, b]$ 이다. $2b - a$ 의 값은? [3점]

- ① 105.5 ② 111 ③ 111.5 ④ 112 ⑤ 112.5

10. 그림과 같이 포물선의 일부 $C: y^2 = 8x$ ($y \geq 0$) 위의 한 점 P에서 그은 접선을 l 이라 하자. x 축과 직선 l 의 교점을 Q, 직선 $x = -2$ 와 직선 l 의 교점을 R이라 할 때, $\overline{PR} : \overline{QR} = 5 : 1$ 이 성립한다. F(2, 0)에 대해, 선분 PF의 길이는? [3점]



- ① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ 5 ⑤ $\frac{31}{6}$

11. 다음은 $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 점화식

$$a_{n+1} - na_n = n^2 - n - 1 \quad \dots (*)$$

이 성립할 때, $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

(*)의 양변을 정리하여

$$a_{n+1} + n + 1 = na_n + n^2 \quad \dots (1)$$

을 얻는다.

이제 $b_n = a_n + n$ 와 같이 놓으면

$$b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1$$

이므로 이를 (1)에 대입하여

$$b_{n+1} = \boxed{(가)} \times b_n$$

를 얻는다.

한편, $a_1 = 1$ 로부터 $b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \times \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \times \dots \times \frac{b_2}{b_1} \times b_1$$

$$= \boxed{}$$

이다.

따라서 $a_n = b_n - n = \boxed{(나)}$ 이 된다.

(가)에 들어갈 식을 $f(n)$, (나)에 들어갈 식을 $g(n)$ 이라할 때, $f(4)g(5)$ 의 값은? [3점]

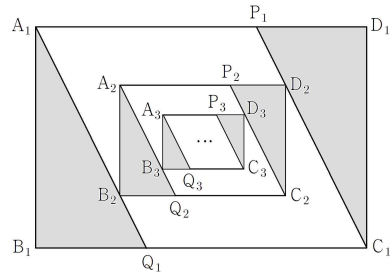
- ① 168 ② 172 ③ 176 ④ 180 ⑤ 184

12. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1} = 3$, $\overline{A_1B_1} = 2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 가 있다. 선분 A_1D_1 를 2:1로 내분하는 점을 P_1 , 선분 B_1C_1 을 1:2로 내분하는 점을 Q_1 이라 하자. 이 때, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 평행사변형 $A_1Q_1C_1P_1$ 을 제외한 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

두 대각선의 교점이 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 두 대각선의 교점과 일치하고, 선분 A_1Q_1 과 선분 P_1C_1 에 접하며, 긴 변과 짧은 변의 길이의 비가 3:2인 직사각형을 $A_2B_2C_2D_2$ 라 하자.

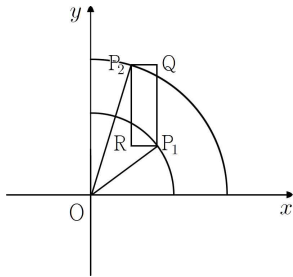
이 때, $\overline{A_2D_2} : \overline{A_2B_2} = 3:2$ 이고, 점 B_2 와 D_2 는 각각 선분 A_1Q_1 , 선분 P_1C_1 위에 있다. 선분 A_2D_2 를 2:1로 내분하는 점을 P_2 , 선분 B_2C_2 를 1:2로 내분하는 점을 Q_2 라 하자. 이 때, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 평행사변형 $A_2Q_2C_2P_2$ 를 제외한 부분의 넓이를 S_2 라 하자.

이와 같은 시행을 계속하여 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 및 평행사변형 $A_nQ_nC_nP_n$ 을 만들어 나아갈 때, 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 에서 평행사변형 $A_nQ_nC_nP_n$ 을 제외한 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[13-14] 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원 위를 움직이는 점 P_1 , 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원 위를 움직이는 점 P_2 가 있다. P_1 는 점 $(3, 0)$ 에서부터 출발하여 시계 반대방향으로 3의 일정한 속도로, P_2 는 점 $(5, 0)$ 에서부터 출발하여 시계 반대방향으로 10의 일정한 속도로 움직이고 있다. 점 P_2 가 $(0, 5)$ 에 최초로 도착한 시점에서 두 점은 더 이상 움직이지 않는다. 만약 선분 P_1P_2 가 x 축 또는 y 축과 평행하지 않으면 점 P_1, P_2 를 대각선으로 가지는 직사각형을 만들고, 이 두 점이 아닌 나머지 꼭짓점을 각각 Q, R 이라 하자. 단, 원점에서 더 먼 꼭짓점을 Q 로 둔다.



13. 선분 P_1P_2 이 y 축과 평행할 때의 $\angle P_1OP_2$ 를 θ 라 하자. $\cos^2\theta = p\cos\theta + q$ 가 성립할 때, $p+q$ 의 값은?
(단, p, q 는 유리수이다.) [3점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

14. 선분 P_1R 의 길이가 1일 때, 선분 P_1Q 의 길이의 시간에 대한 변화율은?

(단, 점 P_1 의 x 좌표가 점 P_2 의 x 좌표보다 크다.) [4점]

- ① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

6

수학 영역(B형)

15. 이차정사각행렬 A, B 가 다음을 만족한다.

$$AB + A + E = O, \quad A^2B + 2E = O$$

다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $A + 2E$ 의 역행렬이 존재하지 않는다.

ㄷ. $(A + 2B)^3 = -27E$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 자연수 n 에 대해 함수 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$ 의 그래프 위의 한 점 $(n, f(n))$ 에서의 접선이 이 함수의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다. 가능한 자연수 n 의 개수는? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

17. 10 이하의 정수 x, y, z, w 는 다음 조건을 만족한다.

- (가) $x > 0, y > 0, z \geq 0, w \geq 0$
 (나) $zw = 2k$ (단, k 는 음이 아닌 정수)

방정식

$$x + y + zw = 10$$

의 해가 되는 서로 다른 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는?

[4점]

- ① 230 ② 232 ③ 234 ④ 236 ⑤ 238

18. 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 에 대해, 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ P(-1 \leq X \leq 1-x) & (0 < x < 2) \\ 0 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$f'(x)$ 가 $0 < x < 2$ 에서 이차함수일 때, X 의 분산 $V(X)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

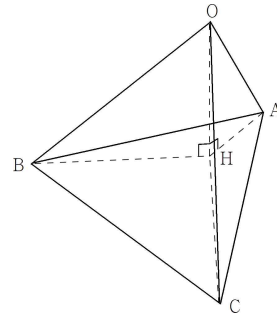
19. 원점 O 를 지나는 직선 $x=y=\frac{z}{2}$ 와 원점 O 를 지나는 구 $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$ 가 있다. 직선 위의 점 P , 구 위의 점 Q , 구의 중심 C 에 대하여 선분 PQ 와 구가 점 Q 이외의 점에서 만나지 않고, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{9}{2}$ 가 성립한다. $|\overrightarrow{OP}|$ 가 최소가 되도록 하는 점 P 의 좌표가 (a, b, c) 일 때, $(a+b+c)^2$ 의 값은? [4점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

20. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 를 한 면으로 갖는 사면체 $O-ABC$ 가 있다. 점 O 에서 삼각형 ABC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 다음이 성립한다.

- (가) $\overline{OH}=2$
 (나) $\overline{AH}:\overline{BH}:\overline{CH}=1:\sqrt{7}:\sqrt{7}$

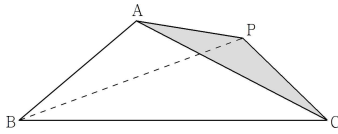
직선 OA 와 직선 BC 사이의 거리는? [4점]



- ① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

21. $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\angle ABC = \theta$ 인 삼각형 ABC가 있다.
 각 B의 이등분선 위의 한 점 P를 $\overline{AP}=\overline{CP}$ 가 되도록
 잡을 때, 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$ 라고 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형

22. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=2e^2$ 이고,
 $f'(x)=4e^{2x}-3x^2$
 일 때, $10 \times f(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 평면 $\alpha : x+2y+2z-10=0$ 과 직선 $l : \frac{x}{a}=y=z$ 가 서로
 평행할 때, a^2 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

24. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(2 + \frac{ax+b}{x+1}\right)^x = 20$$

$a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

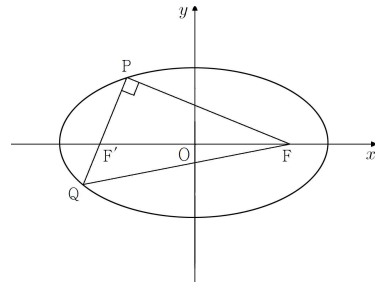
25. 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 번에 한 개씩 공을 꺼내는 시행을 반복하되, 꺼낸 공이 검은 공이었으면 꺼낸 공과 함께 다른 검은 공을 추가로 다시 주머니에 넣고, 흰 공이었으면 꺼낸 채로 주머니에 다시 넣지 않는다. 이러한 시행을 네 번째 반복한 시점에서 흰 공이 모두 꺼내어졌을 때, 첫 번째 시행에서 흰 공이 꺼내어졌을 확률은 $\frac{p}{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]



26. 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 위의 점 P, Q 및 두 점 $F(5, 0), F'(-5, 0)$ 에 대하여 삼각형 FPQ 는 $\angle FPQ = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이고, 직선 PQ 는 점 F' 를 지난다. 삼각형 QFF' 의 넓이를 S 라 할 때, $10S$ 의 값을 구하시오.

[4점]



27. 일차함수 $f(x) = x + k$ 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\sqrt{2+f(x)} - \sqrt{2-f(x)} = f(x)$$

의 모든 실근의 합이 -30 일 때, k 의 값을 구하시오. [4점]

28. $\log x$ 의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$ 라고 하자.

이 때, 다음을 만족시키는 x 의 값을 작은 것부터 순서대로 x_1, x_2, x_3, \dots 이라 하자.

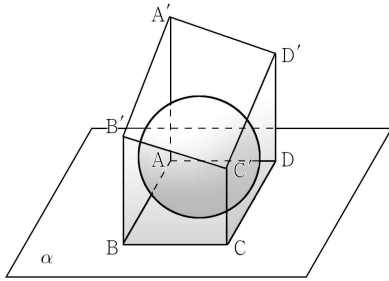
(가) $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ 는 5 이하의 자연수이다.

(나) $f(x^2) - 2f(x) = 0$

$\sum_{n=1}^{13} \frac{1}{g(x_n)} = p$ 일 때, $6p$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 평면 α 위에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다.
 평면 α 위에 있지 않고, 평면 α 를 기준으로 서로 같은 편
 공간에 있는 네 점 A', B', C', D' 의 평면 α 위로의 정사영은 각각
 A, B, C, D이다. 또한 $\overline{BB'} = \overline{DD'}$, $\overline{AA'} > \overline{CC'}$ 이
 성립하며, 이 점들로 육면체 $A'B'C'D'-ABCD$ 를 만들면
 반지름의 길이가 2인 구가 육면체의 모든 면에 접한다.
 사각형 $A'ACC'$ 의 넓이가 $18\sqrt{2}$ 일 때, 평면 $A'B'C'D'$ 와 평면
 $DCC'D'$ 가 이루는 각을 θ 라 하면 $\cos^2\theta = \frac{p}{q}$ 이다.
 $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$ 이라고 하자.
 $x \geq 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 는 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 갖고,
 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족한다.

- (가) $f(a_n) = a_n$
- (나) $y = f(x)$ 의 그래프는 구간 $[a_n, a_{n+1}]$ 에서
 최고차항의 계수가 $\frac{1}{n}$ 인 이차함수의
 그래프의 일부이다.

부등식 $\int_0^m \{f^{-1}(x) - f(x)\} dx \geq 72$ 을 만족시키는 자연수
 m 의 최솟값을 구하시오. [4점]