시즌 2023 미니링 커리큘럼
Season 2023 Miniring Curriculum

2024학년도 대학수학능력시험 대비

수학 상/하
단권 총정리

기초 탈출 버전
FUNDAMENTAL VER.

TEAM MINIRING
미니링 모의고사 팀

2024학년도 대수능 대비 기초 탈출용

수학 상/하 단권 총정리

1. 다항식

다항식끼리 더하고 빼기

같은 차수, 같은 문자끼리 더하는 게 기본!

예시 1) $(x^2+x+1)-(x^2+2x-3)=x^2+x+1-x^2-2x+3=-x+4$

☞ 식을 뺄 때는 괄호 안의 식 전부에 마이너스를 붙여줘야 한다.

다항식끼리 곱하기

괄호 안에서 하나씩 골라서 끼리끼리 곱해준 뒤 모두 더한다.

예시 2) $(x+2)(-2x+5)=-2x^2+5x-4x+10=-2x^2+x+10$

☞ 하나씩 고른다는 의미는 왼쪽 괄호에서 x, 오른쪽 괄호에서 5를 골라서 곱하는 것과 같이 항을 하나씩 골라주는 것이다.

예시 3) $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+x^2+2x^2+3x^2+2x+3x+6x+6=x^3+6x^2+11x+6$

☞ 이 경우는 $(x+1)$에서 하나, $(x+2)$에서 하나, $(x+3)$에서 하나를 골라서 곱한 다음 그것들을 모두 더한 것이다.

인수분해와 곱셈 공식

다음 공식들은 기본 공식들이다.

① $ax+ay=a(x+y)$

② $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

③ $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ / $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

☞ 왼쪽 식의 y 자리에 $-y$를 넣으면 오른쪽과 같은 식이 나온다.
일단 왼쪽 식으로 외운 뒤, y 자리에 $-y$를 넣으면 나온다고 외워두어도 좋다.

④ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$ / $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$

☞ 일단 왼쪽 식은 외우자. x의 차수는 하나씩 떨어지고, y의 차수는 하나씩 늘어나며, 계수는 1, 3, 3, 1이다.
오른쪽 식의 경우에는 왼쪽 식의 y 자리에 $-y$를 넣은 것으로 보아도 무관하다.

⑤ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ☞ 합차공식

⑥ $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ / $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

☞ 마찬가지로 왼쪽 식을 외운 다음 y 자리에 $-y$를 넣어서 오른쪽 식을 유도하는 것이 편하다.

⑦ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

인수분해라는 것은 전개된 식을 묶는 과정이고, 곱셈 공식이라는 것은 묶인 것을 다시 전개해서 풀어주는 것이다.
즉, 인수분해 공식을 외워두면 굳이 곱셈 공식을 따로 외워둘 필요는 없다. 순서만 바뀌고 내용은 똑같기 때문이다.

예시 4) $x^3-6x^2+12x-8$을 인수분해하면 $(x-2)^3$이다.

☞ 알고 있는 인수분해 공식 중 가장 비슷한 것을 찾아서 같은 꼴로 만들어주면 된다.
다만, 확실하게 인수분해 되는 지는 꼭 확인해야 한다. 막상 까놓고 보면 다른 공식인 경우도 있기 때문이다.

■■■ 치환을 통한 인수분해 ■■■

치 환 복잡하거나 계산하기 어려운 식을 하나의 문자로 묶어버리는 것

예시 5) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$을 인수분해하기 위해 $x^2-2x=t$로 치환하자.

그러면 위의 식은 t^2-2t-3으로 치환되고,

$$t^2-2t-3=(t+1)(t-3)=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)=(x-1)^2(x+1)(x-3)$$

으로 인수분해된다.

예시 6) x^4+4x^2+3을 인수분해하기 위해 $x^2=t$로 치환하자.

그러면 위의 식은 $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)=(x^2+1)(x^2+3)$으로 인수분해가 된다.

■■■ 다항식의 곱셈 완성하기 ■■■

예시 7) 예를 들어, $x^3-2x^2+1=(x-1)(\ \ ?\ \ )$에서 $?$에 들어갈 식을 구해보자.

① 일단 1차식과 곱해서 3차식이 되려면 $?$는 2차식이어야 한다.

② 최고차항의 계수는 1일테니까 $x^2+\square x+\square$으로 둔다.

③ 다음으로 곱해서 차수가 같은 것들끼리 짝짓는다.
차수가 높은 항부터 차례대로 계수를 맞춰가면 되는데, 일단 이차항의 계수를 먼저 맞춰보자.
$1\times\square+(-1)\times1=-2$이므로 일차항의 계수 $\square=-1$이다.

④ 따라서 $?=x^2+x+\square$까지 구했고, 상수항을 구해주면 된다.
마찬가지의 방식으로 일차항의 계수를 맞춰주면 $?=x^2-x-1$이다.

인수정리와 인수분해

인수정리 다항식 $f(x)$에 대해서 $f(a)=0$이면 $f(x)$를 인수분해 했을 때, $(x-a)$가 들어간다.

예시 7) 다항식 $f(x)=x^3+x-2$에 대하여 $f(1)=0$이므로 $f(x)$를 인수분해 했을 때, $(x-1)$가 들어간다.

☞ 일단 넣어서 0 되는 x 값만 찾으면 인수분해는 훨씬 간단해진다.

$cf.$ 간혹 **A를 인수로 갖는다 / A로 나누어 떨어진다**는 표현이 나오는 경우가 있다. 이 역시 **인수분해 했을 때, A가 들어간다는 의미**로 해석하면 된다. 즉, 위에서 $x-a$가 들어간다는 말도 결국 $x-a$를 인수로 갖는다는 말과 같은 말이다.

인수분해 완성하기

① 묶을 수 있는 아이들은 묶어놓기

예를 들어, x^3-6x^2의 경우 x^2이 묶여서 $x^2(x-6)$으로 나타낼 수 있다.

② 인수분해 공식 이용하기

예를 들어, $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$처럼 인수분해 공식이 **바로 보이는 경우**는 인수분해 공식을 대입한다.

③ 인수정리 이용하기

식의 값이 0이 되는 x를 찾은 다음에 인수분해가 되면 그때 인수분해를 다시 하면 된다.

예시 8) $x^4-2x^3-x^2+2x$를 인수분해하자.

① 일단 x로 묶을 수 있으므로 $x(x^3-2x^2-x+2)$로 놓을 수 있다.

② 당장 마땅히 보이는 인수분해 공식이 없으므로 인수정리를 이용해야 한다. $x=1$을 넣었을 때 0이 된다.
따라서 $(x-1)$이 인수분해 후 들어간다.

③ $x(x^3-2x^2-x+2)=x(x-1)(x^2-x-2)$으로 인수분해 된다.
$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이므로 인수분해를 완성하면 $x(x-1)(x+1)(x-2)$이다.

항등식

항등식 항상 성립하는 식

예시 9) $x^2-2x+3=ax^2+bx+c$가 항등식이려면 $a=1,\ b=-2,\ c=3$이어야 한다.

다시 말해, 두 식이 항등식이라는 것은 그냥 같은 식이어야 한다는 뜻이다.

---

2. 방정식과 부등식

일차방정식

일차방정식 $ax+b=0$의 해는 $x=-\dfrac{b}{a}$이다.

이차방정식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. (근의 공식)

이때, 위의 식에서 b^2-4ac의 값이 0보다 크면 실근 x는 2개 존재할 것이고,
b^2-4ac의 값이 0이라면 실근 x는 1개만 존재하며(중근),
b^2-4ac의 값이 0보다 작다면 실근 x는 존재하지 않는다.
☞ 근의 공식을 잘 관찰해보면 왜 그런지 금방 파악할 수 있다.
실수 범위에서는 루트 안이 음수가 될 수 없음을 기억하자.

여기서 b^2-4ac의 값을 **판별식**이라고 하고, 보통 D로 나타낸다.

예시 1) 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 실근이 존재하는지 판단하고, 존재한다면 실근을 모두 구하시오.
☞ $D=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times5=16>0$이므로 해가 존재한다.
근의 공식에 집어넣으면 $x=\dfrac{6\pm\sqrt{16}}{2}=3\pm2$이므로 $\pm$가 $-$일 때 $x=1$이고, $+$일 때 $x=5$이다.

이차방정식의 해는 근의 공식을 통해 구할 수도 있지만, 인수분해를 통해서도 구할 수 있다.
예를 들어, 위의 예시의 경우 $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0$으로 고쳐지므로,
각 괄호 안의 값이 0이 되려면 $x=1,\ 5$이다.

$cf.$ **실근**이란 실수인 근을 의미한다.

고차방정식

적어도 수능에서 출제되는 절대 다수의 고차방정식은 **인수분해만 잘 하면 된다.**
인수분해 공식이 보인다면 바로 인수분해를 해 버리면 되지만, 안 보인다면 인수정리를 사용하면 된다.

인수정리를 이용해서 인수분해하면
이차 이하의 식만 남게 되므로 인수분해를 하거나, 근의 공식을 이용해서 해를 모두 구한다.

예시 2) 삼차방정식 $x^3-6x^2+11x-6=0$의 실근을 모두 구하시오.
☞ 방정식에 $x=1$을 넣었을 때 0이 되므로 인수정리에 의해 $(x-1)$을 인수로 갖고,
인수분해하면 $(x-1)(x^2-5x+6)=0$이 된다.
한편, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$이 된다.
따라서 해는 $x=1,\ 2,\ 3$이다.

근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $x=\alpha,\ \beta$라 하자. 이때,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

을 만족시킨다.

☞ $x=\alpha,\ \beta$을 실근으로 가진다면 인수정리에 의해 $a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2+bx+c$이 된다.
항등식이므로 계수를 비교하면 위와 같은 결과를 얻을 수 있다.

예시 3) 이차방정식 x^2-5x+3의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

☞ 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=3$이다. 따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\times3=19$이다.

근과 계수의 관계의 일반화

n차방정식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +a_0=0$이 n개의 실근을 가질 때,

실근들의 합은 $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$이고, 실근들의 곱은 $(-1)^n\times\dfrac{a_0}{a_n}$이다.

예시 4) 삼차방정식 $x^3-3x^2+4x-5=0$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, 세 실근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하자.
$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta\gamma=5$이다.

연립방정식의 풀이

소거법 한 문자를 제거해서 나머지 문자에 대한 식으로 나타내서 푼다.

예시 5) 연립방정식 $\begin{cases}x^2-y=7\\x+3y=9\end{cases}$ 의 해를 모두 구하시오.

☞ 위쪽 식에 3을 곱하면 $3x^2-3y=21$이므로 아래쪽 식과 더하자. 그러면 $3x^2+x=30$이고, 방정식
$3x^2+x-30=0$을 풀면 $x=3,\ -\dfrac{10}{3}$이다. 각각의 x를 위의 식에 대입하면 해는 $(3,\ 2),\ \left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{47}{9}\right)$이다.

대입법 한 문자를 다른 문자에 대한 식으로 나타내서 푼다.

예시 6) 연립방정식 $\begin{cases}x^2-y=7\\x+3y=9\end{cases}$ 의 해를 모두 구하시오.

☞ 위의 식을 이항시키면 $y=x^2-7$임을 얻는다. 이를 아래쪽 식에 넣으면 $x+3(x^2-7)=9$이 되므로
정리한 방정식 $3x^2+x-30=0$을 풀면 **예시 5)**와 같은 해를 얻는다.

☞ 소거법은 경우에 따라 못 쓰는 경우도 있지만, 대입법은 대부분의 경우 복잡하더라도 어떻게든 풀리는 경우가 많다.

직선의 방정식

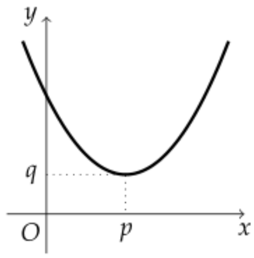
일차함수는 $y=ax+b$로 나타낼 수 있지만, 이를 조금 더 일반화시키면 $ax+by+c=0$으로도 나타낼 수 있다.

☞ by만 우변으로 이항시켜서 $-b$로 나누어보자.

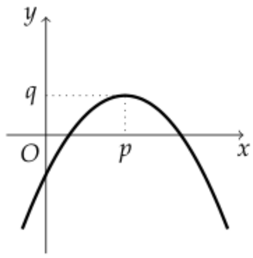
직선의 평행과 수직 두 직선이 평행이면 두 직선의 기울기가 서로 같고,
두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

이차함수와 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내지는 함수



$a>0$



$a<0$

꼭짓점 이차함수가 최댓값 또는 최솟값을 가질 때의 좌표를 **꼭짓점**이라고 한다. 위의 그림에서 점 $(p,\ q)$이다.

대칭축 그래프가 좌우대칭을 이루도록 하는 축을 **대칭축**이라고 한다. 위의 그림에서 직선 $x=p$이다.

꼭짓점을 구하는 방법 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾼다.
이런 형태를 **이차함수의 일반형**이라고 한다.

예시 7) 이차함수 $y=x^2-6x+7$의 꼭짓점은 $(3,\ -2)$이다.

☞ 일반형으로 고치면 $x^2-6x+7=(x^2-6x+9)-2=(x-3)^2-2$이므로, 꼭짓점은 $(3,\ -2)$이다.

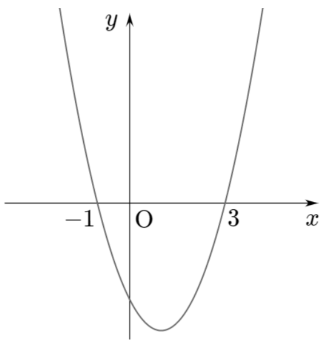
예시 8) 이차함수 $y=-2x^2+4x+3$의 꼭짓점은 $(1,\ 5)$이다.

☞ 일반형으로 고치면 $-2x^2+4x+3=(-2x^2+4x-2)+5=-2(x-1)^2+5$이므로, 꼭짓점은 $(1,\ 5)$이다.

이차함수의 x절편을 구하려면 방정식 $f(x)=0$을 풀면 된다.

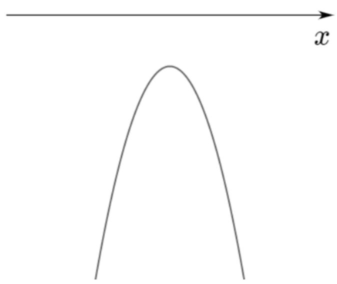
단, $f(x)=0$의 판별식이 $D<0$이면 해가 존재하지 않으므로 x축과 만나지 않고 **붕 떠 있는 개형**이 나타난다.
마찬가지로, $D=0$이면 **x축과 접하며**, $D>0$이면 x축과 **서로 다른 두 점**에서 만난다.

예시 9) $y=x^2-2x-3$의 그래프는 다음과 같다.



☞ $D=(-2)^2-4\times1\times(-3)>0$이므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

예시 10) 이차함수 $y=-x^2+4x-6$의 그래프는 다음과 같다.



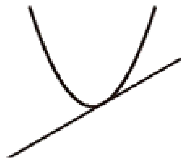
☞ $D=4^2-4\times(-1)\times(-6)<0$이므로 x축과 만나지 않는다.

직선과 이차함수의 위치 관계

중요! 두 함수의 교점의 x좌표는 무조건 방정식 $f(x)=g(x)$라고 두어 풀 수 있다.

☞ 예시) $y=x+2$와 $y=2x-1$의 교점을 구하려면 $x+2=2x-1$의 방정식을 풀어 $x=3$을 얻고,
이를 다시 식에 대입하여 $y=5$임을 얻는다. 따라서 교점은 $(3,\ 5)$이다.

☞ 결국 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D를 통해 위치 관계를 판단할 수 있다.

판별식 D의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다	한 점에서 만난다 (접한다)	만나지 않는다
그래프			

예시 11) 이차함수 $f(x)=x^2-2x+4$와 직선 $y=3x-2$의 교점은 이차방정식 $x^2-2x+4=3x-2$의 실근과 같다.

☞ 정리하면 $x^2-5x+6=0$이고, 판별식이 0보다 크므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$이므로 교점은 $x=2,\ 3$에서 가지며, 각각의 좌표를 대입하면 $(2,\ 4)$, $(3,\ 7)$이다.

이차부등식

식을 한쪽으로 전부 몰아 넣고, 이차함수의 그래프를 그려 0보다 큰/작은 부분을 관찰한다.

예시 16) 부등식 $x-1<2x-9\le x+5$ 의 해를 구하려면

연립부등식 $\begin{cases} x-1<2x-9 \cdots (1) \\ 2x-9\le x+5 \cdots (2) \end{cases}$ 의 해를 구하면 된다.

(1)의 해는 $x>8$이고, (2)의 해는 $x\le 14$이므로 공통 범위는 $8<x\le 14$이다.

절댓값이 포함된 부등식 ①

① c가 양수일 때, 부등식 $|f(x)|<c$은 $-c<f(x)<c$로 고쳐서 쓴다.

② c가 양수일 때, 부등식 $|f(x)|>c$은 '$f(x)>c$ 또는 $f(x)<-c$' 으로 고쳐서 쓴다.

주의! 두 부등식 중에 하나로 쓰라는 말이 아니다. 두 부등식의 해 모두를 원래 부등식의 해로 갖는다는 의미이다.)

③ $c,\ d(c<d)$가 양수일 때, 부등식 $c<|f(x)|<d$은
'$c<f(x)<d$ 또는 $-d<f(x)<-c$' 으로 고쳐서 쓴다.

예시 12) 부등식 $2<|x+1|<4$의 해는 다음과 같이 구한다.

☞ '$2<x+1<4$ 또는 $-4<x+1<-2$'로 고쳐 쓴 다음 이항시키면
각각 '$1<x<3$ 또는 $-5<x<-3$'으로 나온다.

절댓값이 포함된 부등식 ②

중요! 절댓값이 포함된 부등식 문제는 **경곗값을 기준으로 구간을 나누어서** 푼다.
여기서 경곗값이란, 절댓값 안이 0이 되는 수를 의미한다.

예시 13) 부등식 $|x+1|+|2x-4|<4$의 해는 다음과 같이 구한다.

☞ ① 왼쪽 절댓값이 0이 되는 $x=-1$, 오른쪽 절댓값이 0이 되는 $x=2$이다.
따라서 구간은 $x<-1$일 때, $-1\le x<2$일 때, $x\ge 2$일 때로 나누어서 관찰한다.

☞ ② $x<-1$일 때 : $-(x+1)-(2x-4)<4$이므로 정리한 식인 $-3x+3<4$을 풀면 $x>-\frac{1}{3}$이다.

$x>-\frac{1}{3}$이면서 $x<-1$인 수는 존재하지 않으므로 이 구간에서는 해가 존재하지 않는다.

$-1\le x<2$일 때 : $(x+1)-(2x-4)<4$이므로 정리한 식인 $-x+5<4$을 풀면 $x>1$이다.
이 구간에 있는 수들 중 $-1\le x<2$인 것은 $1<x<2$이다.

$x\ge 2$일 때 : $(x+1)+(2x-4)<4$이므로 정리한 식인 $3x-3<4$을 풀면 $x<\frac{7}{3}$이다.

이 구간에 있는 수들 중 $x\ge 2$인 것은 $2\le x<\frac{7}{3}$이다.

☞ ③ 따라서 해는 $1<x<2$, $2\le x<\frac{7}{3}$인데 이 두 식을 합치면 $1<x<\frac{7}{3}$으로 쓸 수 있다.

$cf.$ 절대 어려운 게 아니다. 구간을 나눠서 각 구간별로 해를 구하고 합치기만 하면 된다.

연립부등식

연립방정식이랑 똑같다. 연립부등식을 이루는 각 부등식을 푼 뒤, 공통범위를 구하면 된다.

예시 14) 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1>-3 \\ -x+5>3 \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

☞ 위쪽 식의 해는 $2x>-2$이므로 $x>-1$이고, 아래쪽 식의 해는 $x<2$이므로 공통 범위는 $-1<x<2$이다.

주의! 연립부등식은 두 식이 공통적으로 만족하는 해를 의미한다.
즉, 위의 **예시 14)**의 경우 〈 $x>-1$ 이면서 $x\le 2$인 해 〉가 답이라는 거지
〈 $x>-1$ 이나 $x\le 2$ 중 하나라도 만족하는 해 〉를 의미하는 것이 아니다.

여러 개의 부등식이 이어진 경우

부등식 $A<B<C$은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 으로 바꾸어서 풀면 된다.

주의! 부등식에 등호가 들어가 있으면 등호 역시 그대로 옮겨준다.

예시 15) 부등식 $x-1<2x-9\le x+5$ 의 해를 구하려면

연립부등식 $\begin{cases} x-1<2x-9 \cdots (1) \\ 2x-9\le x+5 \cdots (2) \end{cases}$ 의 해를 구하면 된다.

(1)의 해는 $x>8$이고, (2)의 해는 $x\le 14$이므로 공통 범위는 $8<x\le 14$이다.

---

3. 도형의 방정식

평행이동

① 점 $(x,\ y)$를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 이동하면 $(x+a,\ y+b)$이다.

② 함수 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 이동하면 $y=f(x-a)+b$이다.

☞ 왜 x에서 a를 빼주는지 궁금하다면 이 식에다 점 $(x+a,\ y+b)$를 집어넣어보자.

예시 1) 함수 $y=x^2-1$를 x축 방향으로 2, y축 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것은
$y=(x-2)^2-1+3=x^2-4x+6$이다.

대칭이동

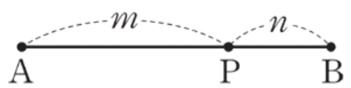
① 점 $(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(x,\ -y)$이고,
y축에 대하여 대칭이동하면 $(-x,\ y)$이고,
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-x,\ -y)$이다.

② 또한, $(x,\ y)$를 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(y,\ x)$이다.

예시 2) 점 $(1,\ -2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(1,\ 2)$이고, $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 $(-2,\ 1)$이다.

내분과 외분

내분의 개념



그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 나누는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점을 P라 할 때, P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 **내분한다**고 표현한다.

내분점의 좌표 구하기 ① $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 $\dfrac{m}{m+n}$배이다.

② 따라서 B에서 A의 좌표를 뺀 것을 l이라 할 때, $\dfrac{m}{m+n}\times l$의 값을 A의 좌표에다가 더해주면 P의 좌표를 구할 수 있다.

예시 3) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(8,\ 5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는 다음과 같이 구한다.

① B에서 A의 x좌표를 빼면 6이다.

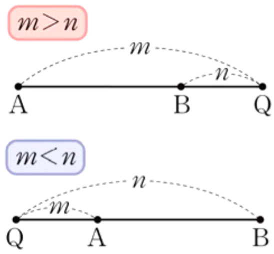
$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{1+2}\times\overline{\mathrm{AB}}$이므로 기준점에 대한 x좌표의 변화량이 $\dfrac{2}{3}\times 6=4$임을 구한다.

② A의 좌표에다가 앞에서 구한 4를 더하면 x좌표는 6임이 도출된다.

③ 마찬가지의 방법으로 y좌표를 구하면 4이므로, $\mathrm{P}(6,\ 4)$이다.

주의! $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$로 내분하는 것과 $\overline{\mathrm{BA}}$를 $m:n$으로 내분하는 것은 서로 다르다. 전자는 A에서 (상대적으로) m만큼, B에서 n만큼 떨어진 지점인데에 반해, 후자는 B에서 (상대적으로) m만큼, B에서 n만큼 떨어진 지점이다.

외분의 개념



그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 나누는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 바깥의 점을 Q라 할 때, Q는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 **외분한다**고 표현한다.

외분점의 좌표 구하기

[$m>n$인 경우]

① $\overline{\mathrm{AQ}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 $\dfrac{m}{m-n}$배이다. ☞ 그림을 보면서 이해하면 조금 더 편할 것이다.

② 따라서 B에서 A의 좌표를 뺀 것을 l이라 할 때,

$\dfrac{m}{m-n}\times l$의 값을 A의 좌표에다가 더해주면 Q의 좌표를 구할 수 있다.

[$m<n$인 경우]

① $\overline{\mathrm{AQ}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 $\dfrac{m}{n-m}$배이다.

② 따라서 B에서 A의 좌표를 뺀 것을 l이라 할 때,

$\dfrac{m}{n-m}\times l$의 값을 A의 좌표에다가 빼주면 Q의 좌표를 구할 수 있다.

예시 4) 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는 다음과 같이 구한다.

① B에서 A의 x좌표를 빼면 -1이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{2-1}\times\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 기준점에 대한 x좌표의 변화량이 $2\times(-1)=-2$임을 구한다.

② A의 좌표에다가 앞에서 구한 -2를 더하면 x좌표는 1임이 도출된다.

③ 마찬가지의 방법으로 y좌표를 구하면 7이므로 $\mathrm{Q}(1,\ 7)$이다.

중요! 무조건 공식으로 외우려고 하지 말고 그림 그려서 이해하면서 풀자. 공식만 외워서는 절대 고득점을 쟁취할 수 없다.

■■■ 두 점 사이의 거리 ■■■

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 d는

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. ☞ 피타고라스의 정리를 사용하면 유도된다.

x좌표끼리의 차가 직각삼각형의 가로 길이, y좌표끼리의 차가 세로 길이, d는 빗변 길이이다.

예시 5) 두 점 $(2,\ 1)$과 $(5,\ 5)$ 사이의 거리를 구하시오.

☞ $\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$

두 함수의 교점

무슨 함수가 나오든 간에 $f(x)$, $g(x)$의 교점을 구하라고 하면 $f(x)=g(x)$의 해를 구하면 되는 것이다.

☞ 이 방정식은 교점에서는 두 함수의 x좌표와 y좌표가 모두 같아야 함을 이용한 것이다.
(다시 말해, 같은 x를 넣어도 y가 같아야 하니까)

예시 6) $y=2x-3$과 $y=x^2-2x+1$의 교점을 구하시오.

☞ $2x-3=x^2-2x+1$로 두면 $x^2-4x+4=0$이므로 $(x-2)^2=0$의 해인 $x=2$에서 교점을 갖는다.
$y=2x-3$에 이 좌표를 넣으면 $(2,\ 1)$이 교점이다.

참조 만약 교점을 구하는 대상이 함수가 아니더라도, 그냥 연립방정식을 세우면 된다.

☞ 결국 함수끼리 교점을 구하는 것도 연립방정식 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$을 푸는 것과 같은 것이다.

점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

절댓값을 씌우는 것은 구하는 것이 거리(항상 양수)이기 때문이다.

예시 7) 점 $(2,\ 1)$과 직선 $y=3x-9$ 사이의 거리를 구하시오.

☞ 직선의 방정식을 $3x-y-9=0$으로 고친 다음 위의 식에 그대로 대입하면

$$\frac{|3\times2+(-1)\times1-9|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$cf.$ 방정식 $ax+by+c=0$은 직선을 나타낸다.
by를 우변으로 이항시켜서 양변을 $-b$로 나누면 우리가 잘 아는 일차함수의 식이 나온다.

원의 방정식

원은 중심 $(a,\ b)$에서 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합이다.
즉, 원 위의 모든 점은 원의 중심과 떨어진 거리가 반지름(r)으로 모두 동일해야 한다.
이를 식으로 나타내면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

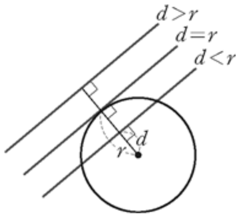
으로 나타낼 수 있는데, 이를 **원의 방정식**이라고 한다.

예시 8) 중심이 $(1,\ 3)$이고, 반지름이 2인 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$이다.

☞ 이를 전개하면 $x^2+y^2-2x-6y+5=0$으로도 나타낼 수 있다.
만약 이런 형태로 주어진 식을 원의 방정식 꼴로 바꾸려면 완전제곱식을 만들어주면 된다.

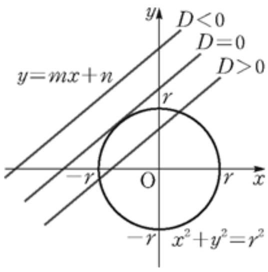
원과 직선이 만나는 점의 개수

방법 ① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 비교하는 방법



원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r이라 하자.
위의 그림처럼 $d>r$이면 만나지 않고, $d=r$이면 접하고, $d<r$이면 두 점에서 만난다.
원의 중심과 직선 사이의 거리는 앞 페이지에서 소개한 공식을 사용하면 된다.

방법 ② 판별식을 이용하는 방법



어쨌든 두 방정식의 교점을 구하는 것은 연립방정식

$$\begin{cases} y=mx+n \cdots (1) \\ x^2+y^2=r^2 \cdots (2) \end{cases}$$

을 푸는 것과 같다. 이 연립방정식을 풀기 위해, (2)에다 $y=mx+n$을 대입하면 이차방정식

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이 된다.

결국 이 이차방정식의 해가 존재한다면 교점이 존재하고, 존재하지 않는다면 교점이 없을 것이다.
해의 존재 여부는 판별식으로 알아볼 수 있다. 판별식 D의 값이

$D>0$이면 **두 점에서 만난다.**
$D=0$이면 **접한다.**
$D<0$이면 **만나지 않는다.**

4. 집 합

집 합

집 합 수들을 모아놓은 것을 **집합**이라고 한다.

예를 들어, 모은 수들을 $a,\ b,\ c$라고 할 때 집합 S는 $S=\{a,\ b,\ c\}$로 나타낼 수 있다.

집합을 이루는 각 수를 **원소**라고 하며, 원소의 개수는 $n(S)$로 나타낸다.

예시 1) 집합 $X=\{0,\ 1,\ 3\}$의 원소는 $0,\ 1,\ 3$이고, $n(X)=3$이다.

공집합 원소의 개수가 0개인 집합, 즉, 원소가 아무것도 없는 집합을 **공집합**이라고 하고, $\varnothing$으로 나타낸다.

집합을 나타내는 방법

특정 조건을 만족하는 x를 모두 모아놓은 집합은

$$S=\{x\,|\,x\text{에 대한 조건}\}$$

으로 나타낸다.

예시 2) $S=\{x\,|\,x\text{는 } 3\text{의 배수},\ x\le 10\}$일 때, $S=\{3,\ 6,\ 9\}$이다.

집합의 표현과 부분집합

원소의 표현 a가 집합 A의 원소일 때, $a\in A$로 나타내고, 원소가 아니면 $a\not\in A$로 나타낸다.

부분집합 집합 B가 A를 포함할 때, $A\subset B$로 나타내고, A를 B의 **부분집합**이라 한다.

한편, $A=B$여도 A를 B의 부분집합이다.

A의 원소 중 하나라도 B의 원소가 아니면 부분집합이 아니다.

예시 3) $A=\{2,\ 4\},\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$일 때, $A\subset B$이며, 예를 들어, $2\in A$이다.

합집합과 교집합

합집합 두 집합 A, B의 원소들을 전부 모아놓은 집합을 **합집합**이라고 하고, $A\cup B$로 나타낸다.

예시 4) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.

교집합 두 집합 A, B의 겹치는 원소들만 모아놓은 집합을 **교집합**이라고 하고, $A\cap B$로 나타낸다.

예시 5) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때, $A\cap B=\{2,\ 3\}$이다.

여집합과 차집합

전체 집합 전체라고 부를 수 있는 집합을 의미하며, 보통 U로 나타낸다.
U는 실수 전체의 집합이 될 수도 있고, 자연수 집합이 될 수도 있다. 문제에서 주기 나름이다.

여집합 집합 A가 U의 부분집합일 때, A의 원소들을 제외한 나머지 U의 부분집합을 여집합이라고 하고, A^c로 나타낸다.

예시 6) $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, $A^c=\{4,\ 5\}$이다.

☞ $A\cup A^c=U$, $A\cap A^c=\varnothing$이다. 왜 그런지는 여집합의 정의를 다시 잘 읽어보도록 하자.

차집합 예를 들어, $A-B$의 경우 A에서 B와 겹치는 부분만 제거한다.

예시 6-1) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$일 때, $A-B=\{1\}$이다.

문제를 푸는 방법(귀류법)

귀류법 결론을 부정하여 모순점을 찾아내는 논증 방식

예시 7) 방정식 $x^2-3x+4=0$은 $x=1$을 해로 갖지 않는다. 이를 귀류법을 이용해 증명하면 다음과 같다.

☞ $x=1$을 해로 가진다면 식의 값이 0이어야 하는데 $1^2-3\times1+4\neq0$이므로 모순이다. 따라서 $x=1$은 해가 아님.

5. 함 수

■■■ 정의역과 치역 ■■■

정의역 함수가 정의되는 범위를 의미한다.

예를 들어, $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이라는 것은 x 자리에 어떤 실수든 전부 들어갈 수 있다는 것이다.

치 역 $f(x)$의 값이 될 수 있는 범위를 의미한다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x$의 치역은 실수 전체의 집합일 것이다.

$f(x)$의 값이 어떤 실수든 모두 가능하기 때문이다.

예시 1) 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$의 정의역은 1이 아닌 실수 전체의 집합이고, 치역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

$cf.$ 실수 전체의 집합이 익숙하지 않다면 그냥 **실수 전체**라고 생각해두자.

■■■ 함수의 정의 ■■■

1) 하나의 x에는 하나의 y만이 대응되어야 한다. 다시 말해, 하나의 x에서 여러 개의 함숫값이 나올 수 없다.

2) 반면, 동일한 함숫값을 가지는 서로 다른 x는 존재할 수 있다.

예시 2) 함수 $y=x^2-1$를 생각하자. 하나의 x에 대응되는 y는 하나로 정해진다.

반면, y 값이 같더라도 x의 값은 다를 수 있다.

예를 들어, $y=3$이 되는 $x=-2,\ 2$로 두 개가 있다.

■■■ 여러 가지 함수 ■■■

일대일대응 하나의 y에 하나의 x가 대응된다는 의미이다.

다시 말해, 함숫값이 같도록 하는 서로 다른 x가 존재하지 않는다.

☞ 일대일대응인 연속함수는 계속 증가하거나 계속 감소하는 함수 중 하나이다.

이를 식으로 나타내면 모든 실수 $a,\ b$에 대하여

$a<b$일 때 $f(a)<f(b)$ (증가함수)

또는

$a<b$일 때 $f(a)>f(b)$ (감소함수)

라고 나타낼 수 있다.

> **참조.** 연속함수란 $y=x$처럼 선으로 끊김 없이 이어진 함수를 의미한다. 불연속함수의 경우에는 일대일대응이더라도 계속 증가하거나 감소할 필요가 없다.

예시 3) 함수 $y=2x$나 $y=-x+1$ 등은 일대일대응인 함수이다.

실수 전체의 집합에서 계속 증가하거나, 계속 감소하거기 때문이다.

반면, 함수 $y=x^2$는 일대일대응이 아니다. $x<0$에서는 감소하고, $x>0$에서는 증가하기 때문이다.

상수함수 c가 실수일 때 함수 $f(x)=c$은 상수함수이다.

말 그대로 치역이 상수 하나 뿐인 함수이다.

역함수

역함수 쉽게 말하면 x랑 y 위치를 바꿔놓은 함수이다.
예를 들어, 함수 $y=2x-3$의 역함수는 $x=2y-3$인 것이다.
어떤 함수 $f(x)$의 역함수는 보통 $f^{-1}(x)$으로 나타낸다.

예시 6) $f(2)=3$일 때, $f^{-1}(3)=2$이다. ☞ 역함수는 x와 y의 위치를 바꾼 것이므로

중요 1 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대해서 대칭이다.
☞ 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이기도 하다.
$f(a)=a$이면 $f^{-1}(a)=a$도 성립하기 때문이다.

중요 2 연속함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응, 즉, 계속 증가하는 함수이거나 계속 감소하는 함수여야 한다.
☞ 어쨌든 역함수도 하나의 함수이므로, $f(x)$는 일대일 대응이어야 한다.
☞ 이때, $f(x)$가 중간에 증가하다 다시 감소해버리면(또는 그 반대의 경우) 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 하나의 x에 y가 2개가 나오게 되어 **함수의 정의**를 만족하지 않는다.

역함수의 성질 ① $f^{-1}(f(x))=x$ ② $f(f^{-1}(x))=x$

예시 4) 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $x\geq 2$이고, 치역은 $y\geq 0$이다.
☞ 이 함수는 역함수가 존재한다. x가 커지면 y도 커지기 때문에 정의역 내에서 증가함수이기 때문이다.
☞ 역함수를 구하려면 x와 y를 바꾸면 된다.
역함수는 $x=\sqrt{y-2}$이므로 양변을 제곱해서 정리하면 $y=x^2+2$이다.
☞ 한편, 정의역과 치역도 x, y가 서로 바뀐다. 즉, 정의역은 $x\geq 0$이고, 치역은 $y\geq 2$이다.

예시 5) 실수 전체의 집합에서 함수 $y=x^2$은 역함수가 존재하지 않는다.
$x<0$에서는 감소하고, $x>0$에서는 증가하기 때문이다.
☞ **예시 4)**는 이차함수임에도 역함수가 존재한다. 정의역이 $x>0$으로 한정되어 있기 때문이다.
반면, 이 경우는 정의역이 실수 전체의 집합이므로 역함수가 존재하지 않는다.

합성함수

합성함수 $f(g(x))$처럼 한 함수 안에 다른 함수가 들어간 것을 **합성함수**라고 하고, $(f\circ g)(x)$으로 나타낸다.
$cf.$ 안에 들어간 함수가 무조건 뒤에 온다.

주의! $f\circ g\neq g\circ f$이다. 좌변과 우변은 엄연히 다른 함수이며, 경우에 따라 정의역과 치역조차 다를 수 있다.

예시 7) $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$이다. (역함수의 기본 성질)

예시 8) $f(x)=x^2-1$, $g(x)=2x+3$일 때, $(f\circ g)=f(g(x))=(2x+3)^2-1=4x^2+12x+8$이다.

6. 경우의 수 (확통 선택자만)

수 개수 세기

a부터 $b\,(a<b)$까지의 정수의 개수는 $b-a+1$(개)이다.

예시 1) 7부터 16까지의 정수의 개수는 $16-7+1=10$(개)이다.

예시 2) 12부터 99까지의 정수 중 3의 배수인 것의 개수는?

☞ 해당하는 정수는 12, 15, ..., 99인데 이 수들을 3으로 나누면 4, 5, 6, ..., 33이 된다.
다시 말해, 4부터 33까지의 정수의 개수는 $33-4+1=30$(개)이다.

팩토리얼

1부터 n까지의 수를 모두 곱한 것을 $n!$으로 나타내고 **n팩토리얼** 이라고 읽는다.

예시 3) $4!=1\times2\times3\times4=24$

합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않은 사건인 경우에 두 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는
각각의 경우의 수를 더한 것과 같다.

예시 4) A에는 서로 다른 지우개 2개, B에는 서로 다른 지우개 3개가 들어있다.
A 또는 B에서 지우개 한 개를 고르는 경우의 수는 $2+3=5$이다.

☞ 경우의 수를 합친다는 개념에 집중해야 한다.
이 파트의 핵심은 그냥 가능한 모든 경우를 합한 게 최종 경우의 수라는 의미이다.

곱의 법칙

두 사건 A와 B가 동시 또는 연달아 일어나는 경우의 수는 **각각의 경우의 수를 곱한 것과 같다.**

예시 5) 상자 A에서 서로 다른 지우개 2개 중 하나를 뽑고, 상자 B에서 서로 다른 지우개 3개 중 하나를 뽑는 경우의 수는 $2\times3=6$이다.

순 열

⇒ ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$은 n부터 시작해서 1씩 작아지는 순서대로 r개의 수를 곱하는 것이다.

① n개의 물건 중 순서대로 r개를 고르는 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$이다.

② n개의 칸에 서로 다른 r개의 물건을 넣는 방법의 수도 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$이다.

예시 6) 서로 다른 6개 중에서 4개를 순서대로 고르는 경우는 ${}_{6}\mathrm{P}_{4}$이며 $6\times5\times4\times3=360$이다.

예시 7) 서로 다른 n개를 정렬시키는 방법의 수는 ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$이다.

조 합

⇒ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$은 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$을 $r!$으로 나눈 것이다.

① n개의 물건 중 순서를 고려하지 않고 r개를 고르는 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이다.

② n개의 칸에 서로 같은 r개의 물건을 넣는 방법의 수도 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이다.

예시 8) 서로 다른 7개 중에서 3개를 순서를 고려하지 않고 고르는 경우의 수는 ${}_{7}\mathrm{C}_{3}$이며

$\dfrac{{}_{7}\mathrm{P}_{3}}{3!}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$이다.

경우의 수를 세는 법

[방법 1] 전체 경우의 수에서 아닌 것 빼기

(2022학년도 3월 고2 전국연합학력평가 7번)

7. 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 이 5장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① (5장의 카드를 일렬로 나열하는 전체 방법의 수)에서

② (짝수가 적혀 있는 카드끼리 이웃한 경우의 수)를 뺀다. ☞ 서로 이웃하지 않은 경우를 세기엔 경우가 너무 많기 때문

⇒ ① = ${}_{5}\mathrm{P}_{5}=5!=120$ ☞ **서로 다른** 카드이므로 순열을 사용해야 한다.

⇒ ② = 짝수가 이웃하려면 $(2,\ 4)$로 붙어있거나 $(4,\ 2)$로 붙어 있어야 한다.

이웃한 두 짝수 카드는 **어차피 붙어서 다니므로 하나의 카드로 생각**하자.

그러면 짝수 카드 배치를 고려하지 않고, 전체 카드를 정렬하는 방법의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{4}=4!=24$이고,

여기서 짝수 카드는 방금 말했듯이 위치를 바꿀 수도 있으므로 경우의 수는 $4!\times2=48$이다.

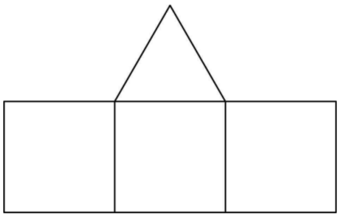
∴ ①−②$=120-48=72$이다.

[방법 2] **가능한 모든 경우의 수 합하기**

확통러 필독! 때로는 경우의 수를 모두 합하는 것이 더욱 편할 수도 있다. 대신 케이스가 가능한 적게 나오는 것을 기준으로 해서 경우의 수를 구하는 것이 편하다. 예를 들어, 아래의 문제의 경우 왼쪽 정사각형을 기준으로 해서 구할 수도 있긴 하나 정삼각형과 정사각형 모두를 고려하는 과정에서 계산이 꼬이거나 어려워질 수 있다. 결국 구하는 사람이 취사 선택할 문제이지만 적어도 케이스가 적게 나오는 것이 실수를 할 가능성도 낮게 만드는 지름길이다.

(2022학년도 3월 고2 전국연합학력평가 28번)

28. 그림과 같이 한 개의 정삼각형과 세 개의 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 네 개의 정다각형 내부에 하나씩 적을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 세 개의 정사각형에 적혀 있는 수는 모두 정삼각형에 적혀 있는 수보다 작다.
(나) 변을 공유하는 두 정사각형에 적혀 있는 수는 서로 다르다.

정삼각형에 들어가는 수를 n이라 하자. n의 값에 따라 경우의 수를 분류하자.

1) $n=1$일 때 : 1보다 작은 수가 정사각형에 들어갈 수 없으므로 (0개)
2) $n=2$일 때 : 모든 정사각형에 1밖에 못 들어가므로 (나) 조건에 위배 (0개)
3) $n=3$일 때 : $(1,\ 2,\ 1)$ 또는 $(2,\ 1,\ 2)$로 들어가는 경우의 수만 존재 (2개)
4) $n=4$일 때 : 가운데 정사각형에 들어갈 수 있는 수의 개수는 $1,\ 2,\ 3$으로 3개,
그 양옆의 사각형에 들어갈 수 있는 수의 개수는 각각 2개가 되므로
☞ 1, 2, 3 중 하나는 들어가야 하는데 가운데 정사각형과 값이 달라야 하니까
곱의 법칙에 의해 $3\times2\times2=12$ (12개)
5) $n=5$일 때 : 마찬가지로 가운데에는 4개가 들어가고 주변에는 3개가 들어갈 수 있으므로 $4\times3\times3=36$ (36개)
6) $n=6$일 때 : 마찬가지로 가운데에는 5개가 들어가고 주변에는 4개가 들어갈 수 있으므로 $5\times4\times4=80$ (80개)

전체 경우의 수를 모두 합하면 $0+0+2+12+36+80=130$이다.

〈 한 장짜리 단권 요약 〉

① 다항식

다항식끼리 더하고 빼기 같은 차수, 같은 문자끼리 더하는 게 기본
다항식끼리 곱하기 괄호 안에서 하나씩 골라 곱하고 모두 더하기
치 환 복잡 or 계산 어려운 식을 하나의 문자로 묶어버리는 것
항등식 항상 성립하는 식
인수정리 다항식 $f(x)$에 대해서 $f(a)=0$이면
$f(x)$를 인수분해 했을 때, $(x-a)$가 들어간다.
인수분해와 곱셈 공식

① $ax+ay=a(x+y)$
② $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
③ $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
④ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$
$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$
⑤ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
⑥ $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
⑦ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

다항식의 곱셈 완성하기 높은 차수부터 차례로 계수 맞춰주기
인수분해 완성하기 ① 묶을 수 있는 아이들은 묶어놓기
② 인수분해 공식 이용하기
③ 인수정리 이용하기

② 방정식과 부등식

근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

판별식 b^2-4ac의 값을 **판별식**이라고 하고, D로 나타낸다.
$D>0$이면 실근 2개, $D=0$이면 중근, $D<0$이면 실근 X

고차방정식 인수분해 공식이 보인다면 바로 인수분해, 공식 안 보인다면 인수정리를 사용, 인수정리 몇 번 쓰고 근의 공식 등 이용해서 해 구하기
근과 계수의 관계
$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때,
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$
근과 계수의 관계의 일반화
n차방정식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$이 n개의 실근을 가질 때, 실근들 합은 $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, 실근들 곱은 $(-1)^n\times\dfrac{a_0}{a_n}$

연립방정식의 풀이
소거법 한 문자 제거해서 나머지 문자에 대한 식으로 나타내 풀기
대입법 한 문자를 다른 문자에 대한 식으로 나타내서 푼다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내지는 함수
꼭짓점 이차함수가 최댓값 또는 최솟값을 가질 때의 좌표
대칭축 그래프가 좌우대칭을 이루도록 하는 축

꼭짓점을 구하는 방법 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾼다.
이차함수의 개형
$f(x)=0$의 판별식이 $D<0$이면 해가 존재하지 않으므로 x축과 만나지 않고 붕 떠 있는 개형, $D=0$이면 x축과 접하며, $D>0$이면 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

직선과 이차함수의 위치 관계
두 함수의 교점의 x좌표는 $f(x)=g(x)$라고 두고 풀기
☞ 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 판별식을 통해 위치 관계 판단
⇒ $D>0$이면 두 점에서 만나고, $D=0$이면 접하고,
$D<0$이면 만나지 않는다.

절댓값이 포함된 부등식

① $c>0$이면 $|f(x)|<c \Leftrightarrow -c<f(x)<c$
② $c>0$이면 $|f(x)|>c \Leftrightarrow f(x)>c$ 또는 $f(x)<-c$
③ c, $d(c<d)$가 양수일 때,
$c<|f(x)|<d \Leftrightarrow c<f(x)<d$ 또는 $-d<f(x)<-c$

중요! 절댓값 포함된 부등식 문제는 **경곗값 기준으로 구간 나눠** 푼다. (경곗값 = 절댓값 안이 0이 되는 수)

연립부등식 연립부등식 이루는 각 부등식 푼 뒤, 공통범위 구한다.
세 부등식이 이어진 경우 $A<B<C$을 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$으로 바꾸기
이차부등식의 풀이 식을 한쪽으로 전부 몰아 넣고,
이차함수 그래프 그려 0보다 큰/작은 부분을 관찰

③ 도형의 방정식

두 점 사이의 거리 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
두 함수의 교점 $f(x)$, $g(x)$의 교점 ⇒ $f(x)=g(x)$의 해 구한다.
점과 직선 사이의 거리
$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

원의 방정식 중심 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인
원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

원과 직선이 만나는 점의 개수
방법 ① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 비교하는 방법
$d>r$: 만나지 X $d=r$: 접한다 $d<r$: 두 점 만남
(원 중심과 직선 사이의 거리 = d, 반지름 = r)

방법 ② 판별식을 이용하는 방법
$D>0$: **두 점 만남** $D=0$: **접한다** $D<0$: **만나지 X**

④ 집 합

집 합 수들을 모아놓은 것, 쉼표로 구분해 중괄호로 묶어 나타냄
원 소 집합을 이루는 각 수, 원소의 개수는 $n(S)$로 나타냄
공집합 원소의 개수가 0개인 집합, $\varnothing$으로 나타냄

집합을 나타내는 방법
조건 만족하는 x를 모두 모아놓은 집합은 $S=\{x|x$에 대한 조건$\}$

원소의 표현 a가 집합 A의 원소일 때, $a\in A$로 나타내고,
원소가 아니면 $a\not\in A$로 나타냄

부분집합 집합 B가 A를 포함할 때, $A\subset B$로 표기
$A=B$여도 A를 B의 부분집합

합집합 A, B의 원소들을 모두 모아놓은 집합, $A\cup B$로 표기
교집합 A, B의 공통된 원소들만 모아놓은 집합, $A\cap B$로 표기
전체 집합 전체라고 부를 수 있는 집합 의미, U로 표기
여집합 $A\subset U$일 때, A의 원소 제외 U의 나머지 원소 집합,
A^c로 표기

귀류법 결론을 부정하여 모순점을 찾아내는 논증 방식

⑤ 함 수

정의역 함수가 정의되는 범위
치 역 함수의 값이 될 수 있는 범위

함수의 정의 1) 하나의 x에는 하나의 y만이 대응
2) 같은 함숫값 가지는 서로 다른 x는 존재 가능

일대일대응 하나의 y에 하나의 x가 대응된다는 의미
⇒ 함숫값이 같도록 하는 서로 다른 x가 존재 X

상수함수 c가 실수일 때 함수 $f(x)=c$은 상수함수

역함수 x랑 y 위치를 바꿔놓은 함수, $f(x)$의 역함수는
보통 $f^{-1}(x)$으로 표기

중요 1 $y=f^{-1}(x)$는 $y=f(x)$와 $y=x$에 대해서 대칭

중요 2 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일
대응, 즉, 계속 증가 or 계속 감소

역함수의 성질 ① $f^{-1}(f(x))=x$ ② $f(f^{-1}(x))=x$

합성함수 $f(g(x))$처럼 한 함수 안에 다른 함수가 들어간 것
⇒ $(f\circ g)(x)$으로 나타낸다.
① $f\circ g\neq g\circ f$
② $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

⑥ 경우의 수

수 개수 세기 a부터 $b(a<b)$까지 정수의 개수는 $b-a+1$
팩토리얼 $n\neq 1\times2\times3\times\ldots\times n$

합의 법칙
A, B가 동시에 일어나지 않은 사건이면 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 **경우의 수를 더한 것**

곱의 법칙
A와 B가 동시 또는 연달아 일어나는 경우의 수는 **각각의 경우의 수를 곱한 것**

순 열 ${}_n\mathrm{P}_r$은 n부터 시작해서 1씩 작아지는 순서대로 r개의 수를 곱하는 것
① n개의 물건 중 순서대로 r개를 고르는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$
② n개의 칸에 서로 다른 r개의 물건을 넣는 방법의 수도 ${}_n\mathrm{P}_r$

조 합 ${}_n\mathrm{C}_r$은 ${}_n\mathrm{P}_r$을 $r!$으로 나눈 것
① n개 중 순서 고려하지 않고 r개 고르는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$
② n개 칸에 서로 같은 r개 넣는 방법의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r$

경우의 수를 세는 법
[방법 1] 전체 경우의 수에서 아닌 것 빼기
[방법 2] 가능한 모든 경우의 수 합하기