22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이고 방정식 $f(x)-f(0)=tx$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)+g(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$\sum_{k=1}^{n}\{g(k)+g(-k)\}=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(-k)\}+\lim_{t\to n+}g(t)-\lim_{t\to -n-}g(t)$$
> 이다.

22번 해설.

STEP 1.

$f'(x)=f'(-x)$이므로 함수 $f(x)$는 $(0, f(0))$에 점대칭이다.

곡선 $y=f(x)-f(0)$과 직선 $y=tx$가 모두 원점에 대칭이므로 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}1\ (t<f'(0))\\ 3\ (t\geq f'(0))\end{cases}$$

이다.

1은 실근 하나와 허근 두 개, 3은 삼중근 혹은 서로 다른 세 실근인 상황이다.

STEP 2.

$f(x)+f(-x)=2f(0)$이므로 등식

$$\sum_{k=1}^{n}\{g(k)+g(-k)\}=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(-k)\}+\lim_{t\to n+}\{g(t)-g(-t)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{g(k)+g(-k)-2f(0)\}=\lim_{t\to n+}\{g(t)-g(-t)\}$$이다.

모든 자연수 n에 대하여 성립하므로, n이 무한히 커지는 상황에서도 성립한다.

해설을 위해 부득이하게 미적분의 표현을 차용하였으나, 풀이 과정에서는 미적분의 개념을 과하게 끌어들이지 않고도 추론이 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{g(k)+g(-k)-2f(0)\}=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{t\to n+}\{g(t)-g(-t)\}\right]$$

이다. 만약 $\lim_{n\to\infty}\{g(n)+g(-n)-2f(0)\}=p$ (단, p는 0이 아닌 실수)라 하면,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{g(k)+g(-k)-2f(0)\}$은 발산하므로 등식이 성립하지 않는다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\{g(n)+g(-n)-2f(0)\}=0$이고 $\lim_{n\to\infty}g(n)=3$, $\lim_{n\to\infty}g(-n)=1$이므로

$2f(0)=4, f(0)=2$이다. ⋯ ㉠

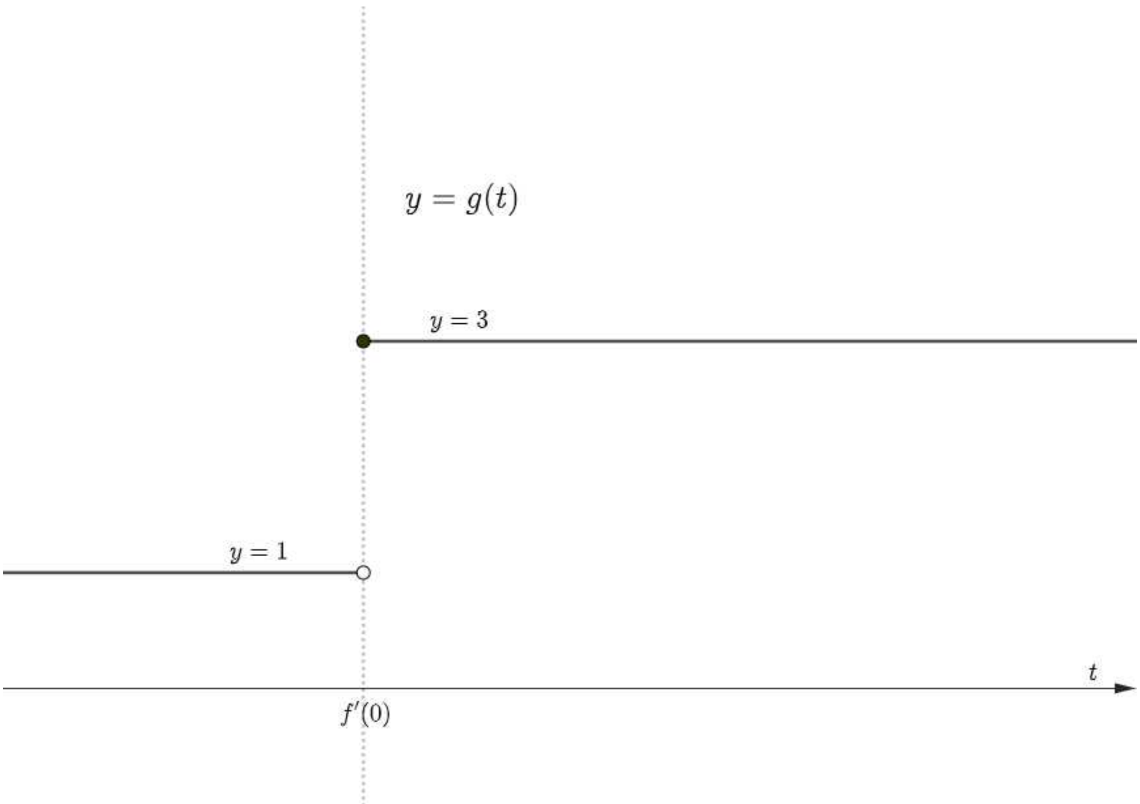
STEP 3.

모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립하므로 $n=1$일 때도 성립이 보장된다.

즉, $g(1)+g(-1)=4+\lim_{t\to 1+}\{g(t)-g(-t)\}$이다.

이때 편의상 $\lim_{t\to n+}g(t)=g(n+)$, $\lim_{t\to n+}g(-t)=g(-n-)$라 하자.

$g(1)+g(-1)=4+g(1+)-g(-1-)$이고 함수 $g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$f'(0)$의 값에 무관하게 $g(1)=g(1+)$이므로 $g(-1)+g(-1-)=4$이다.

즉, $g(-1)=3, g(-1-)=1, f'(0)=-1$이고 $n=1$일 때, 등식이 성립한다. ⋯ ㉡

모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립하므로 $n=2$일 때도 성립해야 한다.

결국 $g(1)+g(-1)+g(2)+g(-2)=8+g(2+)-g(-2-)$이다.

$g(2)=g(2+)$이므로 $g(1)+g(-1)+g(-2)+g(-2-)=3+3+1+1=8$이고 따라서 $n=2$일 때 등식이 성립한다.
같은 방식으로 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립하므로 $f'(0)=-1$이다.

STEP 4.
㉠과 ㉡에 의하여 $f(0)=2, f'(0)=-1$이고 함수 $f(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $f(x)=x^3-x+2$이다.
따라서 $f(5)=5^3-5+2=122$이고, $g(5)=3$이다.
$\therefore f(5)+g(5)=125$

정답은 125이다.