1. $\log_2 \frac{8}{9} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} 18$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_2\left(\frac{8}{9}\times 18\right) = \log_2 16 = 4$

2. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ 일 때, $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{f(x)+x}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$f(x)=2x \Rightarrow \frac{3}{3}=1$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6 = 21S_2, \quad a_6 - a_2 = 15$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

$\frac{S_6}{S_2} = \frac{(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)}{a_1+a_2} = 1+r^2+r^4 = 21$

$r^4+r^2-20=0 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$

$a_6-a_2 = 8a_3 - \frac{a_3}{2} = \frac{15}{2}a_3 = 15 \Rightarrow a_3=2$

4. 함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=5$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=5 \end{cases}$

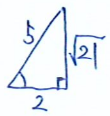
$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 3+a=5 \end{cases}$

$\therefore a=-3, b=2$

5. $\sin\theta < 0$ 이고 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{21}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{5}$



$\tan\theta = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. 모든 실수 t에 대하여 다항함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $-6t^2 + 2t$ 이다. 곡선 $y = f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = -6x^2 + 2x$

$f(x) = -2x^3 + x^2 + 2$

$f(-1) = 5$

7. 다음 조건을 만족시키는 모든 유리수 r의 값의 합은? [3점]

(가) $1 < r < 9$ (나) r를 기약분수로 나타낼 때, 분모는 7이고 분자는 홀수이다.

① 102 ② 108 ③ 114 ④ 120 ⑤ 126

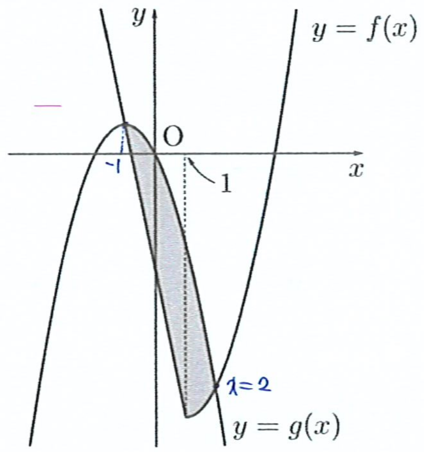
$\left(\frac{9}{7}+\frac{11}{7}+\cdots+\frac{61}{7}\right)-\left(\frac{7\times3}{7}+\frac{7\times5}{7}+\frac{7\times7}{7}\right)=\frac{27\left(\frac{9}{7}+\frac{61}{7}\right)}{2}-15=135-15=120$

8. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -5x-4 & (x<1) \\ x^2-2x-8 & (x \geq 1) \end{cases}, \quad g(x)=-x^2-2x$$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{34}{3}$ ② 11 ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{31}{3}$ ⑤ 10



$$\begin{cases} -5x-4=-x^2-2x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-2x-8=-x^2-2x \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+3x+4)\,dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+8)\,dx$$

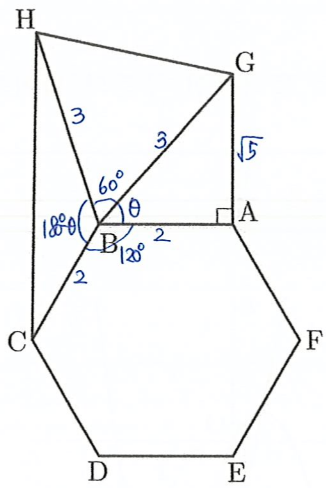
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+4)\,dx-\frac{14}{3}+8$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+4\right)-\frac{14}{3}+8$$

$$=16-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{32}{3}$$

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에 대하여 점 G를 $\overline{AG}=\sqrt{5}$, $\angle BAG=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 점 H를 삼각형 BGH가 정삼각형이 되도록 잡는다. 선분 CH의 길이는?
(단, 점 G는 정육각형의 외부에 있고, 두 선분 AF, BH는 만나지 않는다.) [4점]



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

$\overline{CH}=\sqrt{9+4-12\cos(\pi-\theta)}=\sqrt{13+12\times\frac{2}{3}}=\sqrt{21}$

10. 함수

$$f(x)=\int_{a}^{x}(3t^2+bt-5)\,dt \quad (a>0)$$

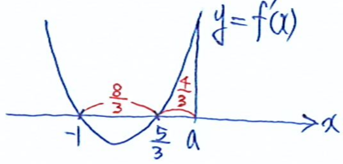
이 $x=-1$에서 극값 0을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f(-1)=0 \end{cases}$

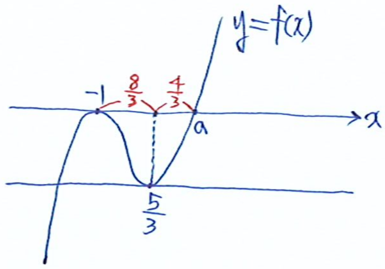
$f'(x)=3x^2+bx-5=(x+1)(3x-5) \Rightarrow b=-2$

$f(-1)=\int_{a}^{-1}(3x^2-2x-5)\,dx=0 \Rightarrow \int_{-1}^{a}(3x^2-2x-5)\,dx=0$



$\therefore a=3$

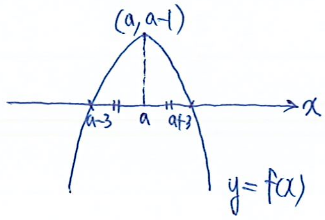
※



$f(a)=0 \Rightarrow a=3$

11. 함수 $f(x)=-2^{|x-a|}+a$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 q를 가질 때, $p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18



$f(a+3)=-8+a=0 \Rightarrow a=8$

$\therefore\ p=8,\ q=7$

※ $y=-2^{|x|} \xrightarrow[\text{평행이동}]{(a,\,a)} y=f(x)$

12. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a-f(-x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

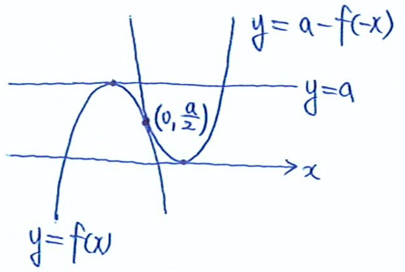
(가) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-4$
(나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이다.

$g(-a)$의 값은? [4점]

① -40 ② -36 ③ -32 ④ -28 ⑤ -24

$y=f(x) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{점 }(0,\frac{a}{2})} y=a-f(-x)$

(가) $g'(0)=-4$ (미분가능) $\Rightarrow$ $x=0$ (연속) : $f(0)=a-f(0)$ $\Rightarrow$ $f(0)=\frac{a}{2}$



$g'(0)=f'(0)=-4$

$f(x)=-x^2-4x+\frac{a}{2}=-(x+2)^2+4+\frac{a}{2}$

$4+\frac{a}{2}=a \Rightarrow a=8$

$\therefore f(x)=-(x+2)^2+8$

$\therefore g(-a)=g(-8)=f(-8)=-28$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=-3$, $a_{20}=1$이고, 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

$$\begin{array}{r|l} & S_{n+1} = a_n \ (n \geq 2) \\ - & S_n = a_{n-1} \ (n \geq 3) \\ \hline & a_{n+1} = a_n - a_{n-1} \ (n \geq 3) \end{array}$$

$\{a_n\}$: -3, $\underbrace{a, b, b-a, -a, -b, a-b}_{(\text{합})=0}$, a, b, $\cdots$ (주기 : 6)

$a_{20} = a_2 = 1$

$50 = 6 \times 8 + 2 \Rightarrow S_{50} = a_1 + a_2 = -3 + 1 = -2$

14. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-kx$$

라 하고, 실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a \text{ 또는 } x>a+1) \\ -f(x) & (a\le x\le a+1) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 실수 k, a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $k=4$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 3이다. ⑥

ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (k, a)의 개수는 2이다. ③

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(0)=0$ 이므로 $f(0)=-f(0) \Rightarrow g(0)=0$ (연속)

ㄴ. $f(x)=x^3-4x=0 \Leftrightarrow x=-2, 0, 2$

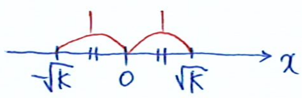
$x=a$에서 연속 : $f(a)=-f(a) \Rightarrow \underline{f(a)=0} \Rightarrow a=-2, 0, 2$

$x=a+1$에서 연속 : $f(a+1)=-f(a+1) \Rightarrow \underline{f(a+1)=0} \Rightarrow -3, -1, 1$

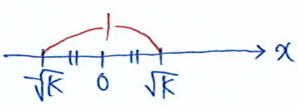
(6개)

ㄷ. i) $k\le 0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ (X)

ii) $k>0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{k}, 0, \sqrt{k}$

① 

$k=1$: $a=-1, 0$ (2개)

② 

$k=\frac{1}{4}$: $a=-\frac{1}{2}$ (1개)

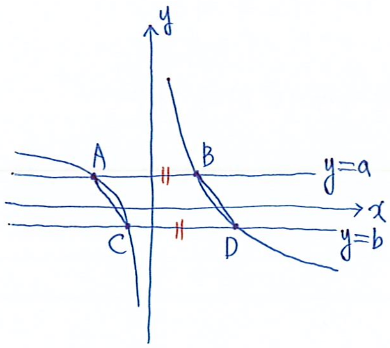
(3개)

15. 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \log_4(-x) & (x<0) \\ 2-\log_2 x & (x>0) \end{cases}$$

이 있다. 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하고, 직선 $y=b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_3, x_4 $(x_3<x_4)$라 하자. $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\frac{1}{2}$이고 두 직선 AC와 BD가 서로 평행할 때, $\left|\frac{x_4}{x_3}\right|$의 값은?
(단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $3+3\sqrt{3}$ ② $5+2\sqrt{3}$ ③ $4+3\sqrt{3}$ ④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+3\sqrt{3}$



평행사변형 $\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$

$A(-4^a, a)$, $B(2^{2-a}, a)$, $C(-4^b, b)$, $D(2^{2-b}, b)$

$\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = \frac{2^{2-a}}{4^a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{3-a}=2^{2a} \Rightarrow a=1$

$A(-4,1)$, $B(2,1) \Rightarrow \overline{AB}=6$

$\overline{CD}=2^{2-b}+4^b=6 \Rightarrow 2^b=t : \frac{4}{t}+t^2=6$

$t^3-6t+4=0 \Rightarrow (t-2)(t^2+2t-2)=0$

$\therefore t=-1+\sqrt{3}$

$\therefore \left|\frac{x_4}{x_3}\right| = \frac{2^{2-b}}{4^b} = \frac{2^2}{t^3} = \frac{4}{6\sqrt{3}-10} = \frac{2}{3\sqrt{3}-5} = 3\sqrt{3}+5$

16. $a^4-8a^2+1=0$일 때, a^4+a^{-4}의 값을 구하시오. [3점] 62

$a^2+a^{-2}=8$

$\therefore a^4+a^{-4}=8^2-2=62$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3-2x)f(x)$$

라 하자. $f(2)=-3$, $f'(2)=4$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

16

$g(2)=4f(2)=-12$

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

$g'(2)=10f(2)+4f'(2)=-14$

접선 : $y=-14(x-2)-12=-14x+16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=50, \quad \sum_{k=1}^{7}(a_k+2)^2=300$$

일 때, $\sum_{k=1}^{7}{a_k}^2$의 값을 구하시오. [3점] 184

$$\sum_{k=1}^{7}a_k+\frac{7\times 8}{2}=50 \Rightarrow \sum_{k=1}^{7}a_k=22$$

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k^2+4a_k+4)=\sum_{k=1}^{7}a_k^2+88+28=300 \Rightarrow \sum_{k=1}^{7}a_k^2=184$$

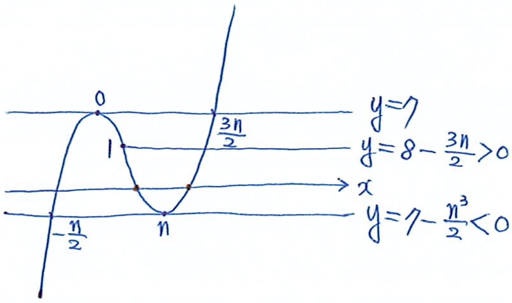
19. x에 대한 방정식

$$x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$$

의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

12 [3점]

$x^2\left(x-\frac{3n}{2}\right)+7=0$



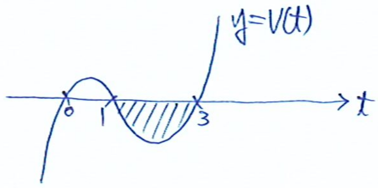
$\begin{cases} n<\frac{16}{3} \\ n^3>14 \end{cases}$ $n=3, 4, 5$

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 가속도 $a(t)$가

$$a(t)=3t^2-8t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$과 시각 $t=\alpha\,(\alpha>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=1$에서 $t=\alpha$까지 점 P가 움직인 거리는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 11

$V(1)=0$ 이므로 $V(t)=t^3-4t^2+3t=t(t-1)(t-3) \Rightarrow \alpha=3$



$$\therefore S=-\int_1^3 t(t-1)(t-3)\,dt=-\int_0^2 (t+1)t(t-2)\,dt=-\int_0^2 (t^3-t^2-2t)\,dt=-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{8}{3}$$

※ $S=-\int_1^3 \{(t-1)+1\}(t-1)(t-3)\,dt=-\int_1^3 (t-1)^2(t-3)\,dt-\int_1^3 (t-1)(t-3)\,dt$

$$=\frac{2^4}{12}+\frac{2^3}{6}=\frac{2^5}{12}=\frac{8}{3}$$

※ $S=-\int_{-1}^1 (t+2)\underbrace{(t+1)(t-1)}_{t^2-1}\,dt=-\int_{-1}^1 (\cancel{t^3}+2t^2-\cancel{t}-2)\,dt=\frac{2}{6}\times 2^3=\frac{8}{3}$

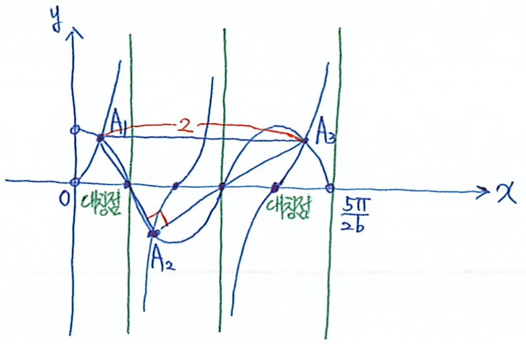
21. 두 양수 a, b에 대하여 두 함수

$$y=3a\tan bx,\quad y=2a\cos bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$보다 작은 세 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3이라 하자. 선분 A_1A_3을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

29 [4점]

$0<x<\frac{5\pi}{2b} \Rightarrow 0<bx<\frac{5}{2}\pi$



$\overline{A_1A_3}=\frac{2\pi}{b}=2 \Rightarrow b=\pi$

$3\cancel{a}\tan\pi x=2\cancel{a}\cos\pi x \Rightarrow \frac{3S}{C}=2C$

$3S=2C^2 \Rightarrow 3S=2(1-S^2)$

$2S^2+3S-2=0 \Rightarrow \sin\pi x=\frac{1}{2} \Rightarrow \pi x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$

$2S \quad -1$

$S \quad +2$

$A_1\left(\frac{1}{6}, \sqrt{3}a\right)$, $A_2\left(\frac{5}{6}, -\sqrt{3}a\right)$, $A_3\left(\frac{13}{6}, \sqrt{3}a\right)$

$mm'=(-3\sqrt{3}a)\times\frac{3\sqrt{3}a}{2}=-1 \Rightarrow a^2=\frac{2}{27} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=a^2=\frac{2}{27}$

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x|f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 극한

$$\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h}\times\frac{g(t-h)}{h}\right\}$$

가 양의 실수로 수렴하는 실수 t의 개수는 1이다.

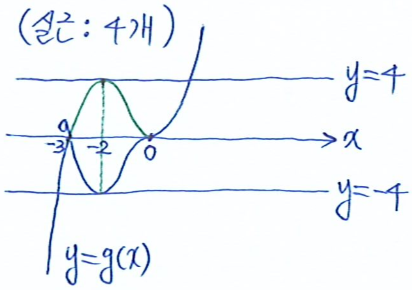
(나) x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2+4g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(3)$의 값을 구하시오. [4점] 54

(가) $\begin{cases} g(t)=0 \\ g'(t+)\times\{-g'(t-)\}>0 \Rightarrow g'(t+)\times g'(t-)<0 \end{cases}$ ($x=t$에서 미분불능)

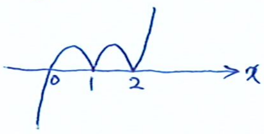
(나) $g(x)=0$ 또는 $g(x)=-4$ (실근: 4개)

$g(x)=x|x(x-a)|$



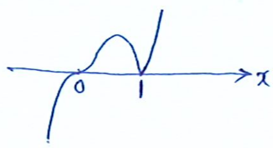
$\therefore\ g(x)=x|x(x+3)| \Rightarrow g(3)=54$

※ $g(x)=x|(x-1)(x-2)|$



$g(x)=x|(x+1)(x-1)|$

$g(x)=x|x(x-1)|$



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 (확률과 통계)

23. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	a	b	1

$\mathrm{E}(X)=5$일 때, $b-a$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 6a+6b=5 \end{cases}$

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{2}{3}$

24. 한 개의 주사위와 한 개의 동전이 있다. 이 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수만큼 반복하여 이 동전을 던질 때, 동전의 앞면이 나오는 횟수가 5일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{48}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6}\times{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{48}$

25. 다항식 $(ax+1)^7$의 전개식에서 x^5의 계수와 x^3의 계수가 서로 같을 때, x^2의 계수는? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 28 ② 35 ③ 42 ④ 49 ⑤ 56

${}_7C_5\,a^5={}_7C_3\,a^3 \Rightarrow a^2=\frac{5}{3}$

$\therefore {}_7C_2\,a^2=35$

26. 육군사관학교 모자 3개, 해군사관학교 모자 2개, 공군사관학교 모자 3개가 있다. 이 8개의 모자를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝에는 서로 다른 사관학교의 모자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 사관학교의 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 360 ② 380 ③ 400 ④ 420 ⑤ 440

$aaabbccc \Rightarrow \frac{8!}{3!2!3!} = 560$

여사건 : $a \sim a \Rightarrow \frac{6!}{2!3!} = 60$

$b \sim b \Rightarrow \frac{6!}{3!3!} = 20$

$c \sim c \Rightarrow 60$

$\therefore 560 - 140 = 420$

27. 7개의 문자 a, b, c, d, e, f, g를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 임의로 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

(가) a와 b는 이웃하고, a와 c는 이웃하지 않는다. (나) c는 a보다 왼쪽에 있다.

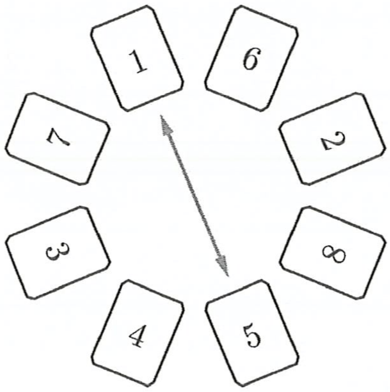
① $\frac{1}{42}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{2}{21}$ ⑤ $\frac{5}{42}$

i) c ? ab

ii) c ba

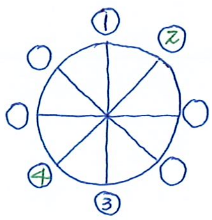
$$\therefore \frac{4! \times {}_5C_2 + \frac{6!}{2!}}{7!} = \frac{10+15}{7 \times 6 \times 5} = \frac{5}{42}$$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 한 장의 카드와 이 카드로부터 시계 방향으로 네 번째 위치에 놓여 있는 카드는 서로 마주 보는 위치에 있다고 하자. 서로 마주 보는 위치에 있는 카드는 4쌍이 있다. 예를 들어, 그림에서 숫자 1, 5가 적혀 있는 두 장의 카드는 서로 마주 보는 위치에 있고, 숫자 1, 4가 적혀 있는 두 장의 카드는 서로 마주 보는 위치에 있지 않다.



이 8장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 임의로 배열하는 시행을 한다. 이 시행에서 서로 마주 보는 위치에 있는 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차가 모두 같을 때, 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 서로 이웃할 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

① $\frac{1}{18}$　　② $\frac{1}{9}$　　③ $\frac{1}{6}$　　④ $\frac{2}{9}$　　⑤ $\frac{5}{18}$



i) 차가 1 : 12, 34, 56, 78

ii) 차가 2 : 13, 24, 57, 68

iii) 차가 4 : 15, 26, 37, 48

$$\therefore \frac{2\times(2\times 2!\times 2^2)}{3\times(3!\times 2^3)} = \frac{2}{9}$$

29. 어느 공장에서 생산하는 과자 1개의 무게는 평균이 150g, 표준편차가 9g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 과자 중에서 임의로 n개를 택해 하나의 세트 상품을 만들 때, 세트 상품 1개에 속한 n개의 과자의 무게의 평균이 145g 이하인 경우 그 세트 상품은 불량품으로 처리한다. 이 공장에서 생산하는 세트 상품 중에서 임의로 택한 세트 상품 1개가 불량품일 확률이 0.07 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$으로 계산한다.) [4점] 8

$$Z = \frac{\overline{X} - 150}{\frac{9}{\sqrt{n}}}$$

$$P(\overline{X} \leq 145) = P\left(Z \leq -\frac{5\sqrt{n}}{9}\right) \leq 0.07$$

$$-\frac{5\sqrt{n}}{9} \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2.7 \Rightarrow n \geq 7.29 \Rightarrow n \geq 8$$

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 연필 5자루와 같은 종류의 공책 5권을 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있고, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] 166

(가) 학생 A가 받는 연필의 개수는 4 이상이다.
(나) 공책보다 연필을 더 많이 받는 학생은 1명뿐이다. (연필) > (공책) : 1명, (연필) ≤ (공책) : 4명

$$\begin{cases} x+y+z+u=5 \text{ (연필)} \ (x\geq 4) \\ x'+y'+z'+u'=5 \text{ (공책)} \end{cases}$$

i) 4100 (3가지) $\Rightarrow 3\times(34+3)=111$

① $0\leq x'\leq 3,\ y'\geq 1 \Rightarrow {}_4H_4 - 1 = 34$

② $x'\geq 4,\ y'=0 \Rightarrow {}_3H_1 = 3$

ii) 5000 (1가지) $\Rightarrow {}_4H_5 - 1 = 55$
$(0\leq x'\leq 4)$

$\therefore\ 111+55=166$

※ **확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 (미적분)

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 4^{n+1} - 3n$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{4^{n-1}}$의 값은? [2점]

$-\ S_{n-1} = 4^n - 3(n-1)$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$n \geq 2 :\ a_n = 3 \times 4^n - 3 \Rightarrow 3 \times 4 = 12$

24. 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n+k}{n}\right)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}+\ln 2$ ③ $1+\frac{1}{2}\ln 2$ ④ $1+\ln 2$ ⑤ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^2=\ln 2+\frac{1}{2}$

25. 곡선 $\pi\cos y+y\sin x=3x$ 가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 이 곡선 위의 점 A에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

$y=0$: $\pi=3x \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

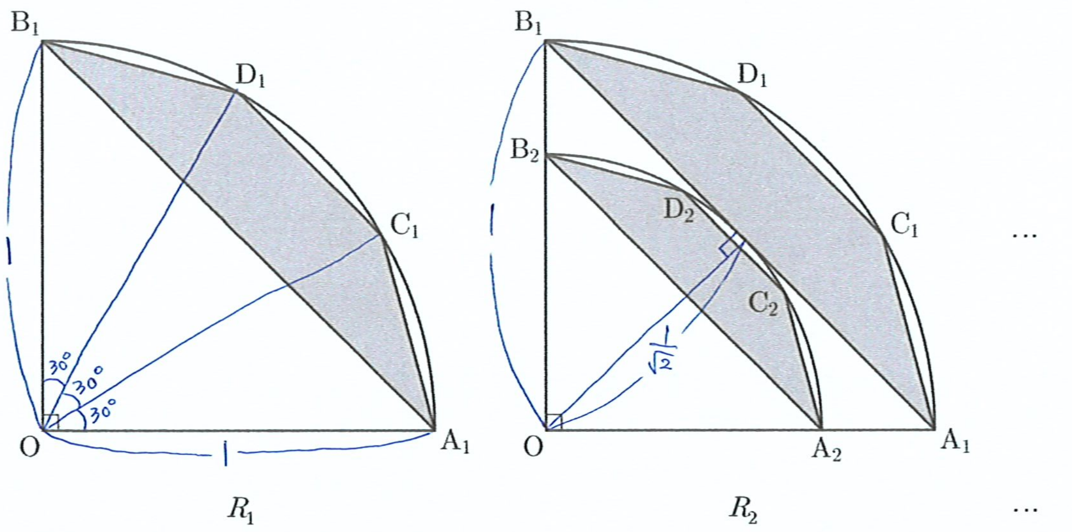
$-\pi\sin y\times y'+y'\sin x+y\cos x=3$

$\frac{\sqrt{3}}{2}y'=3 \Rightarrow y'=2\sqrt{3}$

26. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1의 삼등분점 중 점 A_1에 가까운 점을 C_1, 점 B_1에 가까운 점을 D_1이라 하고, 사각형 $A_1C_1D_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 선분 A_1B_1에 접하는 원이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 사각형 $A_2C_2D_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

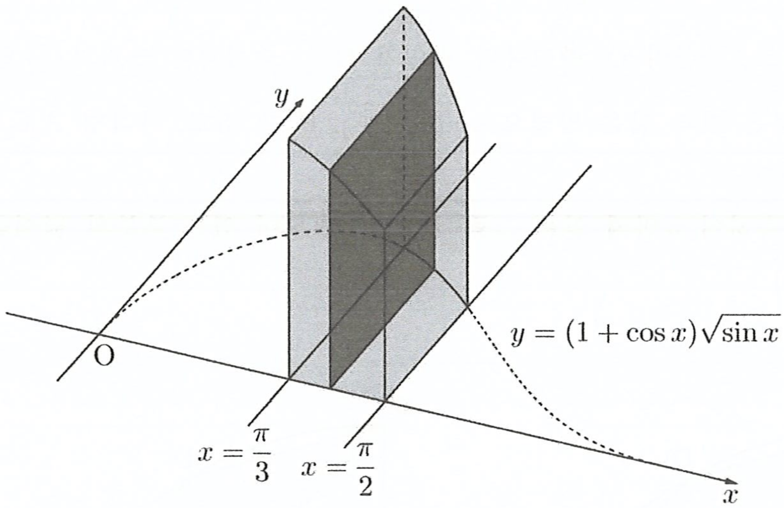


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$S_1 = 3\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin30^\circ\right) - \frac{1}{2}\times1\times1 = \frac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

27. 그림과 같이 곡선 $y=(1+\cos x)\sqrt{\sin x}$ $\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{19}{24}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

$$V=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(1+\cos x)}_{t}{}^2\sin x\,dx=\int_{\frac{3}{2}}^{1}t^2(-dt)=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{8}-1\right)=\frac{19}{24}$$

28. 양의 실수 t와 상수 $k\,(k>0)$에 대하여 곡선 $y=(ax+b)e^{x-k}$이 직선 $y=tx$와 점 $(t,\ t^2)$에서 접하도록 하는 두 실수 a, b의 값을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. $f(k)=-6$일 때, $g'(k)$의 값은? [4점]

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

$y'=(ax+a+b)e^{x-k}$

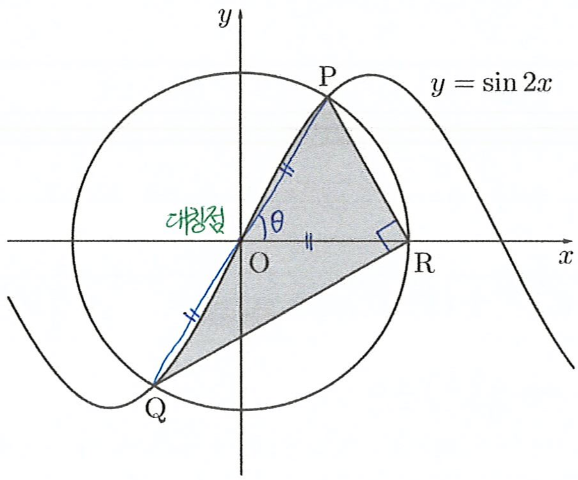
$$\begin{cases}(at+b)e^{t-k}=t^2\\(at+a+b)e^{t-k}=t\end{cases}\ \ominus$$

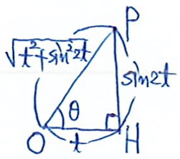
$t^2-t=-ae^{t-k} \Rightarrow t=k,\ a=-6 : k^2-k=6 \Rightarrow k=3$

$b=t^2e^{k-t}-at=t^2e^{3-t}+(t^3-t^2)e^{3-t}=t^3e^{3-t}=g(t)$

$g'(t)=(3t^2-t^3)e^{3-t} \Rightarrow g'(3)=0$

29. $0<t<\frac{\pi}{6}$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $(t,\ \sin 2t)$ 를 P라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 곡선 $y=\sin 2x$ 와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 이 원이 x 축과 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점을 R라 하자. 곡선 $y=\sin 2x$ 와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. [4점] 20



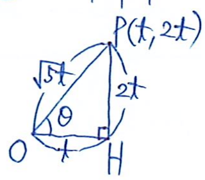


$S(t)=\overline{OP}^2\sin\theta=(t^2+\sin^2 2t)\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{t^2+\sin^2 2t}}=\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}\fallingdotseq 2t\times\sqrt{5}t=2\sqrt{5}t^2$

$\therefore k=2\sqrt{5}$

※ $S(t)=\overline{OR}\times\overline{PH}=\sqrt{t^2+\sin^2 2t}\times\sin 2t$

※ 근사처리



$S(t)\fallingdotseq\sqrt{5}t\times 2t=2\sqrt{5}t^2$

30. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

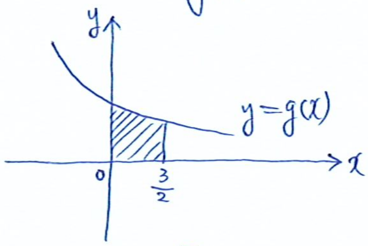
> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)=\dfrac{\ln x+k}{x}$이다.
>
> (나) 곡선 $y=f(x)$는 x축과 두 점 $\left(\dfrac{1}{e^2},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$에서 만난다.

$t>-\dfrac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표 중 작은 값을 $g(t)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{ae+b}{e^3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고, a, b는 유리수이다.) [4점] 13

$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x+k)^2+C=\frac{1}{2}\ln x(\ln x+2)=t \Rightarrow (\ln x)^2+2\ln x-2t=0$

$\ln x=-1-\sqrt{1+2t} \Rightarrow x=e^{-\sqrt{2t+1}-1}=g(t)$

$\therefore\ g(x)=e^{-\sqrt{2x+1}-1}$



$\therefore\ S=\int_0^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{2x+1}-1}\,dx=\int_1^2 e^{-t-1}\,t\,dt=\left[-e^{-t-1}(t+1)\right]_1^2=-3e^{-3}+2e^{-2}=\dfrac{2e-3}{e^3}$

$\left(\sqrt{2x+1}=t \Rightarrow 2x+1=t^2 \Rightarrow \cancel{2}dx=\cancel{2}t\,dt\right)$

> ※ **확인 사항**
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 (기 하)

23. 좌표공간의 두 점 A(4, 2, 3), B(−2, 3, 1)과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 점 P의 x좌표는? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$P(x, 0, 0)$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2 \Rightarrow (x-4)^2+4+\cancel{9}=(x+2)^2+\cancel{9}+1$

$3=6(2x-2)$

$\therefore x=\frac{5}{4}$

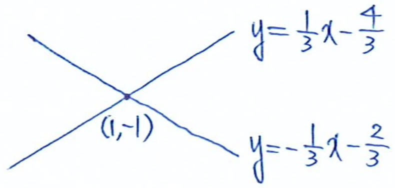
24. 두 쌍곡선

$$x^2-9y^2-2x-18y-9=0,\quad x^2-9y^2-2x-18y-7=0$$

중 어느 것과도 만나지 않는 직선의 개수는 2이다. 이 두 직선의 방정식을 각각 $y=ax+b$, $y=cx+d$라 할 때, $ac+bd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

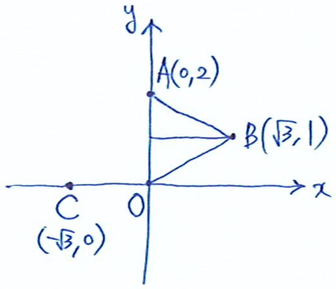
$(x-1)^2-9(y+1)^2=1,\quad (x-1)^2-9(y+1)^2=-1$



$\therefore -\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=\frac{7}{9}$

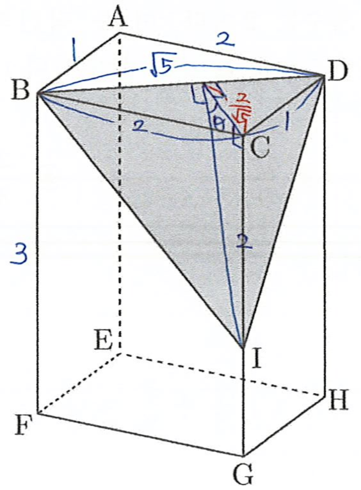
25. 좌표평면의 점 A(0, 2)와 원점 O에 대하여 제1사분면의 점 B를 삼각형 AOB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 점 C$(-\sqrt{3},\,0)$에 대하여 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

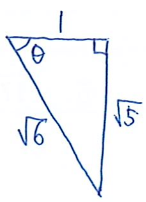


$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}|=|(0,2)+(-2\sqrt{3},-1)|=|(-2\sqrt{3},1)|=\sqrt{13}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=3$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 CG를 2:1로 내분하는 점 I에 대하여 평면 BID와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]



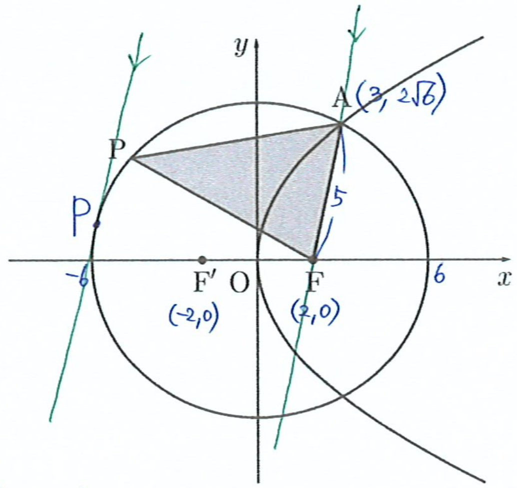
① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{\sqrt{6}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{7}}{7}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$



$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$

27. 두 점 F(2, 0), F′(−2, 0)을 초점으로 하고 장축의 길이가 12인 타원과 점 F를 초점으로 하고 직선 $x=-2$를 준선으로 하는 포물선이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 APF의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 직선 AF 위의 점이 아니다.) [3점]

① $\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ② $2\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ③ $2\sqrt{6}+4\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{6}+5\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{6}+5\sqrt{14}$



$$\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1 \\ y^2=8x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{x}{4}=1$$

$x^2+9x-36=0$

$\therefore x=3$

접선: $y=2\sqrt{6}x+\sqrt{36\times 24+32}=2\sqrt{6}x+8\sqrt{14}$

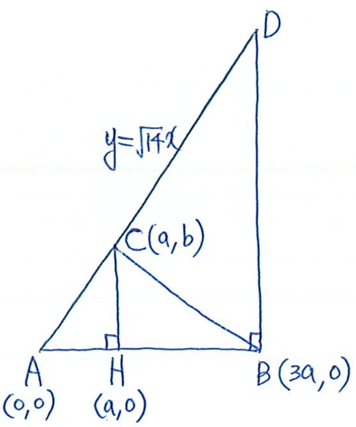
$\therefore S=\frac{1}{2}\times 5\times \frac{4\sqrt{6}+8\sqrt{14}}{5}=2\sqrt{6}+4\sqrt{14}$

28. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2$
>
> (나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}|\overrightarrow{AC}|^2$

점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 직선 AC가 만나는 점을 D라 하자. $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{42}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $\frac{\sqrt{14}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{14}}{2}$



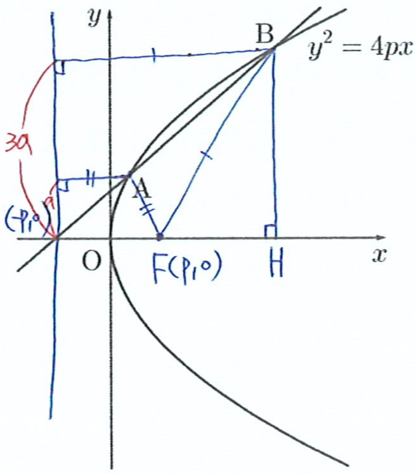
(나) $(3a,0)\cdot(2a,-b)=6a^2=\frac{2}{5}(a^2+b^2) \Rightarrow b=\sqrt{14}a$

$C(a,\sqrt{14}a)$, $D(3a,3\sqrt{14}a)$

$\overline{BD}=3\sqrt{14}a=\sqrt{42} \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$이 점 $(-p,\ 0)$을 지나는 직선과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:3$이다. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 BFH의 넓이는 $46\sqrt{3}$이다. p^2의 값을 구하시오. [4점] 23



$A\left(\frac{a^2}{4p}, a\right)$, $B\left(\frac{9a^2}{4p}, 3a\right)$, $(-p, 0)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\cancel{a}}{\frac{a^2+4p^2}{\cancel{4p}}} = \dfrac{3\cancel{a}}{\frac{9a^2+4p^2}{\cancel{4p}}}$

$3a^2+12p^2=9a^2+4p^2 \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}p \Rightarrow B(3p, 2\sqrt{3}p)$

$\therefore S=\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{2}p\times 2\cancel{\sqrt{3}}p=46\cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow p^2=23$

30. 좌표공간에 두 개의 구

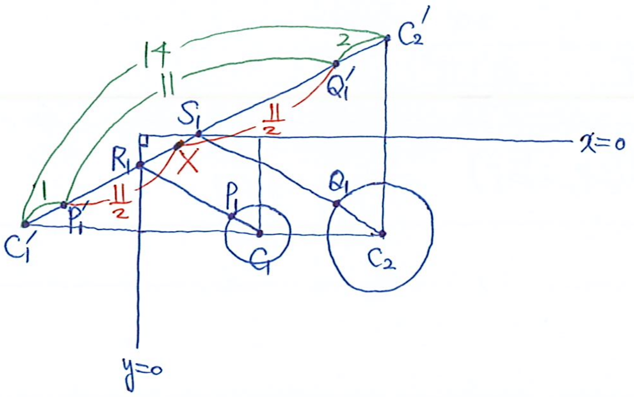
$$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=1,\quad C_2 : (x-3)^2+(y-8)^2+(z-5)^2=4$$

가 있다. 구 C_1 위의 점 P와 구 C_2 위의 점 Q, zx평면 위의 점 R, yz평면 위의 점 S에 대하여 $\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 네 점 P, Q, R, S를 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{S_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{R_1S_1}$ 위의 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{P_1R_1}}+\overline{\mathrm{R_1X}}=\overline{\mathrm{XS_1}}+\overline{\mathrm{S_1Q_1}}$일 때, 점 X의 x좌표는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 17

$C_1(3,4,1),\ r_1=1,\ C_2(3,8,5),\ r_2=2$

$\overline{PR}+\overline{RS}+\overline{SQ} \ge (\overline{RC_1}-1)+\overline{RS}+(\overline{SC_2}-2) = \overline{RC_1'}+\overline{RS}+\overline{SC_2'}-3 \ge \overline{C_1'C_2'}-3=11$

$\left[C_1'(3,-4,1),\ C_2'(-3,8,5) \Rightarrow \overline{C_1'C_2'} = 2\sqrt{3^2+6^2+2^2}=14\right]$



점 X는 $\overline{C_1'C_2'}$의 13 : 15 내분점

$\Rightarrow \dfrac{13\times(-3)+15\times 3}{13+15} = \dfrac{3}{14}$

※ **확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.