도형 Basic

(유형) 도형
- 고정 (결정)
- 변화 (확대·축소)
  - 수식판단 (산술기하평균)
  - 상황관찰 (언제 max/min?)

part I. 기본 태도

공배율을 채우는 것이 목적.

① 정추적

(1) 문제구조는 다음과 같다. 아는것 (주어진것) → 모르는것 (구하는것)

② 역추적

① 적당히 유추할수 있는것, 알수 있는 내용을 파악하고 연쇄적으로 정추적
이 두 흐름의 접점이 발생하는 것을 어림짐작으로 확인하고 (풀이구도 잡고) 시작. ... 그다음은 just 연산
② 최종적으로 구해야 하는것을 알기 위해 무엇을 알아야 하는지 역추적하여 파악

(2) 도형은 숨어있는 미지수들과 그 연립방정식을 세우고 '계산'하는것으로 귀결된다.
→ so, 미지수 개수 vs 등식 개수 비교 논리가 특히 강력하게 작용함.

(3) 각과 길이는 그 자체만이 아니라, 어떤 도형의 일부로 보아야 한다.
(필요에 따라 보조선 활용 ... for: 도형 완성, ex. or 등)

(4) 등식 2개를 도출한줄 알았는데 둘이 연립하니 0=0, 즉 같은 등식이었을 가능성O. 그런경우가 발생해도 당황하지 말고 아직 안쓴 정보가 있나 점검.
(그림에 표현했으나 아직 수식화하지 않은 정보, 그것도 아니라면 아직 내가 발견하지 못한 것에 ... 닮음이나 동일한 각, 길이가 대부분)

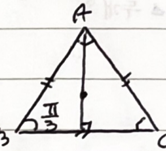
part II 도형 관찰 기본.

(1) 삼각형 (△)

① 결정가능성 : 결정조건 SSS, SAS, ASA 를 만족할 경우 그 도형의 모든것을 알 수 있음. → 결정된 도형을 관찰의 시작점으로 잡고, 구해야하는 것들을 결정된 도형과 연결지어 이해할 것.
(가능한)

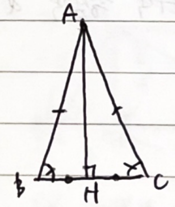
② 특수한 삼각형들.

a. 정삼각형



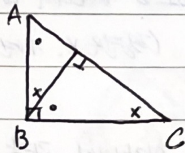
- 세변 길이 모두 동일
- 세각 모두 $\frac{\pi}{3}$로 동일 ($2:1:\sqrt{3}$)
- 외심, 내심, 무게중심 일치.

b. 이등변 삼각형



- 두변 길이가 동일
- 두 각 크기가 동일
- 수선 내려서 관찰할것.

c. 직각삼각형



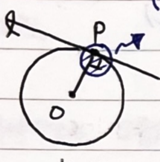
- 단일 : 길이를 삼각비로 표현할수O. (sin·cos law 사용↓)
  보조선(수선)
- 쌍 : 닮음 or 합동 관계에 주목.

(2) 원 ◎

① 기본 mind : 반지름 관련 정보가 제시되거나 묻는지 확인하여 sin law가 최소한 1번은 쓰일것임을 염두에 두기.

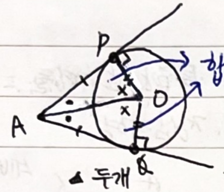
② 직선과 함께 등장시의 접근.

a. 접선



(간접적으로도) 넓이나 길이가 최대가 되는 상황으로 자주 등장 (반대 중심을 지나는 법선)

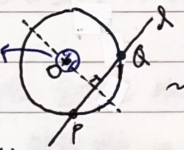
▲ 한 개.



→ 합동인 두 직각Δ에 집중하기.

▲ 두개

b. 관통직선 (¬접선) → 현



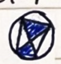
접선상황X 이어도 중심은 항상 지난다. (수직이등분선) 현 $\overline{PQ}$의

⇝ 현이 등장하면 항상 원주각 중심각 & sin law 염두.

★(3) 보조선 (h)

① 기본 mind : 무작정, 그냥 뭐지? 싶어서 막 긋지X. 오히려 관점을 흐리고 그림을 어지럽힌다. → 제시된 정보, 필요한 정보를 훼손하지 않고, 포함할수 있도록 그어야 한다. (필연은X. 개연O ... 적어도 임의적X)

② 도형의 연결성 : 1) 원주각 같은 것들 도형으로 확장해서 관찰

2)  처럼 닮음 파생 (③ 대도 O)

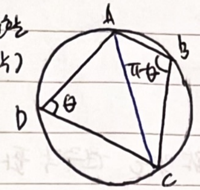
3) 변이나 각을 '어떤 도형의 일부로 보기위해' 작도

등 → 필연적은X. But 어쨌든 의도성은 있어야 함.

□→Δ

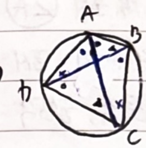
③ 대각선 (사각형 분할)

a. 각분할 (→보각)



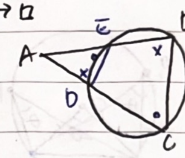
($\overline{BD}$는 X)

b. 4분할 → 닮음 (2)



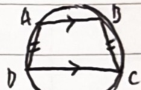
(닮음)

cf) Δ→□



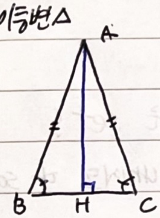
(닮음)

+m)

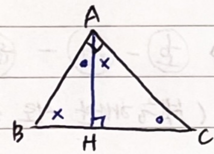


* ④ 수선 (for 직각 도입)

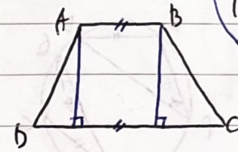
a. 이등변Δ



b. 직각 Δ

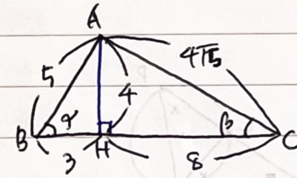


c. 사다리꼴

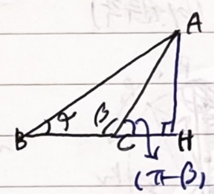


(원내접□ '평행'만 알아도 등변 확정이) ($\overline{AD}=\overline{BC}$ 이면 등변사다리꼴)

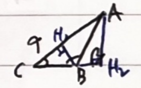
d. '양각 끼인 수선의 발' 상황 (예각, 둔각 다) → cos law 말고 just 삼각비로.



(if $\cos\alpha = \frac{3}{5}$)



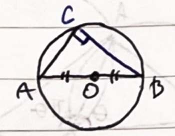
cf.

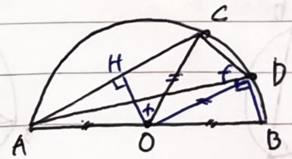


$\overline{BH_1}$ (X) $\overline{AH_2}$ (O)

(∵ ∠β 제시)

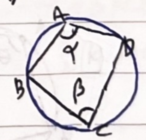
⑤ 반지름, 지름



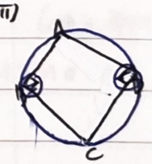


+α) 보조 도형으로서의 원

i)



ii)

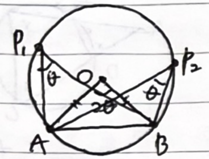


if $\alpha+\beta=\pi$

(4) 각 표시 ∠A

① 원에서의 표시

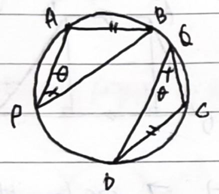
a. 원주각, 중심각



{ 항상 일정한 값 각는 원주각 표시
{ (원주각)×2 = (중심각) 표시

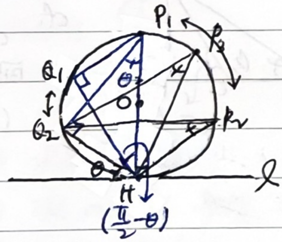
↳ 그냥 '같다.'로 끝X. 그에서 도출되는 특정 set이나 연립가능성 파악.

b. 같은 크기의 등장

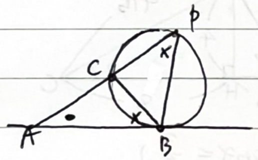


→ 호 - 현 - 원주각은 set!
(셋중 하나만 서로 같아도 나머지도 다 same)

c. 접현각 (by.원주각)

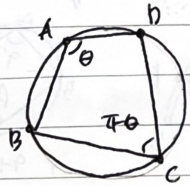


⇝

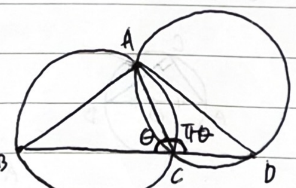


△ABC ∽ △APB (AA닮음)

d. 보각



△ 사각형의 외접원

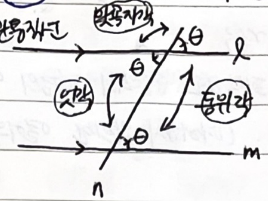


△ 공통현에 의해 분할된 평각

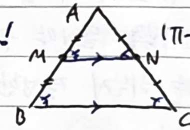
→ 특히 평행 상황에 약한데, 평행은 표시만 하고 풀이에서 그 상황만으로 등각을 도출해야 풀수O!

② 평행선, 연장선에서의 표시 ; in 수I, 덧셈정리X. about 외각으로 보기

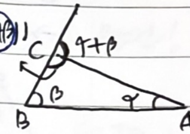
a. 평행선



b. 중점 작도

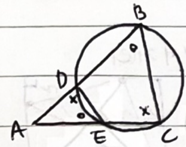


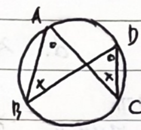
c: 연장선



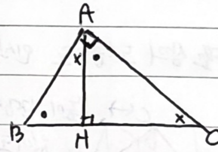
③ 닮음, 합동 표시.

a. 원에서. (보각, 원주각)

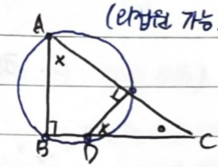




b. 직각△에서 (여각) $\bullet + x = \frac{\pi}{2}$

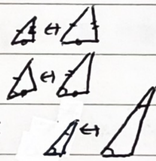


(외접원 가능)

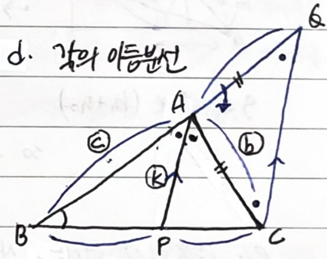


c. 조건에 따른 관계 성립

SSS :
SAS :
AA :



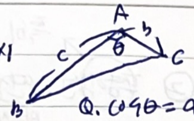
d. 각의 이등분선



→ $\cancel{\overline{AQ}} : \overline{AB} = \overline{CP} : \overline{BP}$
$\overline{AC}$

+α) $\overline{AP}$의 길이는 넓이의 분할 관점으로
→ △ABC = △ABP + △ACP (∠●는 특수각)
↔ $\frac{1}{2}bc\sin 2\bullet = \frac{1}{2}\boxed{k}(b+c)\sin\bullet$

(5) 넓이

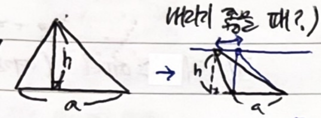
ex1


Q. $\cos\theta = a$ 일 때 $\triangle ABC$ 넓이는? → know b, c (이차곱에)

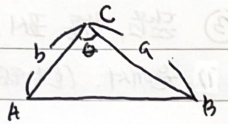
① 결과적으로 구해야할 것에 해당되는 경우

→ 어떤정보를 알아야 구할 수 있는지 파악하고 정확히 도형의 어떤 요소를 알아야 하는지 결정한 후 시작할것. (여러가지 있으면 열어두기)

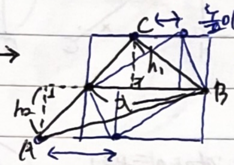
a. $S=\frac{1}{2}ah$ (각정보 없고 수선 내리기 좋을 때?)

→


b. $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ (사잇각 정보)

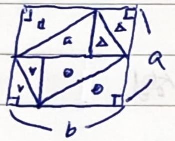
→


c. 좌표 상의 도형으로 인식.

→


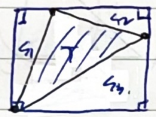
C ↔ 높이 일정하면 어디에 있어도 상관 X 넓이 변화 X

$S=\frac{1}{2}\alpha(h_1+h_2)$

↝


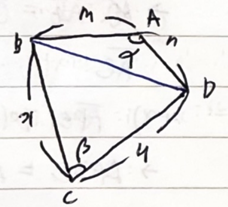
so. $\frac{1}{2}ab$ (□ 정보)

d. 전체에서 제외

→


(직사각형, 직각삼각형들로 다루면 재작시키기 쉬워짐)

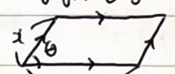
e. 사각형의 넓이는 삼각형 2개로.

→


$S=\frac{1}{2}mn\sin\theta+\frac{1}{2}xy\sin\beta$

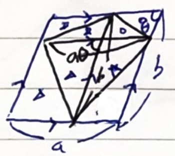
f. 기타 특수한 상황

✓ 평행사변형



$S=xy\sin\theta$ (사잇각 θ)

✓ 대각선 길이 know

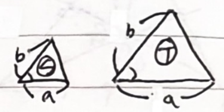


$S=ab\sin\theta$

② 조기정보로 제시되는 경우

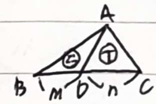
→ 넓이값을 그냥 준다면 ① 과 동일하게 대하면 되고, 비율관계로서 제시되는 경우에 특히 집중하자. 비율관계가 제시되면, 3인 무조건!

a. 닮음비 ⟷(혼동) 넓이비 (sqrt) →



S:T= :

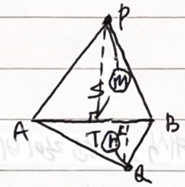
b. 밑변 길이 비 (by. 내분선) →



S:T=m:n

(∵ 높이 동일)

c. 높이 비 →



S:T=m:n (∵ 밑변 공유)

✓ 표현방식과 더불어 내가 발견은 하고 안 써먹는 정보 중 하나! 특히 유의.

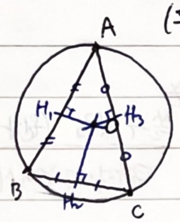
✓ "그냥 점인 줄 알았는데 알고보니 '점의'를 만족한다." (분석적) 라는 식으로 숨김.

(6) 특수한점

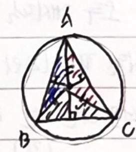
→ 외심, 내심, 무게중심은 조기정보로 제시되든 안 되든 그 자체로 결국 등식 하나를 갖고 있어 성질을 활용해야 풀리는 경우 MM.

① 외심 : 세 변의 수직이등분선의 교점

(두 개만으로 결정 O)



→



• 사용 정보 (직접 안 줘도 '외심' 이냐, 아니냐)

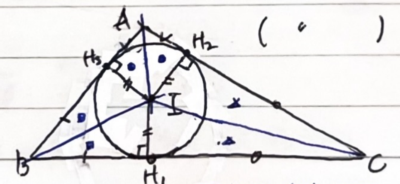
i) 세 개의 합동 관계가 등장

* ii) 세 꼭짓점의 거리 r로 일정 (반지름에 집중!)

* iii) sin law로 △와 O 정보 연결

iv) 현에 접선의 수직이등분선 must O 지남

② 내심 : 세 각의 이등분선의 교점 (•)



• "

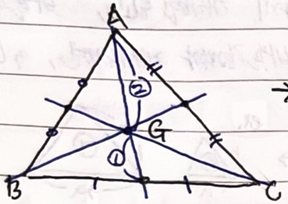
i) 세 개의 합동 관계가 등장

→ ii) 접선과 「접점 to 내심」 수직 must

* iii) (넓이공식) ×2 [▭ = $\frac{1}{2}(a+b+c)r$

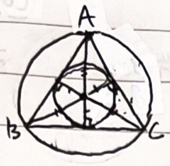
iii) 원리는 내심 아니어도 자주 O → 등식 도출!

③ 무게중심 : 중선들의 교점



→ i) 이등분

ii) 이등분선 2:1 비율 성립



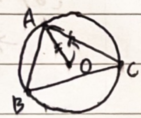
cf) 외심 = 내심 = 무게중심인 도형은 정삼각형 only!

part 3 도형 결정

(1) sin law의 이해.

① 비례식 : 대변 길이 비와 대각 sin값의 비율관계

$$\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\right) = 2R$$



② 삼각형의 변, 각 정보와 그 외접원의 반지름 정보 호환 통로

바꿔보는

so, ① 대변·대각이 모두 제시될 때

② 외접원이 제시될 때 (△와 호환) … 쓸수 있음 (뭔가 결정가능함)을 알자.

③ 한 △ 내의 서로다른 변(각) 관계 표현   역추적·재추적시 leaping 가능성 (A를 알며 → B를 안다)

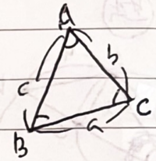
(2) cos law의 이해

① 계산기 : 3개의 변, 3개의 각 중 6개 中 3개의 정보를 안다면, 그 도형(△)은 결정되어 있음 (전부 구할 수 있음)

⇒ $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

or

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$



(무엇에 대해 정리했는가의 차이)

도형 Advanced

part 1 multi-sin law

→ 두개 이상의 삼각형 및 외접원이 등장하면 ① 반지름 길이 비 에 집중할 것. ② 공통변, 공통각 (or 보각)

(n) $\frac{a_n}{\sin A_n} = 2r_a$, $\frac{b_n}{\sin B_n} = 2r_b$

i) 외접원 반지름 길이

ii) 변에 대응하는 각의 sin값

iii) 변의 길이   두개 알아야 O

셋 중 하나 일치하거나 비율 관계가 성립하면 나머지 정보도 알수 O.

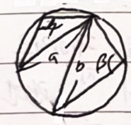
하나만 알아도 O

(비율관계로서)

① 예시 상황 i)

ex1

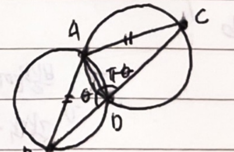
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$ ←



▲ 외접원 일치 (한원내)

즉 $a:b = \sin\alpha : \sin\beta$

ex2

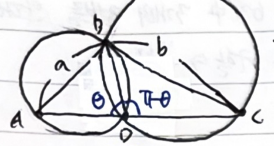


→ $\overline{AB} = \overline{AC}$

▲ 반지름 길이 같은 두 원.

② 예시 상황 ii)

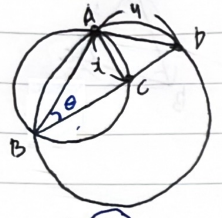
ex1.



→ $\frac{a}{\cancel{\sin\theta}} : \frac{b}{\cancel{\sin(\pi-\theta)}} = r_a : r_b$

△ 보각

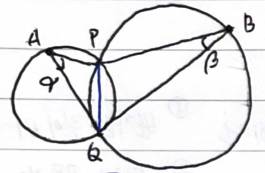
ex2.



→ $\frac{x}{\cancel{\sin\theta}} : \frac{y}{\cancel{\sin\theta}} = r_x : r_y$

△ 공통각

③ 예시 상황 iii)



→ $\frac{\cancel{PQ}}{\sin\varphi} : \frac{\cancel{PQ}}{\sin\beta} = r_A : r_B$

즉 $\sin\beta : \sin\varphi = r_A : r_B$ (역수비)

△ 공통현

part Ⅲ 수식구조 활용 in cos law, 넓이공식

① a^2+b^2
② ab
③ $a-b$
④ $a+b$

$_4C_2$를 알면 나머지도 모두 구할수 있다.

→ 발문에서 $\overline{AB}+\overline{AD}$를 구하라고 했을 때, i) 각각 구해서 더하기인지 ii) 관련 등식 n개로 구조상 아는거 미리 알수는 없지만 풀다가 막히면 i) 아니고 ii) 인지 고민하는 센스 필요.

① a^2+b^2와 ab의 등장 in cos law

→ $c^2 = \boxed{a^2+b^2} - 2\boxed{ab}\cos C$

② ab의 등장 in 넓이공식

→ $S = \frac{1}{2}\boxed{ab}\sin C$

+α) 곱이 일정하다는 정보만 알고 나머지는 몰라서 결정이 안 되는 상황에선 산술기하 평균 부등식 활용!

* 비결정 상황

① 부등식 도출 : 곱이 일정할 때

$a^2+b^2 \geq 2ab$ or $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (=)

② 특정 상황의 발견 : 보통 지름, 접점, 수선 등 특수한 '것'이 되거나 원의 중심을 지나거나 평행한다는 등의 특수한 '상황'이 될 때가 정답상황 (고정된 것과 그렇지 않은 것의 구분이 중요)