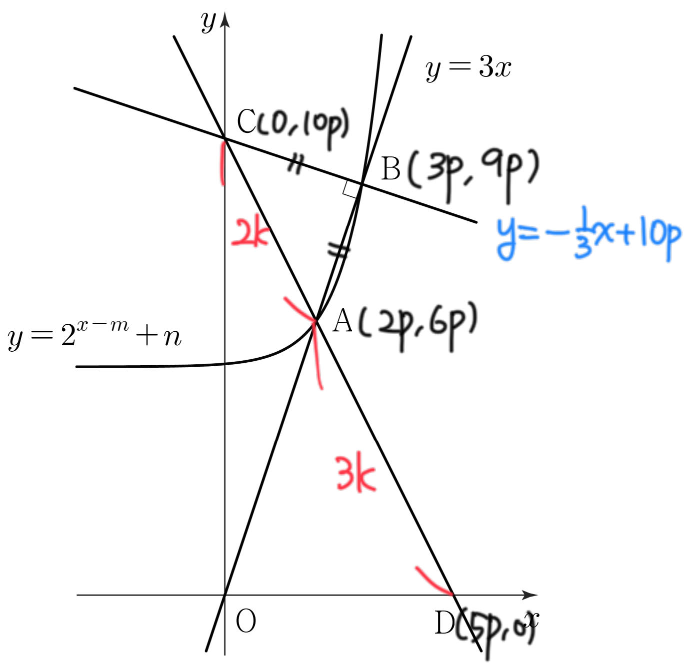
결국 △ABC가 직각이등변△인 것만 찾으면 된다.

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n$ $(m>0,\ n>0)$ 과 직선 $y=3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, 점 B 를 지나며 직선 $y=3x$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 C 라 하자. 직선 CA 가 x 축과 만나는 점을 D 라 하면 점 D는 선분 CA 를 5:3 으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 20 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작다.) [4점]



$y=3x$ 에 수직인 직선의 기울기 : $-\frac{1}{3}$

점 D가 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이므로 $\overline{CA}:\overline{AD}=2:3$ 이다.

이 때 $y=3x$ 위의 점 A의 좌표를 $(2p, 6p)$으로 두면

(∵ $A(p, 3p)$으로 안 놓는 이유는 그냥 숫자 깔끔하게 하려고.
A의 x좌표 : D의 x좌표 $= 2:5$ 니까 $2p$로 둔 것임)

점 $D(5p, 0)$, 점 $C(0, 10p)$를 구할 수 있다.

곧 직선 BC의 방정식은 기울기 $-\frac{1}{3}$, y절편 $(0, 10p)$ 이므로 $y=-\frac{1}{3}x+10p$ 인데,
이 직선과 $y=3x$ 사이의 교점이 점 B이므로 둘을 연립하면 $B(3p, 9p)$을 얻는다.

좌표 다 아니까 ~

이제 $\overline{BC}=\overline{AB}=p\sqrt{10}$ 을 구할 수 있고, 직각이등변△ ABC의 넓이가 20이므로 $p\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ 이다.

(∵ 

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=20$)

∴ $p=2$

따라서 $\begin{cases} A(2p, 6p) = A(4, 12) \\ B(3p, 9p) = B(6, 18) \end{cases}$ 을 $y=2^{x-m}+n$ 에 대입하면

① $12=2^{4-m}+n$

② $18=2^{6-m}+n=2^2(2^{4-m})+n$

$\Rightarrow 3\cdot 2^{4-m}=6$ 이므로 $m=3,\ n=10$ 이다.

㉠ $m+n=\boxed{13}$

가출 열심히 풀어봤으면 풀 만 했을걸? 근데 완벽하게 푸는건 좀 빡셀지도

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다.

(다) 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x \{f(u)-ku\}du \geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)=f(x)-x-(f(t)-t)$ 으로 생각하면
$g(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 $f(x)-x=f(t)-t$ 의 서로 다른 실근의 개수 의미.
즉, 우리는 $f(x)-x$ 를 $P(x)$로 치환하면 (필수는 아님)
$P(x)=P(t)$ 의 실근의 개수가 $h(t)$ 이라는 것을 알 수 있다.
($y=P(x)$ 는 사차식 - 일차식이므로 최고차항의 계수가 양수인 사차함수)

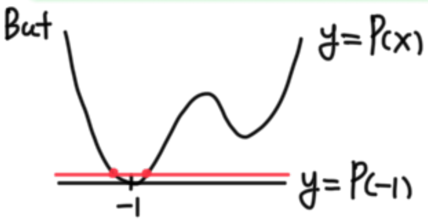
혹시 헷갈릴까봐 한번 더 언급하자면, 우리는 t를 움직여가며 t가 결정될때마다 같이 결정되는 'x축에 평행한 직선' $y=P(t)$를 관찰하는 것이고 이 직선과 $y=P(x)$ 사이의 교점의 개수를 세는 것이다.

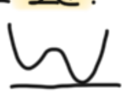
t가 결정되면 그거 상수

조건 (가)에서 사차함수와 $y=$(상수)꼴의 함수가 서로 다른 점에서 만날 수 있는 개수는 최대 4개이므로 $h(t)$의 최댓값은 4이다.
즉, 조건 (가)를 만족할 수 있는 $h(-1)$ 와 $h(1)$ 은 각각 최대 2이다.

i) $h(-1)$ 이 1인 경우

$\lim_{t\to -1} h(t)=3$ 이 되어야 함.

But 

∴ $\lim_{t\to -1} h(t)=2$ 이므로 모순.
다른 경우는 없다.  말고는...

ii) $h(-1)$ 이 0인 경우

$\lim_{t\to -1} h(t)=2$ 이 되어야 함.

이 경우는 해보면 알겠지만 극한을 잘 이해하고 있으면 무조건 $\lim_{t\to -1} h(t)=0$ 임을 알 수 있다.
∴ 모순

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

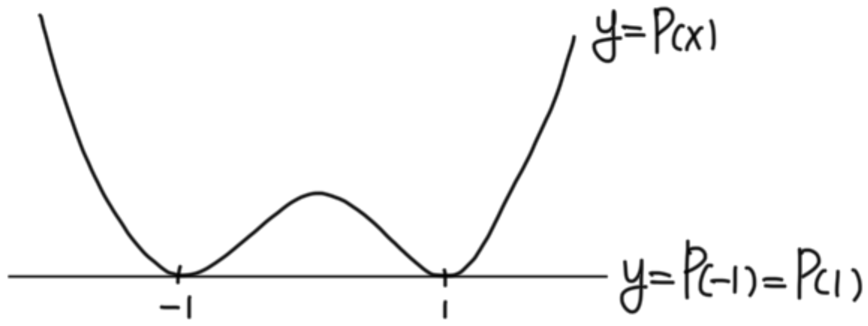
따라서 $h(-1)=h(1)=2$ 이고, 이 case를 다음 page에 다루도록 하겠다.

22번 이어서 … ①

만든 놈 : crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

곧 $h(-1)=h(1)=2$ 이고, $\lim_{t\to-1} h(t)=\lim_{t\to1} h(t)=4$ 이다.

⇒ $x=-1$, $x=1$ 에서 $y=P(x)$는 dramtic한 변동이 있을 것으로 생각할 수 있고, 다양한 개형 중 해당 조건을 만족하는 개형은



뿐이다.

이로부터 우리는 $P(x)=f(x)-x=p(x+1)^2(x-1)^2+k$ 꼴로 둘 수 있다. ($k=P(-1)=P(1)$)

조건 (나)가 의미하는 것은
① $y=f(x)$의 함숫값은 구간 $[-1,0]$에서는 전부 양수라는 것
② 가능한 α의 "최솟값"이 -1이므로 $\lim_{x\to-1-} f(x)<0$ 이라는 것
⇒ $f(-1)=0$

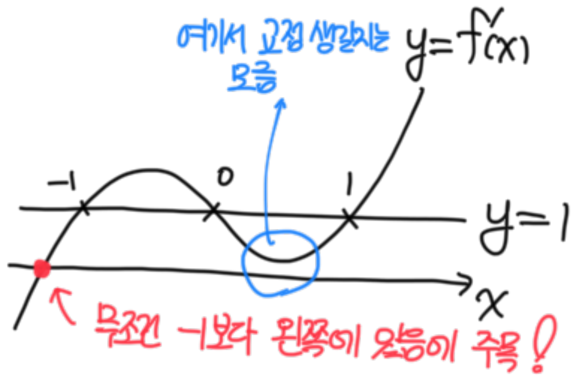
이를 $f(x)-x=p(x+1)^2(x-1)^2+k$에 대입하면 $f(-1)+1=k$ 이므로 $k=P(-1)=P(1)=1$을 구할 수 있다.

∴ $f(x)=p(x+1)^2(x-1)^2+x+1$

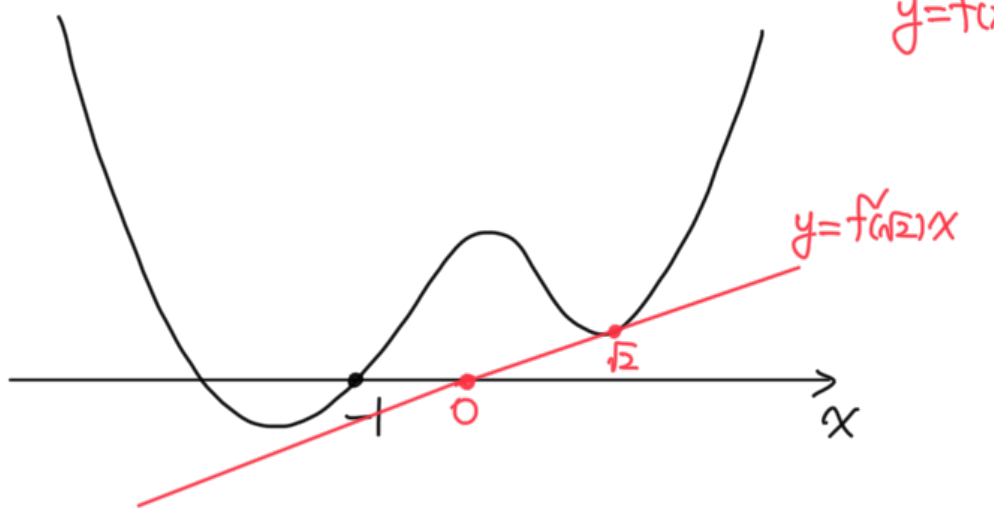
조건 (다)는 복잡해보이지만 결국 $\int_0^x \{f(u)-ku\}du$ 를 x에 대해 미분하라는 간단한 의미이고, 하라는대로 미분하면
모든 실수 x에 대해 $f(x)-kx\ge0$, 즉 $f(x)\ge kx$ 이 되도록 하는 실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt2)$ 임을 의미한다.

즉, 이는 접선과 관련이 있다.

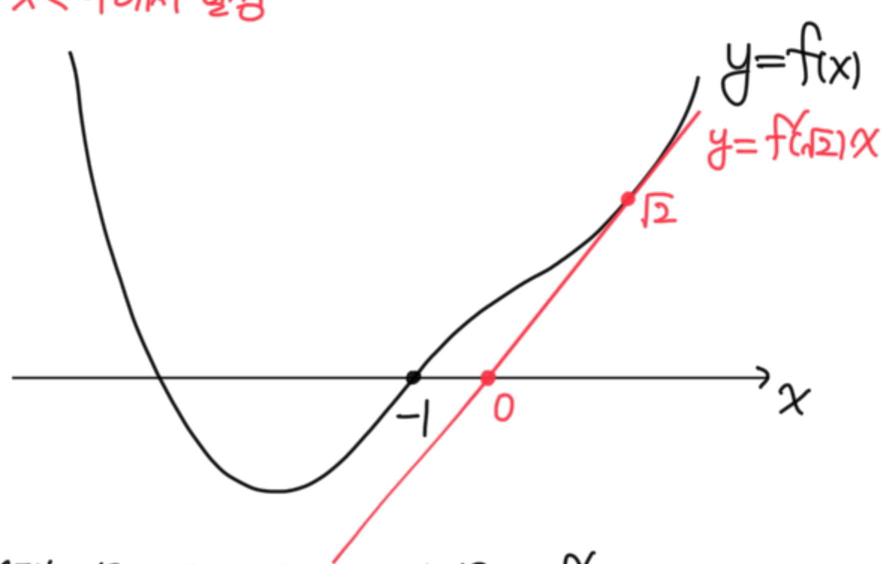
$f(x)=p(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 에서 $f'(x)=2p(x+1)(x-1)^2+2p(x+1)^2(x-1)+1$
$=2p(x+1)(x-1)(x-1+x+1)+1$
$=4px(x+1)(x-1)+1$ →



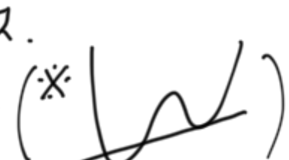
$f'(x)=4px(x+1)(x-1)+1$ 이므로 $f'(x)$의 부호변동점은 $x<-1$에서 발생하고, $f(-1)=0$과 연결해 생각하면 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.
$y=f(x)$의 극점 $x<-1$에서 발생



OR



즉, $f(x)\ge kx$는 원점을 지나는 직선의 기울기를 점점 키워보니 $y=f(x)$와 접하는 지점이 존재하고, 그 때의 기울기가 $f'(\sqrt2)$이라는 것.
⇒ $(\sqrt2, f(\sqrt2))$ 에서의 $f(x)$의 접선이 원점을 지나고, 그 직선을 연장하더라도 무조건 $y=f(x)$가 접선보다 위에 존재한다고 해석가능. (※



이런거 X)

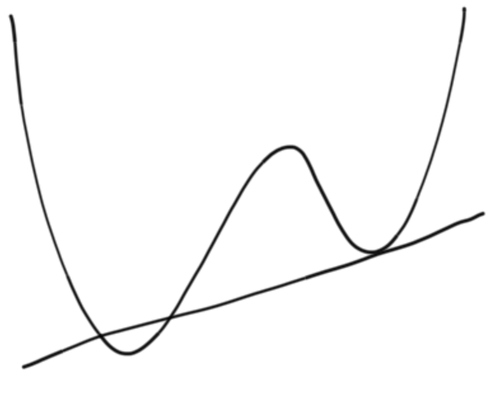
∴ $f'(\sqrt2)=4p\sqrt2+1$, $f(\sqrt2)=p+\sqrt2+1$ 이므로 접선의 방정식은 $y=(4p\sqrt2+1)(x-\sqrt2)+p+\sqrt2+1$ 이고, 이 직선이 원점을 지나므로 이를 계산하면 $p=\frac{1}{7}$ 이다.

이 부분 부연설명이 다음 page

따라서 $f(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 이므로 ㉠ $f(6)=\boxed{182}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

구한 $f(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 과 $y=f'(\sqrt{2})x$이 정말



과 같은 형태가 아닌지 점검 필요 !

사실 이 문제 맞췄어도 이것까지 다 점검하신 분들은 많진 않을 것 같긴 함… 시간관계도 있고 하니까

이 경우 $y=f'(\sqrt{2})x$는 $y=\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}+1\right)x$ 이므로 이 식을 $g(x)$로 두면 (문제에서의 $g(x)$와 당연히 다른 함수. 그냥 편의상 $g(x)$로 쓸게요)

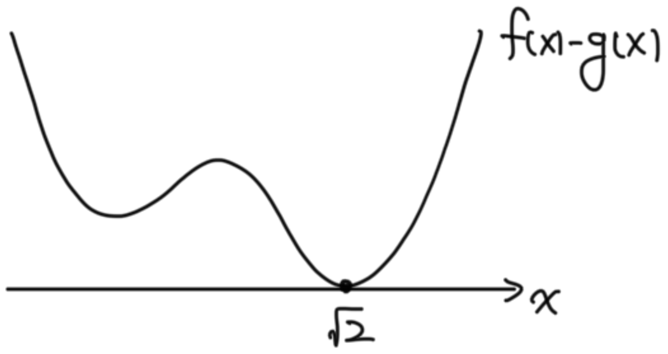
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2-\frac{4\sqrt{2}}{7}x+1$$
$$=\frac{1}{7}(x^4-2x^2-4\sqrt{2}x+8)$$

이 사차식의 근을 어떻게 구하냐고 난리칠수 있겠으나, 우리는 이미 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=\sqrt{2}$에서 접한다는 것을 알기 때문에
$\frac{1}{7}(x^4-2x^2-4\sqrt{2}x+8)$ 또한 $(x-\sqrt{2})^2$을 인수로 가진다.

조립제법 !

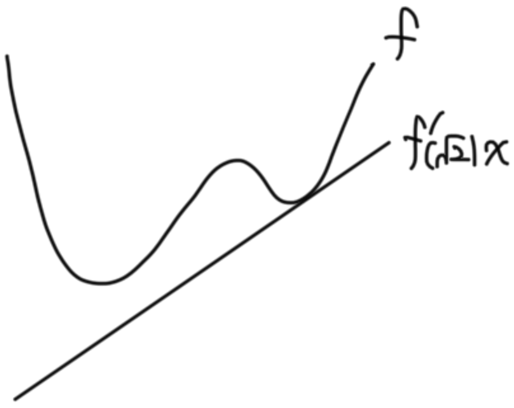
$\sqrt{2}$	1	0	-2	$-4\sqrt{2}$	8
		$\sqrt{2}$	2	0	-8
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	0	$-4\sqrt{2}$	0
		$\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	
	1	$2\sqrt{2}$	4	0	

$\Rightarrow$ $\frac{1}{7}(x-\sqrt{2})^2(x^2+2\sqrt{2}x+4)$에서
$x^2+2\sqrt{2}x+4$의 판별식 $D<0$ 이므로



꼴.

따라서 $y=f(x)$와 $y=f'(\sqrt{2})x$ 사이의 관계는



이다.

$\therefore$ 문제 없음