제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^3-7x+5$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f' = 3x^2 - 7$

$f'(2) = 5$

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{3}{5}$ 이고 $\sin\theta\cos\theta<0$ 일 때, $\sin\theta+2\cos\theta$ 의 값은? [3점]

$-$ $+$

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

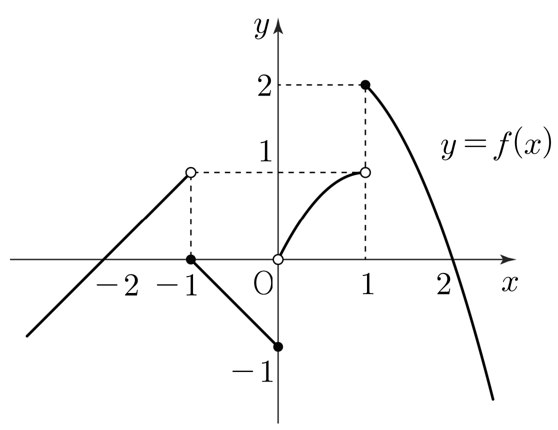
$\cos\theta = \frac{3}{5}$

3, -4, 5

$\sin\theta = \frac{-4}{5}$

$-\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$0+1=1$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \le 1) \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

$3+a=b+3$, $a=b$

$f'=\begin{cases} 3 & (x<1) \\ 6x^2+b & (x>1) \end{cases}$

$3=6+b$

$b=-3$

$a=-3$

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3^{\,2}=a_6,\ a_2-a_1=2$$

일 때, a_5 의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$a_3=\dfrac{a_6}{a_3}=r^3$

$a_2=r^2$

$a_1=r$

$r^2-r=2$

$r=2,-1$

$r=2$

$a_5=r^5=32$

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$ 가 $x=1$ 에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$f'=3x^2+2ax-9$

$f'(1)=3+2a-9=0$ $a=3$

$f'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f(-3)=-27+27+27+4=31$

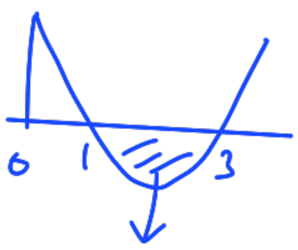
8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - 4t + 3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a\ (a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$v = (t-1)(t-3)$, $a=3$



$\int_0^1 |v| = \int_1^3 |v|$

$\frac{1}{6}(3-1)^3 = \frac{4}{3}$

$\therefore \int_1^3 |v| = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$x^n = 8$ or $x^{2n} = 8$

$\sqrt[n]{8} \times \left(\sqrt[2n]{8} \times \left(-\sqrt[2n]{8}\right)\right)$

$\sqrt[n]{8} \times \left(-\sqrt[n]{8}\right)$

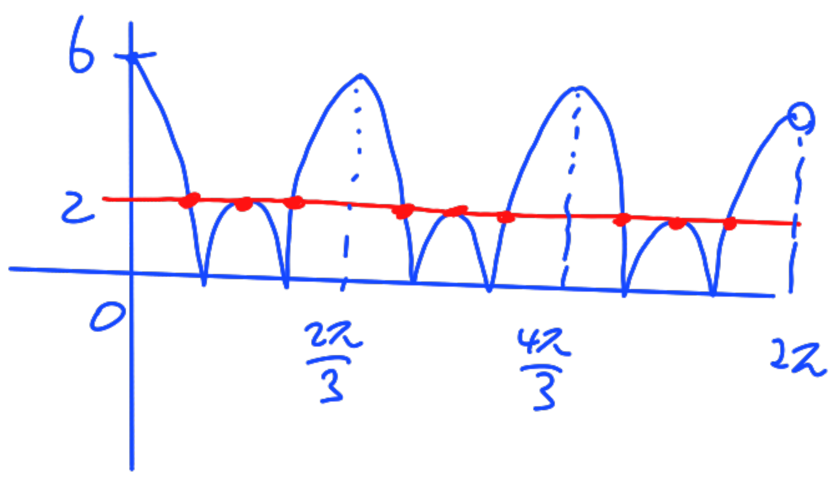
$= -\sqrt[n]{64} = -4$

$4^{\frac{3}{n}} = 4^1$, $n=3$

10. $0 \leq x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$4\sin 3x + 2$ 주기: $\frac{2\pi}{3}$



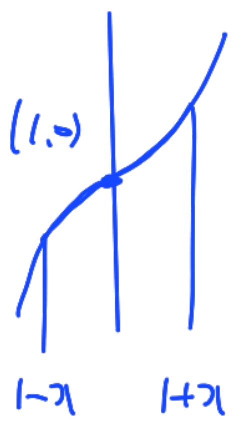
11. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 이다.

(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$

$f(4)$ 의 값은? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40



$f(1+x)+f(1-x)=0$

$\Downarrow$

$f(x)$는 (1,0) 점대칭

$\Downarrow$

$f(x+1)$: (0,0) 대칭 기함수

$f(x+1) = x^3 + ax$

$f(x) = (x-1)^3 + a(x-1)$

(나) $f(3) - f(-1) = 12$

$\Rightarrow (8+2a) - (-8-2a) = 12$

$4a + 16 = 12, \ a = -1$

$f(x) = (x-1)^3 - (x-1)$

$f(4) = 27 - 3 = 24$

12. 모든 항이 정수이고 공차가 5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$

(나) $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 13$

$24 < a_{21} < 29$ 일 때, m 의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

(가) $(2m+1)a_{m+1} < 0, \ a_{m+1} < 0$

$\Rightarrow a_m < -5$

a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	
$-$	$-$	$+$	$\rightarrow$ ①
$-$	$-$	$-$	$\rightarrow$ ②

① $a_{m+2} \geq 0$

$-a_m - a_{m+1} + a_{m+2} < 13$

$-a_m + 5 < 13, \ a_m > -8$

$-8 < a_m < -5, \ a_m = -7, -6$

$24 < a_{21} < 29$

$19 < a_{20} < 24$

$\vdots$

$-6 < a_{15} < -1$

$-11 < a_{14} < -6$

$a_{14} = -7$

$m = 14$

② $a_{m+2} < 0$

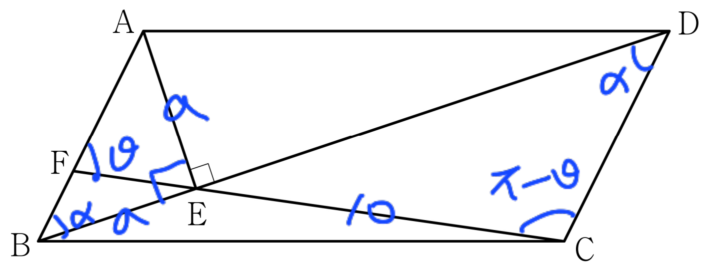
$-a_m - a_{m+1} - a_{m+2} < 13$

$-3a_{m+1} < 13, \ a_{m+1} > -\frac{13}{3}$

$d=5$

$a_{m+2} > \frac{2}{3}$ (×)

13. 그림과 같이 평행사변형 ABCD 가 있다. 점 A 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 하고, 직선 CE 가 선분 AB 와 만나는 점을 F 라 하자.
$\cos(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$ 이고 삼각형 CDE 의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 AFE 의 넓이는? [4점]



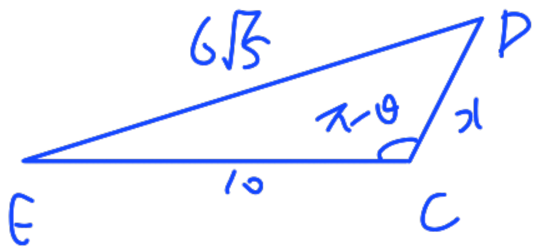
$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

$\frac{10}{\sin\alpha}=10\sqrt{2}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\frac{DE}{\sin(\pi-\theta)}=10\sqrt{2}$, $DE=\sin\theta\times10\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}\times10\sqrt{2}=6\sqrt{5}$



$180=x^2+100-2\cdot x\cdot10\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$

$x=-\sqrt{10}\pm\sqrt{90}$ $\begin{cases}2\sqrt{10}\\-4\sqrt{10}\end{cases}$ $\therefore x=2\sqrt{10}$

$\overline{AB}=\sqrt{2}a=2\sqrt{10}$, $\therefore a=2\sqrt{5}$

$\triangle FEB \sim \triangle CED$

$BE:ED=2\sqrt{5}:6\sqrt{5}=1:3$ $\therefore BF:CD=1:3$

$BF:AF=1:2$

$\triangle AFE=\frac{2}{3}\triangle ABE=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{3}\times20=\boxed{\frac{20}{3}}$

14. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(-3)=f(0)$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$f(-3)=0 \rightarrow f(0)=0$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\ge0)\\ -f(x) & (-3\le x<0)\end{cases}$$

$g(x)$: 연속 $\left.\begin{matrix}\\ g(x-3): \text{연속}\end{matrix}\right]$ k 존재 X

$\therefore f(-3)=f(0)\neq0$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$

ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$ 이 $x=k$ 에서 불연속인 실수 k 가 음수일 때 집합 $\{x\,|\,f(x)=0,\ x \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합이 -1 이면 $g(-1)=-48$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(x)\times g(x-3)$

0^- $-f(0)\times f(-3)$
0^+ $f(0)\times(-f(-3))$
0 $f(0)\times(-f(-3))$ $\Big) = -f(0)\times f(-3)$ 연속

ㄴ. $g(x)g(x-3)$ $x=k$ 불연속,

불연속 후보 $k=-3, 0$
$k-3=-3, 0 \rightarrow k=0, 3$) $k=0$에서 연속이므로 불연속 후보 $k=3, -3$

(i) $x=3$ 연속, $x=-3$ 불연속

$g(x)g(x-3)$
3^- $f(3)$ $-f(0)$
3^+ $f(3)$ $f(0)$
3 $f(3)$ $f(0)$
⇓
$f(0)\neq0$
$\therefore f(3)=0$

$g(x)g(x-3)$
-3^- $f(-3)$ $f(-6)$
-3^+ $-f(-3)$ $f(-6)$
-3 $-f(-3)$ $f(-6)$
⇓
$f(-3)\neq0$
$\therefore f(-6)\neq0$

⇒

(ii) $x=3$ 불연속, $x=-3$ 연속
⇓ ⇓
$f(3)\neq0$ $f(-6)=0$

$\therefore f(-6)\times f(3)=0$ (ok)

ㄷ. $k=-3$ ⇒ (i) 케이스 $f(3)=0$, $f(-6)\neq0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$

$f(0)=-3b$
$f(-3)=-6(9-3a+b)$ $\Big] =$ $b=18-6a+2b$,
$b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

근 $\begin{cases}3, \alpha, \beta \rightarrow \alpha+\beta=-4,\ a=4 \rightarrow x^2+4x+6=0 \text{ 허근 (x)}\\ 3, -4, -4 \rightarrow (x+4)^2=x^2+8x+16=x^2+ax+6a-18\ (x)\\ 3, 3, -4 \rightarrow x^2+x-12=x^2+ax+6a-18,\ a=1\ (o)\end{cases}$

$\therefore f(x)=(x-3)(x^2+x-12)$, $g(-1)=-f(-1)=\boxed{-48}$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

243 ↓ 81 ↓ 27 ↓ 9 ↓ 3 ↓ 1

27+9+3+1 =40

i) $a_4 = 3^n \Rightarrow a_4 = 27$

a_1	a_2	a_3	a_4
$\boxed{237}$	243	81	27
$\boxed{69}$	75	81	27
9 (×)	15	21	27

9 → 3

ii) $a_4 \neq 3^n$, $a_4 \sim a_7 \neq 3^n$

$a_4 = \alpha$

$a_5 = \alpha + 6$

$a_6 = \alpha + 12$

$+\ a_7 = \alpha + 18$

$40 = 4\alpha + 36$, $\alpha = 1$

a_1	a_2	a_3	a_4
$\boxed{27}$	9	3	1

(iii) $a_4 \neq 3^n$, $a_m = 3^n$ $(5 \le m \le 7)$

$\sum_{4}^{7} a_k = 40$ 이므로 $a_4 < 40$

$a_4 = 21,\ 15$

$a_5 = 27,\ 21$

$a_6 = 9,\ 27$

$a_7 = 3,\ 9$

⇓ ⇓

60, 72 (×)

$\therefore 237 + 69 + 27 = \boxed{333}$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-5) = \log_4(x+7)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{9}$

$x > 5$

$\log_4 (x-5)^2 = \log_4 (x+7)$

$x^2 - 10x + 25 = x + 7$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$x = 2, 9 \quad (x > 5)$

$\therefore x = 9$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$이고 $f(1) = 10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{20}$

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + C$

$f(1) = C = 10$

$f(2) = 24 - 16 + 2 + 10 = 20$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{65}$

$2\Sigma a_k+30=40$ / $\Sigma a_k-\Sigma b_k=-10$

$\Sigma a_k=5 \rightarrow \Sigma b_k=15$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k+50=65$

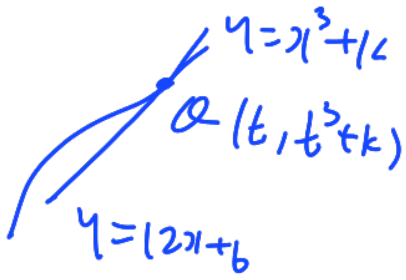
19. 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{22}$

$y'=3x^2$

$y'_{x=-2} \Rightarrow 12$ $\quad \therefore y=12(x+2)-18$

$y=12x+6$



공통접선 $\Rightarrow \begin{cases} t^3+k=12t+6 \\ 3t^2=12 \end{cases}$

$t=2,-2$

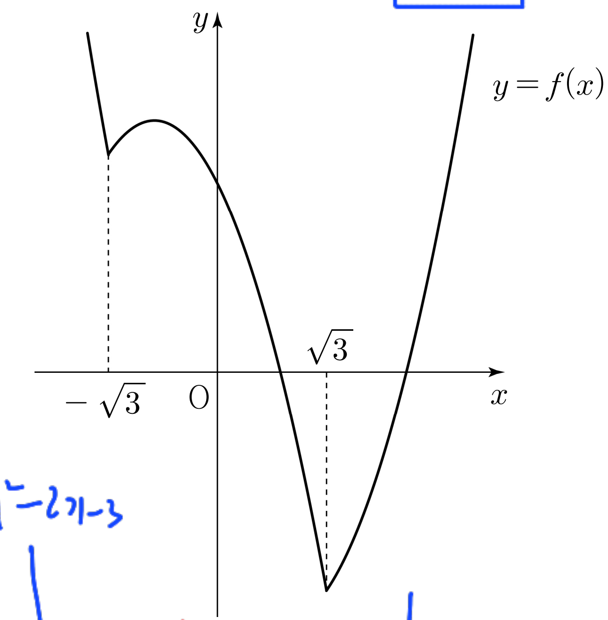
$k=22,-10$ $\quad \therefore k=22\ (\because k>0)$

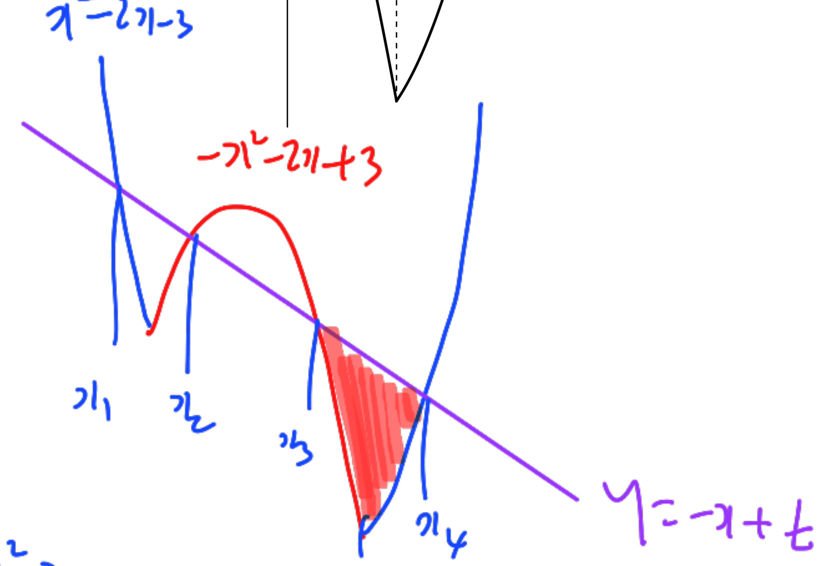
20. 실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 단힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{54}$





$x^2-2x-3=-x+t,\ x^2-x-t-3=0$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{1+4(t+3)}=5,\ t=3,$

$x^2-x-6=0,\ x=-2,3\quad x_4=3$

$-x^2-2x+3=-x+3,\ x^2+x=0,\ x=-3,0\quad \therefore x_3=0$

$\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}(-x^2+x+6)dx$

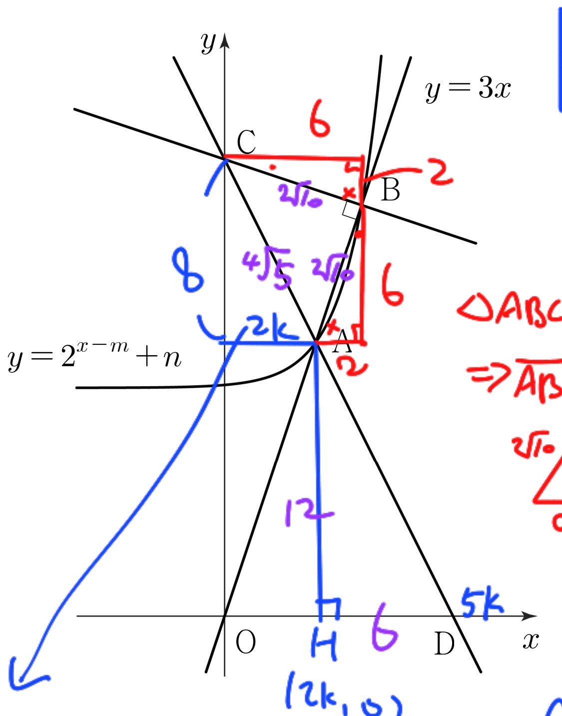
$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^{3}$

$=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(-\sqrt{3}+\frac{3}{2}+6\sqrt{3}\right)$

$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3},\ \begin{cases} p=\frac{27}{2} \\ q=4 \end{cases}\quad p\times q=54$

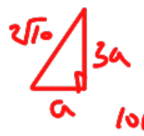
21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n\ (m>0,\ n>0)$ 과 직선 $y=3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, 점 B 를 지나며 직선 $y=3x$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 C 라 하자. 직선 CA 가 x 축과 만나는 점을 D 라 하면 점 D 는 선분 CA 를 5:3 으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 20 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작다.) [4점]

$\boxed{13}$



△ABC = 20

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{10}$



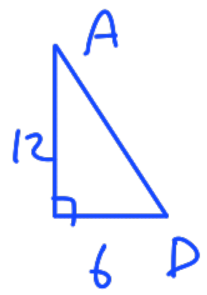
$10a^2=40$

$a=2$

DC : DA = 5 : 3

$\Rightarrow$ OH : OD = 2 : 5

$64+4k^2=80,\ k^2=4,\ k=2$



CD 기울기 : -2

$\Rightarrow \overline{AH}=12$

$A(4,12),\ B(6,18)$

$2^{4-m}+n=12$

$-\ \underline{2^{6-m}+n=18}$

$16\cdot 2^{-m}-64\cdot 2^{-m}=-6$

$2^{-m}=\frac{1}{8}=2^{-3},\ m=3,\ n=10$

$m+n=13$

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

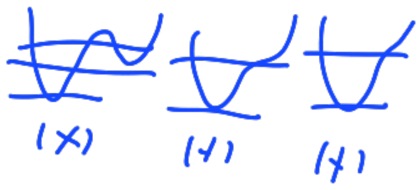
라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$
>
> (나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다. $0\sim\alpha$ $f\geq 0$.
>
> (다) 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x \{f(u)-ku\}du\geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{182}$

$g(x)=0 \Rightarrow \underbrace{f(x)-x}_{A(x)}=\underbrace{f(t)-t}_{A(t)}$

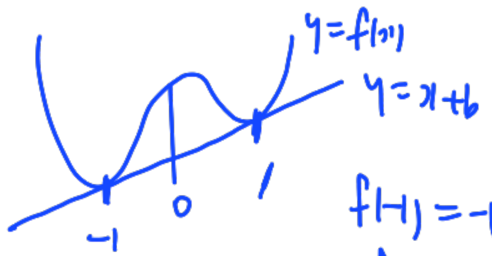
$A(x)=A(t)$



$\therefore A(x)=a(x+1)^2(x-1)^2+b\ (a>0)$

$f(x)-x=a(x+1)^2(x-1)^2+b$

$f(x)-(x+b)=a(x+1)^2(x-1)^2$



(나) $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0,\ b=1$

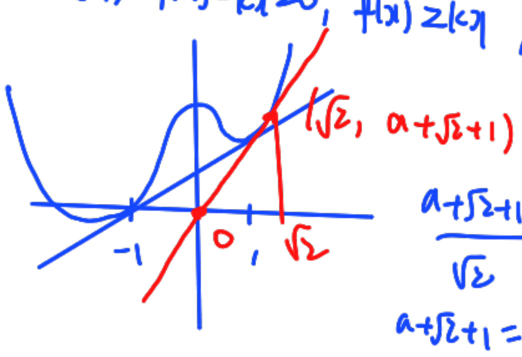
$f(x)=a(x+1)^2(x-1)^2+x+1$

(다) $f(x)-kx\geq 0,\ f(x)\geq kx,$

$f=a(x^2-1)^2+x+1$

$f'=2a(x^2-1)\cdot 2x+1$

$f'(\sqrt{2})=4a\sqrt{2}+1$



$\frac{a+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=4a\sqrt{2}+1$

$a+\sqrt{2}+1=8a+\sqrt{2}\quad a=\frac{1}{7},$

$f(x)=\frac{1}{7}(x^2-1)^2+x+1$

$f(6)=5\cdot 35+6+1$

$=182$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^8의 계수는? [2점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

$_6C_4(x^2)^4(2)^2$

$= 60x^8$

24. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 27의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

$27=3^3$ 3&6 3개 이상

3&6 → $\frac{1}{3}$

1,2,4,5 → $\frac{2}{3}$

$_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{3^4}$

$_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{3^4}$

$\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$

25. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X^2	1	4	9	
X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$a+b$	b	1

$\mathrm{E}(X^2)=a+5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

$$\begin{cases} a+(a+b)+b=1 \\ a+4(a+b)+9b=a+5 \end{cases}$$

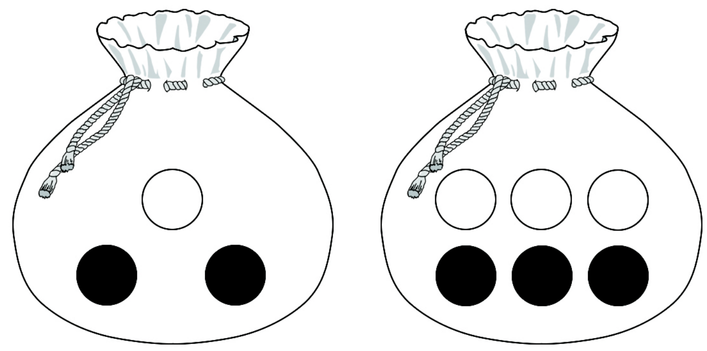
$$\begin{cases} 2a+2b=1 \\ 4a+13b=5 \end{cases}$$

$-\ 4a+4b=2$

$9b=3,\ b=\frac{1}{3},\ a=\frac{1}{6}$ $b-a=\frac{1}{6}$

26. 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{92}{105}$ ③ $\frac{94}{105}$ ④ $\frac{32}{35}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



A B

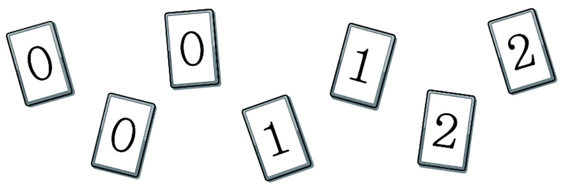
A

$$\begin{cases} W \rightarrow \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{34}{35}=\frac{34}{105} \\ B \rightarrow \frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{31}{35}=\frac{62}{105} \end{cases}$$

$\frac{96}{105}=\frac{32}{35}$

27. 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18



i) $\boxed{02020}$ 11 ⇒ 3

ii) 2가 맨앞 20-----

20 → 3

0 2 0 1 1 → 1

1 0 2 0 1 → 1

1 1 0 2 0 → 1

6

iii) 2가 맨 뒤 -----02

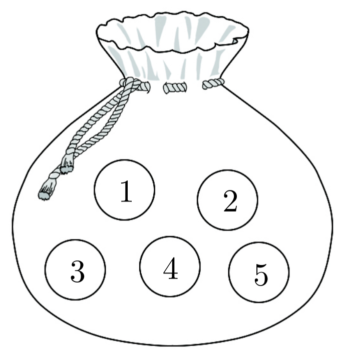
ii)와 대칭 → 6

iv) 2가 양쪽 끝 20---02 → 3

3+6+6+3=18

28. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 $n\,(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\,(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{4}{19}$ ② $\frac{5}{19}$ ③ $\frac{6}{19}$ ④ $\frac{7}{19}$ ⑤ $\frac{8}{19}$



$a_1 > 1$

$a_2 > 2$

$a_3 \le 3$

a_3 a_1 a_2

1 < 2 → 3개 3

345 → 2개 6

2 → 345 → 2개 6

3 < 2 → 2개 2

45 → 1개 2

⇓

19개

$\sum_{1}^{5} a_k = 15$

$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 \Rightarrow a_3$: 홀수

a_3 $a_1 + a_2$

1 7 ⇒ 2,5 / 3,4 / 4,3

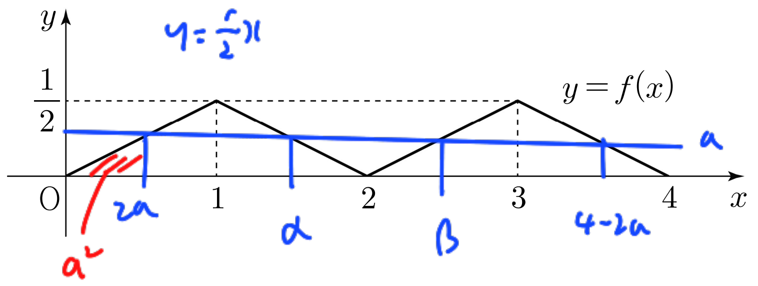
3 6 ⇒ 2,4

4개

∴ $\frac{4}{19}$

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \ (a\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

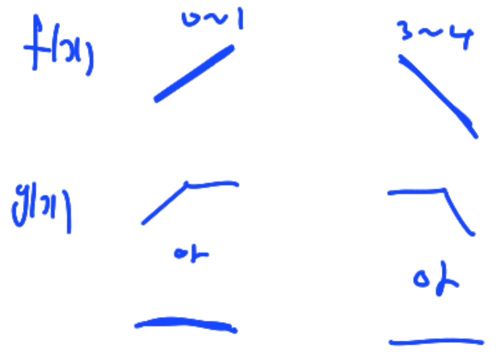
(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a) = p - q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

$\boxed{24}$

$g(x)=f(x)$ or $g(x)=a$, $g(x)$는 연속 $\Rightarrow 0 \le a \le \frac{1}{2}$

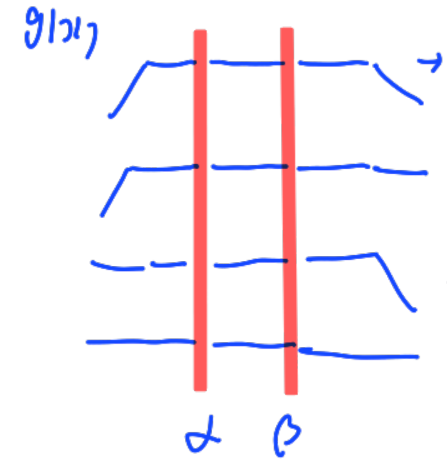
$f(x)$ 0~1, 3~4, $\int_0^1 f = \frac{1}{4}$



$\rightarrow a < \frac{1}{4}$

$\int_0^1 g < \int_0^1 f$, $\int_3^4 g < \int_3^4 f$, $\int_0^4 g = 1$

$\Rightarrow \int_0^\alpha g < \int_0^\alpha f$, $\int_\beta^4 g < \int_\beta^4 f$ $\therefore \int_\alpha^\beta g > \int_\alpha^\beta f$

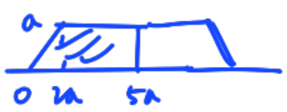


$\rightarrow 4a - 2a^2 = 1$, $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ($a<\frac{1}{4}$ 아니어도 됨) (O)

$4a - a^2 = 1$, $a = 2-\sqrt{3} > \frac{1}{4}$ $a<\frac{1}{4}$이므로 (X)

$\rightarrow 4a = 1$, $a = \frac{1}{4}$ $a<\frac{1}{4}$이므로 (X)

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Y \le 5a) = \mathrm{P}(0 \le Y \le \frac{10-5\sqrt{2}}{2})$ $= 1.xxx$



$S = \frac{1}{2}(5a+3a)a = 4a^2 = 4\left(\frac{6-4\sqrt{2}}{4}\right) = 6-4\sqrt{2}$

$p=6, q=4$, $p \times q = \boxed{24}$

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{150}$

(가) $f(7)-f(1)=3$
(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.
(다) $\frac{1}{3}\lvert f(2)-f(1)\rvert$ 과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

$f(1) \le f(3)$
$f(2) \le f(4)$
$f(3) \le f(5)$
$f(4) \le f(6)$
$f(5) \le f(7)$

$f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7)$
$f(2) \le f(4) \le f(6)$

$|f(2)-f(1)|$, $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$ $\rightarrow$ 3의 양의 배수

$f(1)$	$f(7)$	$f(3)$	$f(5)$	$f(2)$
1	4	1 2 3	3 2 4	$4 \rightarrow {}_4H_2=10$ $7 \rightarrow {}_1H_2=1$ $11 \times 3 = \boxed{33}$
2	5	2 3 4	3 5 4	$5 \rightarrow {}_3H_2=6$ $6 \times 3 = \boxed{18}$
3	6	3 3 4 6	3 6 5 6	$6 \rightarrow {}_2H_2=3$ $3 \times 4 = \boxed{12}$
4	7	4 5 6	6 5 7	$1 \rightarrow {}_7H_2=28$ $7 \rightarrow {}_1H_2=1$ $29 \times 3 = \boxed{87}$

$\therefore 33+18+12+87 = 150$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2\times 3}{1+1} = 3$

24. 함수 $f(x)=\ln(x^2-x+2)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g(x))$라 하자.
$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$일 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\begin{cases} g(2)=4 \\ g'(2)=12 \end{cases}$

$h'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)$

$=f'(4)\times 12$

$f'=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$

$=\frac{7}{14}\times 12=6$

25. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^{x}+x-y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

$2e^{x+y-1}(1+y')=3e^{x}+1-y'$

$2\times1\times(1+y')=4-y'$

$2+2y'=4-y'$

$y'=\frac{2}{3}$

26. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$\frac{x}{2}=t$

$\frac{1}{2}dx=dt$

$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)f'(t)dt$

$=2\left[(2t-1)f(t)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}2f(t)dt\right]=2$

$f(1)-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=1$

$f(1)=4$

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\frac{3}{2}$

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\frac{\pi}{2}$$

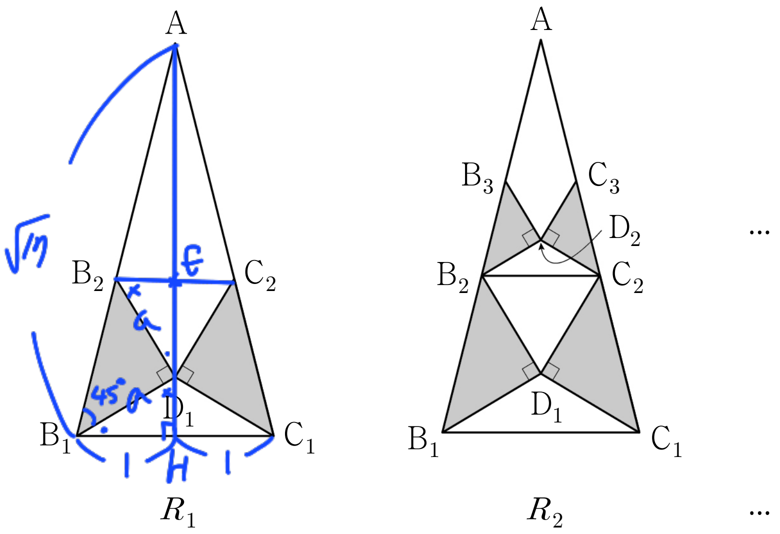
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

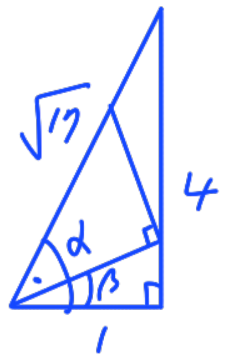
그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



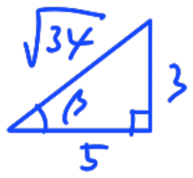


① 2　② $\frac{33}{16}$　③ $\frac{17}{8}$　④ $\frac{35}{16}$　⑤ $\frac{9}{4}$

$\tan\alpha = 4$

$\beta = \alpha - \frac{\pi}{4}$

$\tan\beta = \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\alpha - 1}{1+\tan\alpha\cdot 1} = \frac{4-1}{1+4} = \frac{3}{5}$,



$\cos\beta = \frac{1}{a} = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $a = \frac{\sqrt{34}}{5}$

$S_1 = \frac{1}{2}a^2 \times 2 = a^2 = \frac{34}{25}$

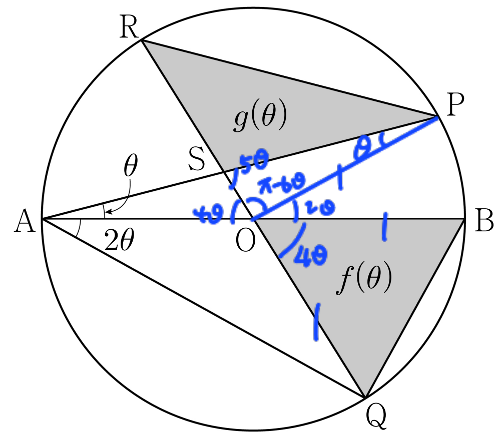
$\angle D_1B_1H = \angle B_2D_1E = \beta$

$\triangle B_2D_1E \Rightarrow \sin\beta = \frac{B_2E}{a}$, $B_2E = \frac{\sqrt{34}}{5}\times\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3}{5}$

l　$1 : \frac{3}{5}$

S　$1 : \frac{9}{25}$　$\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{34}{25-9} = \frac{17}{8}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{11}{10}$　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{13}{10}$　④ $\frac{7}{5}$　⑤ $\frac{3}{2}$

$\triangle SOP \to \frac{SP}{\sin(\pi-6\theta)} = \frac{1}{\sin5\theta}$, $SP = \frac{\sin6\theta}{\sin5\theta}$

$g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-6\theta) - \frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sin6\theta}{\sin5\theta}\cdot\sin\theta$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin4\theta$

$\lim\frac{g}{f} = \frac{6-\frac{6}{5}}{4} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$

단답형

29. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
> (나) $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx = pe^4 - q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{12}$

$x<1 \to f(x)=-x^2+4x+C$ 도함수 연속 $\to f$: 미분가능 $\to$ 연속

$f(1^-)=C+3$
$f(1^+)=a$ $\quad C=a-3,$ $\quad f'(1^-)=f'(1^+)$ / $f(1^-)=f(1^+)$

(나) $f'(x^2+1)\times 2x = 2ae^{2x}+b$ $\quad f'(1^-)=f'(1^+)$, $=2$

$x>0 \to f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}$

$f'(1^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x^2+1)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}=2$

$b=-2a$, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{a(e^{2x}-1)}{x}=2$ $\quad \therefore a=1$, $b=-2$, $C=-2$

$x<1 \to f(x)=-x^2+4x-2$

$x\geq 0 \to f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f + \int_1^5 f(x)dx \to$ $x=t^2+1$, $dx=2tdt$, $x\geq 0$

$=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx+\int_0^2 f(t^2+1)\cdot 2t\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1+\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt$

$=-\frac{1}{3}+\int_0^2 2te^{2t}-4t^2dt$

$=-\frac{1}{3}+te^{2t}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\frac{4}{3}t^3\Big|_0^2$

$=-\frac{1}{3}+2e^4-\frac{32}{3}-\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^2$

$=-11+\frac{3}{2}e^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$

$p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{21}{2}$ $\quad p+q=12$

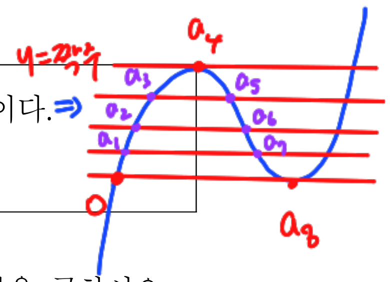
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

정수

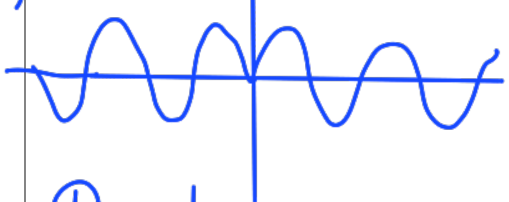
라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다. $\Rightarrow$
> (나) $f(a_m)=f(0)$ $\Rightarrow$ 정수

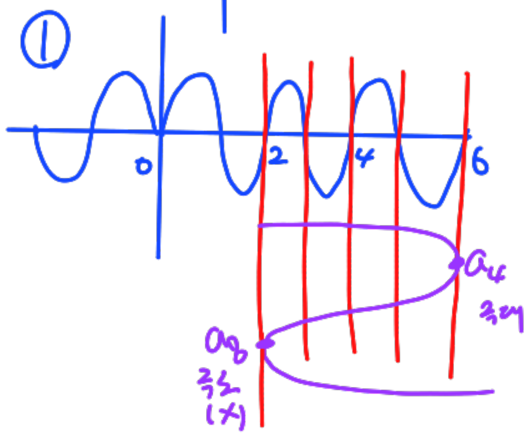


$f(a_k)\leq f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

$y=\sin|\pi x|$ & $y=f(x)$ $\quad \boxed{208}$

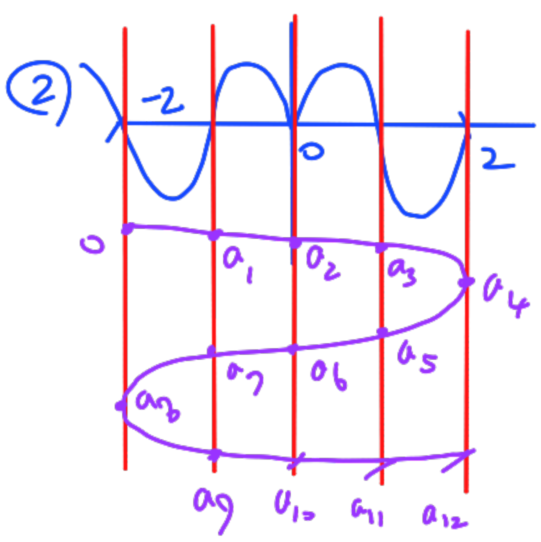


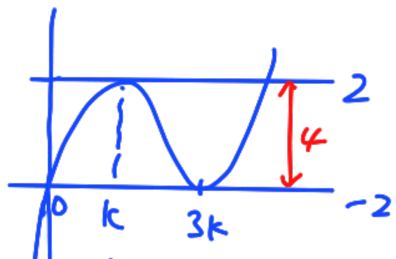
①



a_8 극소 $\to$ (X)

②





$f=x(x-3k)^2-2$

$f'=3x^2\sim -\frac{4}{27}(2k)^3=4$, $k=1$

$f(x)=x(x-3)^2-2$

$m=8$, $f(a_k)\leq f(8)=198$

$a_{12}=2$
$a_{13}=3$
$\vdots$
$a_k=k-10$ $\quad k-10\leq 198$, $k\leq 208$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$(4,6)+(4,-2)$

$=(8,4)$

24. 타원 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 점 $(8,\ 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\dfrac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\dfrac{13}{2}$ ⑤ 7

$\dfrac{a^2}{32}+\dfrac{b^2}{8}=1$

$\dfrac{ax}{32}+\dfrac{by}{8}=1$ $(8,0)$

$\dfrac{a}{4}=1,$ $a=4$, $b=2$)

25. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m : \dfrac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

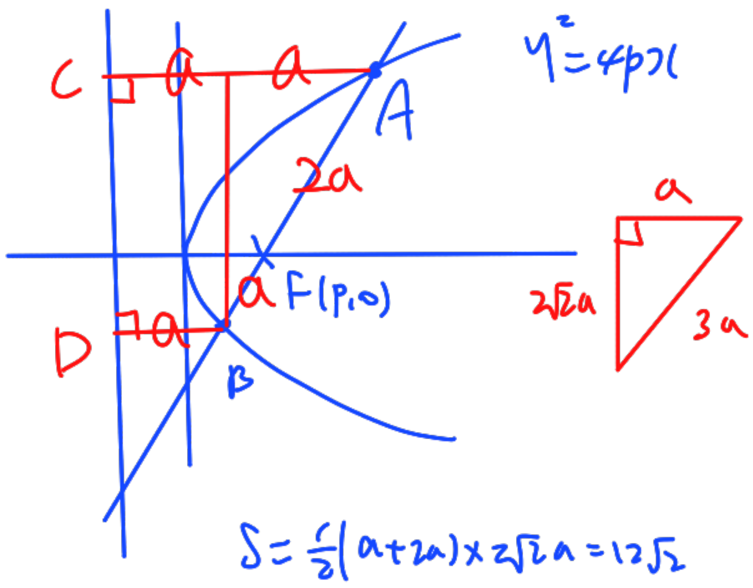
① $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\vec{u_1}=(3,-1)$, $\vec{u_2}=(7,1)$

$\cos\theta = \dfrac{|21-1|}{\sqrt{10}\sqrt{50}} = \dfrac{20}{10\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



$S=\frac{1}{2}(a+2a)\times 2\sqrt{2}a = 12\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}a^2 = 12\sqrt{2}$, $a=2$

$\overline{AB}=3a=6$

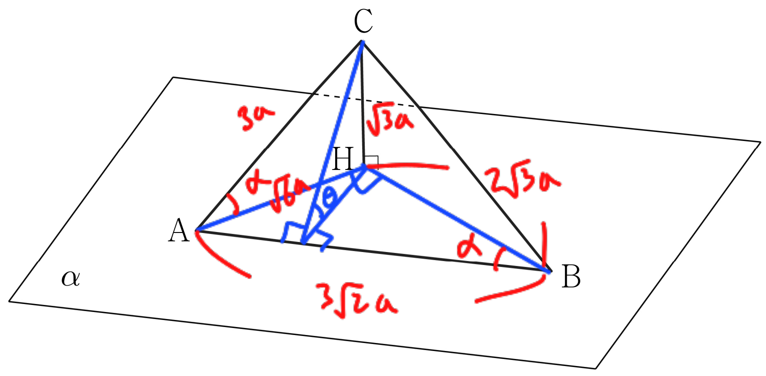
27. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

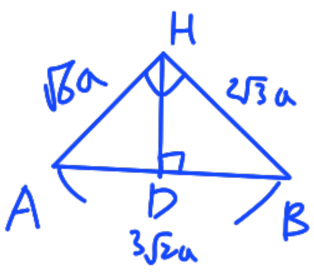
(가) $\angle \mathrm{AHB} = \frac{\pi}{2}$

(나) $\sin(\angle \mathrm{CAH}) = \sin(\angle \mathrm{ABH}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

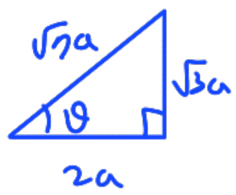
평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$





$HD = \frac{6\sqrt{2}a^2}{3\sqrt{2}a} = 2a$



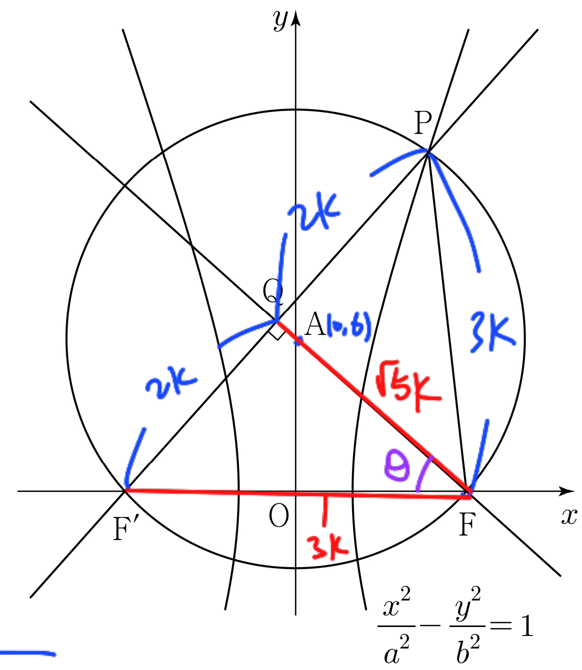
$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$

28. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0,\ 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF′, AF가 만나는 점 Q가

$$\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{PF'}} = 3:4,\ \angle \mathrm{F'QF} = \frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, b^2-a^2의 값은? (단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.) [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50



$\overline{PF'} = 4k$, $\overline{PF} = 3k \rightarrow \overline{QF} = \sqrt{5}k$

$(\overline{FF'} = 3k = 2c$

$k = \frac{2}{3}c$

$\tan\theta = \frac{2k}{\sqrt{5}k} = \frac{6}{OF}$, $OF = 3\sqrt{5} = c$

$\therefore k = 2\sqrt{5}$

$\overline{PF'} - \overline{PF} = k = 2a = 2\sqrt{5}$ $a = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 45 - 5 = 40$, $b^2 - a^2 = 35$

$a^2 = 5$

단답형

29. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=27,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=9,\ \overline{CD}>3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

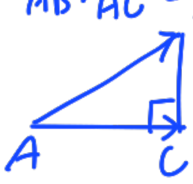
(가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$
(나) $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]

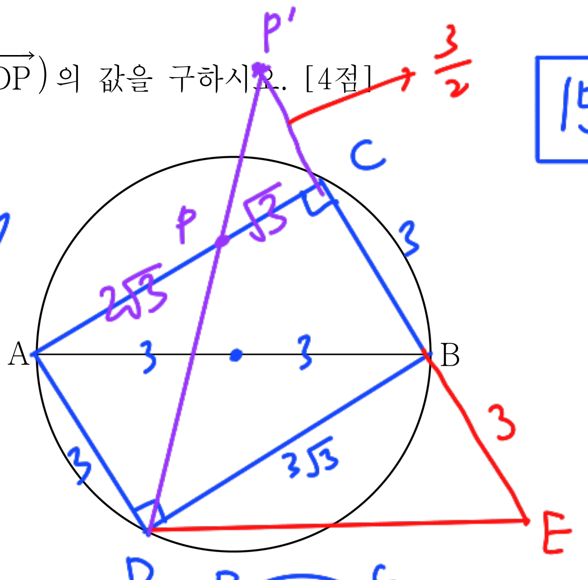
$\boxed{15}$

∠ACB=90°

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AC}|^2=27$



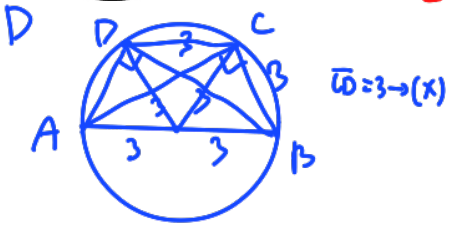
∴ $|\vec{AC}|=3\sqrt3$



∠ADB=90°

$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=|\vec{AD}|^2=9,\ |\vec{AD}|=3$

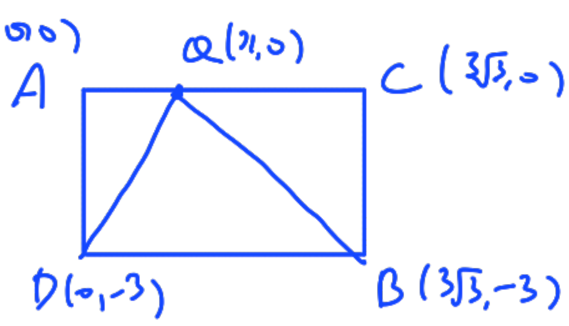
□ABCD: 직사각형



$\vec{AB}=\vec{DE}\Rightarrow\frac32\vec{DP}-\vec{DE}=k\vec{BC}$, $\frac32\vec{DP}=\vec{DP'}$

$\vec{DP'}-\vec{DE}=\vec{EP'}=k\vec{BC}$ $\quad\overline{DP}:\overline{PP'}=2:1$

$\vec{EP'}=\frac52\vec{BC}$ ∴ $k=\frac52$



$\vec{QB}=(3\sqrt3-x,-3)$, $\vec{QD}=(-x,-3)$

$\vec{QB}\cdot\vec{QD}=x^2-3\sqrt3x+9=3$, $x^2-3\sqrt3x+6=0$

$x=\frac{3\sqrt3\pm\sqrt3}{2}$, $x=\sqrt3,\ 2\sqrt3$

$x=2\sqrt3\to Q=P\ (\times)$ ∴ $x=\sqrt3$

$P(2\sqrt3,0)$ $\quad\vec{AQ}\cdot\vec{DP}=(\sqrt3,0)\cdot(2\sqrt3,3)=6$

∴ $\frac52\times6=15$

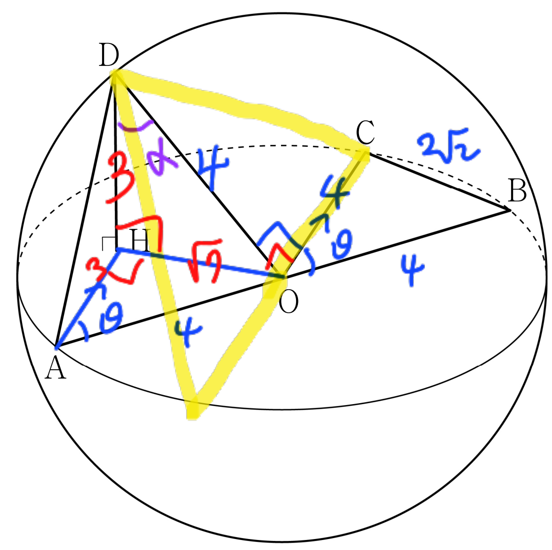
30. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB}=8,\ \overline{BC}=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다.
(나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. (단, 점 H는 점 O가 아니다.) [4점]



$\boxed{27}$

$\overline{OC}\perp\overline{OD}$, $\overline{OC}\perp\overline{DH}\to\overline{OC}\perp$□DHO$\to\overline{OC}\perp\overline{OH}$

$\overline{OH}\perp\overline{AD}$, $\overline{OH}\perp\overline{DH}\to\overline{OH}\perp$□DAH$\to\overline{OH}\perp\overline{AH}$

∠AHO=∠COH → $\overline{AH}\parallel\overline{OC}$, ∠COB=∠HAO=θ

$\cos\theta=\frac{16+16-8}{2\cdot4\cdot4}=\frac{24}{32}=\frac34$ ∴ $\overline{AH}=3,\ \overline{OH}=\sqrt7\Rightarrow\overline{DH}=3$

△DAH & △DOC ⇒ ∠HDO, $\cos\alpha=\frac34$

△DAH$=\frac92$ ∴ $S=\frac92\cos\alpha=\frac92\times\frac34=\frac{27}{8}$

$8S=27$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.