테마☆리듬 모의고사

수학 영역(기하) 정답

23	②	24	③	25	⑤	26	②
27	①	28	④	29	33	30	167

기하 해설

23. 좌표공간 위의 점의 내분점을 구하는 문제입니다.
두 점 A$(-3,2,0)$, B$(-1,0,a)$의 중점의 좌표는
$(\frac{-3-1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{a}{2})$, $(b,1,2)$이므로 $b=-2$, $a=4$에서
$a+b=2$입니다.

24. 쌍곡선의 정의에 대한 문제입니다.
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{AF'}}=a+6$이 성립하며 ($\overline{\mathrm{AF}}=a+6$, $\overline{\mathrm{AF'}}=a$로 놓아도 됩니다.), 두 직선 AF, AF'이 서로 수직이므로 삼각형 AFF'은 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형입니다.
주어진 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는 $2\times\sqrt{9+8}=2\sqrt{17}$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{AF'}}^2=68$이 성립하며,
$a^2+(a+6)^2=68$, $2a^2+12a+36=68$, $a^2+6a-16=0$,
$(a-2)(a+8)=0$에서 $a=2$입니다.
따라서 삼각형 AFF'의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times8=8$입니다.

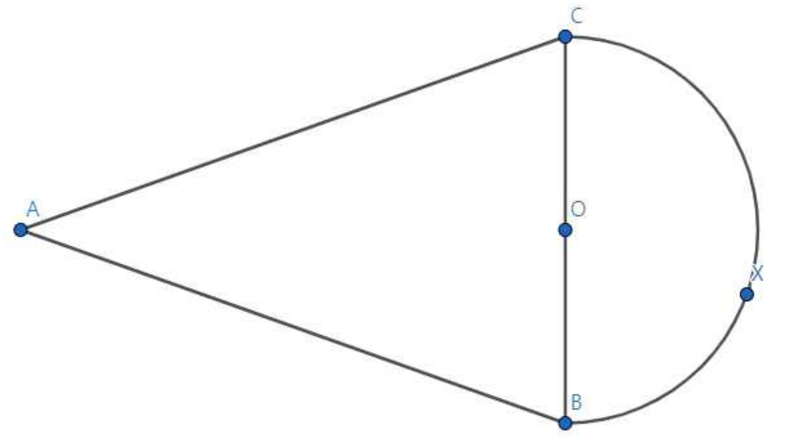
25. 벡터의 연산에 대한 문제입니다.
두 벡터 $\vec{a}=(-2,k)$, $\vec{b}=(1,-3)$에 대하여 $2\vec{a}+\vec{b}=(-3,2k-3)$이며, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(2k-3)^2}=5$에서
$9+4k^2-12k+9=25$, $4k^2-12k-7=0$, $(2k-7)(2k+1)=0$에서 $k=\frac{7}{2}$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$입니다.
$k=-\frac{1}{2}$인 경우, 두 벡터 $\vec{a}=(-2,-\frac{1}{2})$, $\vec{b}=(1,-3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}>-1$이므로 조건에 맞지 않습니다.
$k=\frac{7}{2}$인 경우, 두 벡터 $\vec{a}=(-2,\frac{7}{2})$, $\vec{b}=(1,-3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{25}{2}<-1$이므로 조건에 맞습니다.
따라서 $k=\frac{7}{2}$입니다.

26. 타원의 접선에 대한 문제입니다.
포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 (2, 0)이며, 준선은 $x=-2$입니다.
점 A가 $\overline{\mathrm{FA}}=8$를 만족시키므로 점 A와 직선 $x=-2$ 사이의 거리는 8이며, 이때 점 A의 x좌표는 6입니다. 점 A는 제1사분면의 점이므로 점 A의 좌표는 $(6,4\sqrt{3})$입니다.
점 A를 지나면서 포물선에 접하는 직선은 $4\sqrt{3}y=4(x+6)$, $y=\frac{x+6}{\sqrt{3}}$이며, 이 직선과 포물선의 준선이 만나는 점의 좌표는 B$(-2,\frac{4}{\sqrt{3}})$입니다.
세 점 F, A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{FA}}=8$, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{16}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{FA}}^2+\overline{\mathrm{FB}}^2$가 성립하며, 이때 $\angle \mathrm{AFB}=\frac{\pi}{2}$가 성립합니다.
세 점 A, B, F를 모두 지나는 원의 중심은 선분 AB의 중점이며, 이 점의 좌표는 $(2,\frac{8}{\sqrt{3}})$입니다.
이때 $a=2$, $b=\frac{8}{\sqrt{3}}$이며, 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 절반인 $\frac{8}{\sqrt{3}}$이므로 $r=\frac{8}{\sqrt{3}}$입니다.
따라서 $a\times b\times r=\frac{128}{3}$입니다.

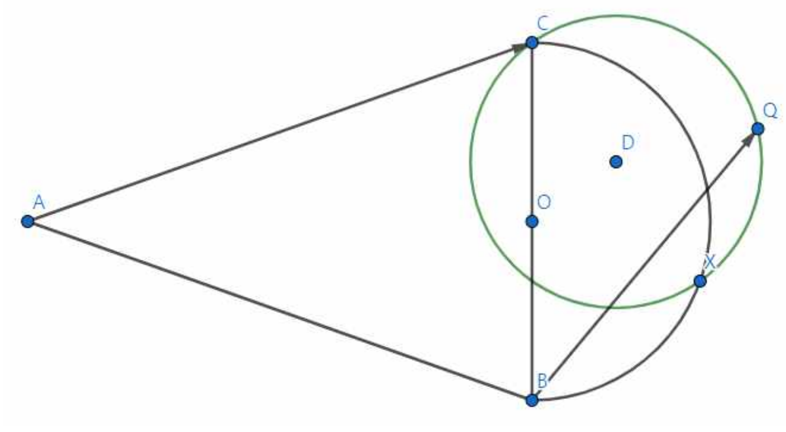
27. 삼수선의 정리에 대한 문제입니다.
그림에서 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{CA}}=5$이 성립하며, $\overline{\mathrm{DG}}=2$입니다.
$\cos(\angle\mathrm{EDF})=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$이며, 삼각형 DEG에서 코사인법칙을 사용하면 $\overline{\mathrm{EG}}^2=4^2+2^2-2\times2\times4\times\frac{1}{8}=18$, $\overline{\mathrm{EG}}=3\sqrt{2}$입니다.
그림에서 두 선분 AH, EG가 서로 수직이고, 선분 AD와 평면 DEF가 서로 수직이므로 두 선분 AD, DH 역시 수직입니다.
$\sin(\angle\mathrm{EDF})=\sqrt{1-(\frac{1}{8})^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이며, 삼각형 DEG의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$이며, $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{DH}}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$이 성립합니다.
$\overline{\mathrm{EG}}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{DH}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$입니다.
삼각형 ADH는 $\angle\mathrm{ADH}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{DH}}^2+h^2=\overline{\mathrm{AH}}^2$, $h^2=(\frac{5\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}})^2=9$, $h=3$입니다.

28. 타원의 정의를 활용한 문제입니다.
주어진 원의 타원의 한 초점을 중심으로 하며, 반지름의 길이는 8입니다.
$\overline{\mathrm{AF}}=x$라고 하면 $\overline{\mathrm{AF'}}=12-x$이며, $\overline{\mathrm{AC}}=8-x$입니다.
$\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AC}}=(12-x)+(8-x)=10$에서 $20-2x=10$, $x=5$입니다.
$\overline{\mathrm{FF'}}=4$, $\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\overline{\mathrm{AF'}}=7$에서
$\cos(\angle\mathrm{AFF'})=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\frac{1}{5}$입니다.
$\cos(\angle\mathrm{F'FB})=\cos(\pi-\angle\mathrm{AFF'})=\frac{1}{5}$이며, $\overline{\mathrm{FB}}=d$라고 하면 $\overline{\mathrm{F'B}}=12-d$, $\overline{\mathrm{BD}}=8-d$입니다.
삼각형 F'FB에 코사인법칙을 적용하면
$(12-d)^2=4^2+d^2-2\times4\times d\times\frac{1}{5}$,
$d^2-24d+144=d^2-\frac{8}{5}d+16$, $\frac{112}{5}d=128$, $d=\frac{40}{7}$입니다.
따라서 $\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BD}}=20-2\times\frac{40}{7}=\frac{60}{7}$입니다.

29. 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 문제입니다.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$이며, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 평행한 경우 주어진 내적은 최대가 됩니다.
즉, 점 X에 대하여 선분 OX는 선분 AB와 평행합니다.

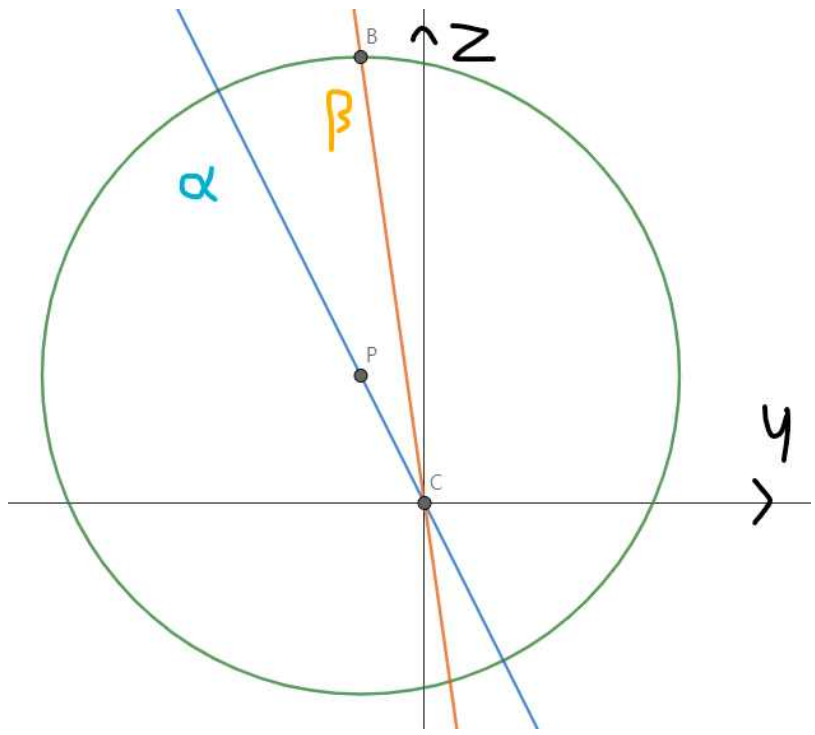


$12+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OX}$에서
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CX}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OX})$
$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OX}-|\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OX}$에서 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}=0$이고, $|\overrightarrow{CO}|^2=9$이므로 $3+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OX}$이며, 여기서 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OX}=-3$이 성립합니다.
$\angle ABO=\theta$라고 하면 $\angle XOB=\theta$, $\angle XOC=\pi-\theta$ 가 성립하며, $|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OX}|\cos(\pi-\theta)=-3$에서 $\cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\frac{1}{3}$입니다.
$\overline{AB}\cos\theta=\overline{BO}=3$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=9$입니다.
점 O를 좌표평면 위의 원점으로 두면 점 A의 좌표는 $(-6\sqrt{2},0)$이며, 점 B, C의 좌표는 각각 $(0,-3)$, $(0,3)$입니다.
두 선분 AB, OX가 서로 평행하므로 직선 OX의 기울기는 직선 AB의 기울기와 동일한 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$이며, 이때 점 X의 좌표는 $(2\sqrt{2},-1)$입니다.
$\overrightarrow{XQ}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$를 만족시키는 점 Q는 선분 CX를 지름으로 하는 원 위의 점입니다. 이때 해당 원의 방정식을 구하면
$(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=6$이며, 중심의 좌표가 $(\sqrt{2},1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 원입니다.



원의 중심의 좌표를 D라고 하면 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}$가 성립하며,
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DQ}$입니다.
점 D의 좌표는 $(\sqrt{2},1)$이며, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$를 성분으로 나타내면 각각 $(6\sqrt{2},3)$, $(\sqrt{2},4)$입니다.
따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=6\sqrt{2}\times\sqrt{2}+3\times4=24$입니다.
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DQ}$에서 벡터 $\overrightarrow{DQ}$의 방향이 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 동일한 경우 주어진 벡터의 내적이 최대가 됩니다. $|\overrightarrow{AC}|=9$, $|\overrightarrow{DQ}|=\sqrt{6}$이므로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 최댓값은 $9\sqrt{6}$입니다.
따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 $24+9\sqrt{6}$으로, $a=24$, $b=9$로 $a+b=33$입니다.

30. 정사영의 넓이를 구하는 문제입니다.
구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$ 위의 점 중 원점과 가장 먼 점은 원점과 구의 중심 $(2,-1,2)$를 지나는 직선과 구가 만나는 점 2개 중 z좌표가 큰 점이며, 구 위의 점 중 z좌표가 가장 큰 점은 $(2,-1,7)$입니다.
원점을 O라고 하고, 구의 중심을 P라고 하면, 점 A는 직선 OP 위에 있으며, 이때 평면 α는 점 P를 포함합니다.
즉, 평면 α는 점 P$(2,-1,2)$와 원점을 포함하며, 평면 β는 점 B $(2,-1,7)$와 원점을 포함합니다.
좌표공간을 yz평면과 평행하면서 점 P를 포함하는 평면(즉, 평면 위의 모든 점에 대하여 x좌표가 2인 평면)으로 자른 단면은 그림과 같습니다.



원점 O를 해당 평면에 내린 정사영을 C라고 하면 점 C의 좌표는 $(2,0,0)$입니다.
그림에서 C$(2,0,0)$, P$(2,-1,2)$, B$(2,-1,7)$이며, $\overline{BP}=5$, $\overline{PC}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=5\sqrt{2}$입니다.
$\cos(\angle PBC)=\frac{5^2+(5\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times5\times5\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$이며, 이때 평면 β가 구와 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이는
$\overline{BP}\times\cos(\angle PBC)=\frac{7}{\sqrt{2}}$이며, 이 원의 넓이는 $\frac{49}{2}\pi$입니다.
두 평면 α, β가 이루는 각은 $\angle BCP$이며,
$\cos(\angle BCP)=\frac{(\sqrt{5})^2+(5\sqrt{2})^2-5^2}{2\times\sqrt{5}\times5\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$입니다.
따라서 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는
$\frac{49}{2}\pi\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{147}{20}\sqrt{10}\pi$이며, $p=20$, $q=147$이므로
$p+q=167$입니다.