# 수학2

# (요약)극한 / 연속

1. $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$ : $f(x)$가 $(x-a)$를 몇 개 가지고 있는지.

# (해설) 극한/연속

1. $f(x)$ : 다항함수

$f(x) = (x-a)^n \times Q(x)$ (단, $Q(a) \neq 0$, $n$은 0 이상의 정수)

i) $n=0$, $f(x) = Q(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\times Q'(x)}{Q(x)} = 0 \quad (\because Q(a)\neq 0)$$

$\therefore$ $n=0$ 일 때 $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = n$ 성립

ii) $n \neq 0$인 양의 정수

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\{n(x-a)^{n-1}Q(x) + (x-a)^n Q'(x)\}}{(x-a)^n \times Q(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} \left\{ n + \frac{(x-a)Q'(x)}{Q(x)} \right\} = n$$

$\therefore$ $n \neq 0$인 양의 정수일 때 $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = n$ 성립

$(x-a)$를 갖고 있는 개수에 따라 주어진 형태의 극한값이 달라짐

$\therefore$ $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = n$ $\Rightarrow$ $f(x)$가 $(x-a)$를 $n$개 가지고 있다.

1. $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$ 형태의 극한 - 관련기출 (18학년도 6평 21번 (가))

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \to 1}(x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점] 4

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

(가) $F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 3$ : $f(x)$가 $(x-1)^3$을 인수로 가짐.

$\therefore f(x) = (x-1)^3(x-a)$ 라 하자. (단, $a \neq 1$)

(나) $G'(x) = \frac{g(x)\cos x + g'(x)\sin x}{g(x)\sin x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{f(x)} \times \frac{g(x)\sin x}{g(x)\cos x + g'(x)\sin x} = \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \times \underbrace{\frac{xf'(x)}{f(x)}}_{\text{0이 아닌 정수로 나와야 함} \to \text{1만 가능}} \times \frac{g(x)}{g(x)\cos x + g'(x)\sin x}$$

($\because$ $f(x)$가 $x$를 몇 개 가지고 있는지인데, $f(x) = (x-1)^3(x-a)$ 형태이기 때문) → $f(x) = (x-1)^3 \times x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{g(x)\cos x + g'(x)\sin x}$$

(만약 $g(0) \neq 0$ 이라면 이 식의 극한은 1이 됨)

$\therefore g(0) = 0$, $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+ax+b}{(x^2+ax+b)\cos x + (3x^2+2ax+b)}$$

(만약 $b \neq 0$ 이라면 이 식의 극한은 $\frac{1}{2}$이 됨)

$\therefore b=0$, $g(x) = x^3 + ax^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+a}{(x+a)\cos x + (3x+2a)}$$

(만약 $a \neq 0$ 이라면 이 식의 극한은 $\frac{1}{3}$이 됨)

$\therefore a=0$, $g(x) = x^3$

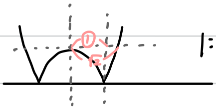
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x + 3} = \frac{1}{4}$$

$\therefore f(3) = 2^3 \times 3 = 24$

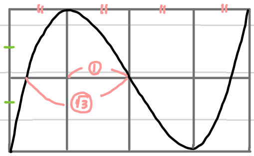
$g(3) = 27$

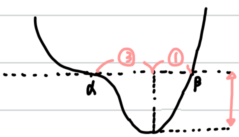
# (요약) 미분

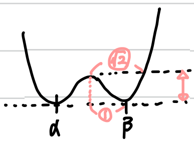
## 1. 다항함수 비율관계



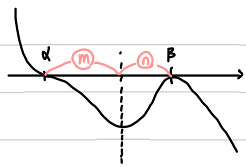
$1:\sqrt{2}$





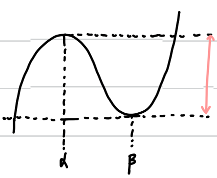


$a \times (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$

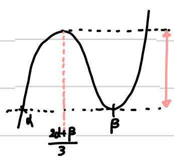



$$\frac{\alpha n+\beta m}{m+n}$$

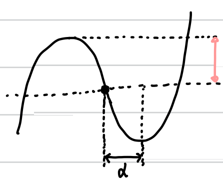
## 2. 다항함수 길이관계



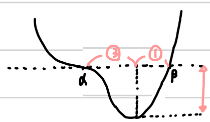
$\frac{|a|}{2} \times (\beta-\alpha)^3$



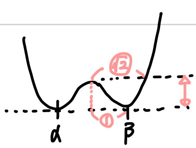

$\frac{4}{27} \times |a| \times (\beta-\alpha)^3$




$2 \times |a| \times \alpha^3$



$\frac{27}{256} \times |a| \times (\beta-\alpha)^4$



$\frac{1}{16} \times |a| \times (\beta-\alpha)^4$

3\. 실수 $a$에 대하여 만족시키는 $t$의 개수를 $g(a)$라 하자.

$f(a) = f'(t)(a-t)+f(t)$

⇒ $(a, f(a))$에서 그릴 수 있는 접선의 개수

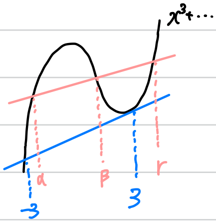
$f(t) = f'(a)(t-a)+f(a)$

⇒ $a$에서의 접선의 방정식과 $f(x)$ 교점의 개수

4\. 수2 ㄱ,ㄴ,ㄷ 추론 문제에서 $f'(x)$가 등장했을 때

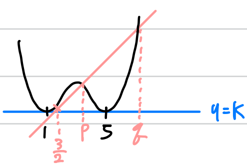
- 평균값 정리 (90%)
- 도함수의 사잇값 정리 (10%)

5\. 근과 계수와의 관계 활용




$-3+3+3 = \alpha+\beta+\gamma$ = (변곡점 $x$좌표)$\times 3$

$\rightarrow f(x) = x^3-3x^2+\cdots$




$1+1+5+5 = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}+p+q$

# (해설) 미분

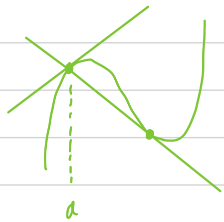
3. 실수 $a$에 대하여 만족시키는 $t$의 개수를 $g(a)$라 하자.

i) $f(a) = f'(t)(a-t)+f(t)$ ⇒ $(a, f(a))$에서 그을 수 있는 접선의 개수

$f(a) = f'(x)(a-x) + f(x)$

→ $f(x) = f'(x)(x-a) + f(a)$ (기울기가 $f'(x)$이기 때문에 '$a$ 에서의 접선'이 아니라 '$a$ 에서 그을 수 있는 접선'이 됨.

ex)

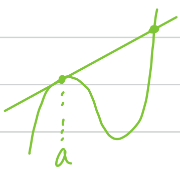


$g(a) = 2$

ii) $f(t) = f'(a)(t-a)+f(a)$ ⇒ $a$에서의 접선의 방정식과 $f(x)$ 교점의 개수

$f(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$ : $f(x)$와 $x=a$에서의 접선의 방정식의 교점 개수

ex)



$g(a) = 2$

## 3 접선의 방정식 관련 표현 - 관련기출 (23학년도 6평 미적 30번)

* 기출은 미적분 기출이지만, 수2 범위에서도 충분히 출제 가능하다 생각해 수2에 넣었습니다.

**30.** 양수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim\limits_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim\limits_{t\to k-} g(t) \neq \lim\limits_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 $k$의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

16

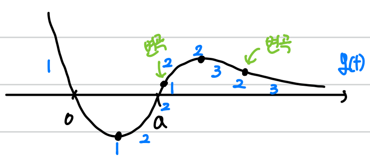
$f(x) = (x^2 - ax) \times e^{-x}$

$f'(x) = \{-x^2 + (a+2)x - a\} e^{-x}$

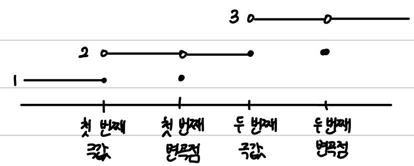
$f''(x) = \{x^2 - (a+4)x + (2a+2)\} e^{-x}$

$g(t)$ : $x=t$ 에서의 접선의 방정식과 $f(x)$의 교점의 개수

$f(x)$




$g(t)$




$g(5) + \lim\limits_{t\to 5} g(t) = 5$ 를 만족시키는 점은, 두 번째 변곡점이다.

$\therefore f''(5) = 0 \rightarrow a = \frac{7}{3}$

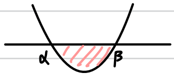
$\lim\limits_{t\to k-} g(t) \neq \lim\limits_{t\to k+} g(t)$ 을 만족시키는 점은, 첫 번째 극값과 두 번째 극값이다.

$\therefore$ 모든 k값의 합 $= a+2 = \frac{13}{3}$

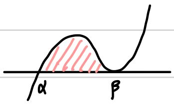
근과 계수와의 관계

# (요약) 적분

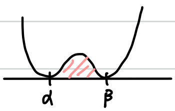
## 1. 넓이 관련 여러 공식



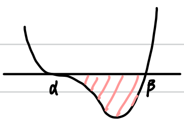

$\frac{|a|}{6} \times (\beta-\alpha)^3$




$\frac{|a|}{12} \times (\beta-\alpha)^4$



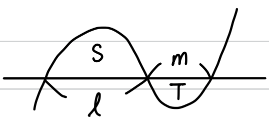

$\frac{|a|}{30} \times (\beta-\alpha)^5$




$\frac{|a|}{20} \times (\beta-\alpha)^5$

$a \times (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$

$\rightarrow \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \times |a| \times (\beta-\alpha)^{m+n+1}$

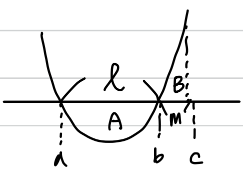



$S = \frac{|a|}{12} \times l^3 \times (l+2m)$

$T = \frac{|a|}{12} \times m^3 \times (m+2l)$

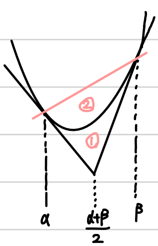
$l=m$일 때

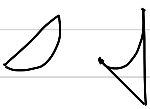
$S = \frac{|a|}{4} \times l^4$




$A=B \rightarrow l:m=2:1$

$A=2B \rightarrow \int_{\frac{a+b}{2}}^{c} f(x)\,dx = 0$



$\rightarrow$ 넓이비 $2:1$

2. 원함수의 함숫값 차이는 도함수의 적분값과 같다.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)$$

# 보통 차수가 내려갈수록 넓이를 구하기 쉬워지니까 (넓이공식)

이를 이용해 함숫값 차이, 함숫값을 구하면 계산이 줄어드는 경우가 종종 있다.

3. 삼차함수 근~근 적분

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\cdot dx = \frac{a}{6} \times (\beta-\alpha)^3 \times \left(\gamma - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

4. 심프슨 공식 (일차함수, 이차함수, 삼차함수)

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$(\text{error}) = -\frac{(b-a)^3}{90} f^{(4)}(t)$$

f를 4번 미분할 때부터 오차생김 (3차 이하만 사용가능)

5. $$p(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\cdot dt \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p'(x) = f(h(x)) \times h'(x) - f(g(x)) \times g'(x)$$

6. 정적분의 대칭성

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot dx = \int_0^a f(x) + f(-x)\cdot dx$$

$$\int_0^{2a} f(x)\cdot dx = \int_0^a f(x) + f(2a-x)\cdot dx$$

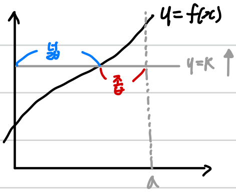
$$\int_0^a f(x)\cdot dx = \int_0^a f(a-x)\cdot dx$$

$$\int_0^x (x-t)f(t)\cdot dx = \int_0^x tf(x-t)\, dt$$

i) 정적분 대칭성으로 변환

ii) 부분적분 (1·f(x)의 형태로 부분적분 해야 할 때도 있음.)

7. 정적분 구간이 고정되어 있을 때




$$g(k)=\int_0^a |f(x)-k|\cdot dx$$

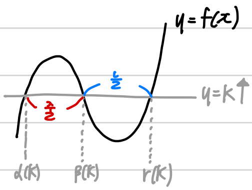
→ $g'(k)$ = 넓어지는 부분 길이 − 좁아지는부분 길이

(상수 K로 고정된게 아니라 함수형태일때)

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\cdot dt$$

→ $g'(x)$ = (모든 순간 넓이 변화율) × $|f'(x)|$

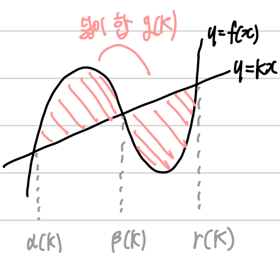
8.




$$g(k)=\int_{\alpha(k)}^{\gamma(k)} |f(x)-k|\cdot dx$$

→ $g'(k)$ = 늘어나는 길이 − 줄어드는길이

9.




$$g(k)=\int_{\alpha(k)}^{\gamma(k)} |f(x)-kx|\cdot dx$$

→ $g'(k)=\frac{1}{2}(\gamma^2-\beta^2)-\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$

연연하지않고 이연

10. $h(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times g(t) \cdot dt$

$\rightarrow h'(x) = f'(x) \int_a^x g(t) \cdot dt$

11. $\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$

등호성립조건) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$ 이어야 함.

(등호성립 X가 문제로 많이 나옴 → 양&음수 교차)

연연하지않고 이연

# (해설) 적분

1. 너무 자주 쓰이는 내용임. - 관련기출(24학년도 6평 10번)

특히, 2차함수 / 3차함수 관련 공식은 꼭 외워두자.

10. 양수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$는

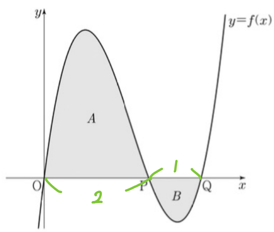
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 $x$축이 원점 O와 두 점 P, Q ($\overline{OP}<\overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 $A$, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 $B$라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, $k$의 값은? [4점] 2

① $\frac{7}{6}$ V ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



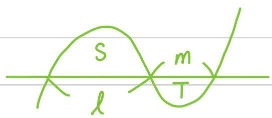

$(A\text{의 넓이}) = \frac{k}{12} \times 2^3 \times (2+1\times 2)$

$(B\text{의 넓이}) = \frac{k}{12} \times 1^3 \times (1+2\times 2)$

$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이}) = \frac{9}{4}k = 3$

$\therefore k = \frac{4}{3}$

# 이 공식은 매우 자주 쓰인다. 무조건 외워두자.




$S = \frac{|a|}{12} \times l^3 \times (l+2m)$

$T = \frac{|a|}{12} \times m^3 \times (m+2l)$

2. 원함수의 함숫값 차이는 도함수의 적분값과 같다. — 관련 기출 (2023 시행 고3 3월 22번)

# 이 내용 잘 사용하면 문제 계산이 확 수월해지는 경우가 많다.

(도함수의 적분은 계산하기 쉽고, 원함수의 길이 관련 정보가 주어졌거나 구해야 하는 경우)

**22.** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 $t$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,
$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 $k$의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

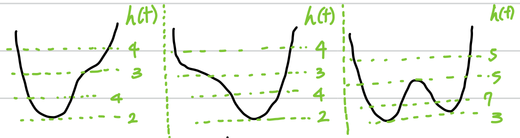
729

가능한 실수 $k$) ① $g'(k)=0$, 즉 $f'(k)=0$인 경우

② $g'(k+)+g'(k-)=0$인 경우,

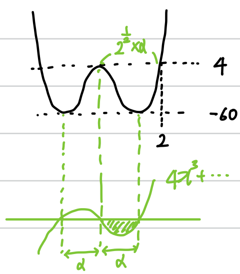
즉 $f(t)=k$인 경우

(나) → 불연속점이 2개 → $f'(k)=0$인 $f(k)$가 2개




(가) 만족 X

f(x)

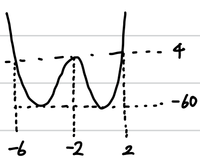



f'(x)

) 길이차이로 지좌표 차이를 구하기 위해 도함수를 생각해보자.

$64=\frac{1}{4}\times 4\times\alpha^4 \to \alpha=2^{\frac{3}{2}}$

⇒ f(x)




$\therefore f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4 \quad\to\quad f(4)=724$

$h(4)=5$