제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

i의 정의~

1. $i(1-i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $-1-i$ ② $-1+i$ ③ i ④ $1-i$ ⑤ $1+i$

㉮ $i(1-i)=i-i^2$
$=\boxed{i+1}$

할말이 없다

2. 두 다항식 $A=2x^2-4x+3$, $B=-x^2+9x+6$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2+5x+9 ② x^2+5x-9 ③ x^2-5x+9
④ $-x^2+5x+9$ ⑤ $-x^2-5x+9$

$A=2x^2-4x+3$
$B=-x^2+9x+6$
㉮ $A+B=\boxed{x^2+5x+9}$

'나누어떨어진다'의 여러 해석

3. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-8x+a가 $x-3$으로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

Sol1) 인수정리

$x-3$으로 나누어떨어진다
⇒ 다항식에 3 대입하면 0

⇒ $27-18-24+a=0$

㉮ $a=\boxed{15}$

Sol2) 조립제법

3	1	-2	-8	a
		3	3	-15
	1	1	-5	$\boxed{0}$

⇒ $a-15=0$ 이므로

㉮ $a=\boxed{15}$

계수비교 vs 수치대입

4. 등식

$$x^2+ax-3=x(x+2)+b$$

가 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Sol1) 계수비교법

$x^2+ax-3=x^2+2x+b$

⇒ $a=2,\ b=-3$

㉮ $a+b=\boxed{-1}$

Sol2) 수치대입법

$x=0$ 대입: $-3=b$
$x=-2$ 대입: $4-2a-3=b$

$\therefore a=2,\ b=-3$

㉮ $a+b=\boxed{-1}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

일차부등식 정도야

5. 부등식 $|2x-3|<5$ 의 해가 $a<x<b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$-5 < 2x-3 < 5$

$\Rightarrow -2 < 2x < 8$

$\therefore -1 < x < 4$ 이므로 ㉮ $a+b = \boxed{3}$

적당한 값 치환 후 적절히 식 변환

7. $\dfrac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}$ 의 값은? [3점]

① 2018 ② 2020 ③ 2022 ④ 2024 ⑤ 2026

가장 적당해보이는 숫자 X로 치환

2023 = X로 치환하면

$$\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)X+1} = \frac{(X-1)\cancel{(X^2+X+1)}}{\cancel{X^2+X+1}}$$

$$= X-1$$

$\therefore$ ㉮ $2023-1 = \boxed{2022}$

두 함수의 차를 이용한다! 앞으로 주구장창 나올테니 잘 익히길

6. 이차함수 $y=x^2+5x+9$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 만나지 않도록 하는 자연수 k 의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(x^2+5x+9)-(x+k)=0$ 이 실근 안 가지면 된다.

$\Rightarrow x^2+4x+9-k$ 의 판별식 <0

$\Rightarrow D/4 = 4-(9-k) < 0$

$\therefore k<5$ 이므로 ㉮ 자연수 k : $\boxed{4\text{개}}$

합, 곱 꼴로

알아서 잘 묶어내기. 설마 생으로 대입하진 않겠지?

8. $x=1-2i$, $y=1+2i$ 일 때, $x^3y+xy^3-x^2-y^2$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① -24 ② -22 ③ -20 ④ -18 ⑤ -16

$x^3y+xy^3-x^2-y^2$

$=xy(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$

$=(xy-1)(x^2+y^2)$

$=(xy-1)((x+y)^2-2xy)$ 이므로 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=(1-2i)(1+2i)=5 \end{cases}$ 대입하면

㉮ $(5-1)(4-10) = \boxed{-24}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수안휘, 오르비 : 한석원의눈물

식 관찰을 먼저 할 것이냐 VS 귀찮더라도 그냥 생으로 대입할 것이냐   이차방정식의 켤레근. 제발 문제 보자마자 $2-i$ 대입부터 하지는 마세요...

9. 연립방정식

$$\begin{cases} 4x^2-y^2=27 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Sol1) $4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)=27$ 이므로 $2x+y=3$을 대입하면 $2x-y=9$ 이다.

∴ 둘을 연립하면 $x=3,\ y=-3$

구 $\alpha-\beta=3-(-3)$
$=\boxed{6}$

Sol2) $y=3-2x$로 두고 $4x^2-y^2=27$에 대입

$\Rightarrow 4x^2-(3-2x)^2=27$

$\Rightarrow 12x-9=27$

$\Rightarrow x=3,\ y=-3$

구 $\alpha-\beta=3-(-3)$
$=\boxed{6}$

10. x에 대한 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

각 항들의 계수가 모두 실수이므로 이 이차방정식은 켤레근을 가진다.
(주의! 항들의 계수가 실수가 아니면 켤레근 안 가질 수도 있음)

$\Rightarrow$ $2-i$이 근이므로 $2+i$도 근

$\Rightarrow$ 근과 계수의 관계 적용하면

합 $-\frac{a}{2}=4$

곱 $\frac{b}{2}=(2+i)(2-i)=5$

∴ $a=-8,\ b=10$ 이므로

구 $b-a=\boxed{18}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

고1 에선

나머지정리를 이용한 식의 결정

11. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(4)$의 값은? [3점]

(가) $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.
(나) $xP(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

조건 (가)에서 $P(x)=(x-1)Q_1(x)+1$: $P(1)=1$

조건 (나)에서 $xP(x)=(x-2)Q_2(x)+2$: $2P(2)=2$

$\Rightarrow P(2)=1$

문제 꼼꼼히 읽기! $P(x)$는 최고차항의 계수 1인 이차다항식

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)+1$

($\because$ $P(1)-1=0$, $P(2)-1=0$ 이므로 $P(x)-1=(x-1)(x-2)$)

곧 ㉮ $P(4)=3\times2+1$

$=\boxed{7}$

식이 개복잡해보이지만 삼차이상의 식은 99.999% 인수분해되게 출제하심. 그리고 보통 ±1, ±2 내에서 인수분해됨 ㅋㅋ

12. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=8$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수이다.) [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$x=1$ 대입 : $1-(2a+1)+(a+1)^2-(a^2+1)=0$ 이므로

주어진 $x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$은 $x=1$을 실근으로 가짐

$\Rightarrow$ 조립제법 사용!

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -2a-1 & a^2+2a+1 & -a^2-1 \\
 & & 1 & -2a & a^2+1 \\
\hline
 & 1 & -2a & a^2+1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$으로 인수분해되고, 근과 계수의 관계에서

$2a=\alpha+\beta=8$ 이므로 $a=4$

㉮ $\alpha\beta=a^2+1$

$=\boxed{17}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

구하는 값을 위한 적절한 대입

13. x에 대한 다항식 $x^5+ax^2+(a+1)x+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 6이다. $a+Q(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 33 ② 35 ③ 37 ④ 39 ⑤ 41

$x^5+ax^2+(a+1)x+2=(x-1)Q(x)+6$

① $x=1$ 대입

$\Rightarrow 1+a+(a+1)+2=6$

$\therefore a=1$

② $x=2$ 대입

$\Rightarrow 32+1\cdot2^2+2\cdot2+2=Q(2)+6$

$\therefore Q(2)=36$

㉮ $a+Q(2)=\boxed{37}$

밑줄치면서 변수 파악하기 ㉯ 한 변수로 통일하기

14. 분자 사이에 인력이나 반발력이 작용하지 않고 분자의 크기를 무시할 수 있는 가상의 기체를 이상 기체라 한다. 강철 용기에 들어 있는 이상 기체의 부피를 V(L), 몰수를 n(mol), 절대 온도를 T(K), 압력을 P(atm)이라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$V=R\left(\frac{nT}{P}\right) \text{ (단, } R\text{는 기체 상수이다.)}$$

강철 용기 A와 강철 용기 B에 부피가 각각 V_A, V_B인 이상 기체가 들어 있다. 강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 몰수는 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 몰수의 $\frac{1}{4}$배이고, $n_A=\frac{1}{4}n_B$
강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 압력은 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 압력의 $\frac{3}{2}$배이다. $P_A=\frac{3}{2}P_B$
강철 용기 A와 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 절대 온도가 같을 때, $\frac{V_A}{V_B}$의 값은? [4점] $T_A=T_B$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

각 값들을 대입하면

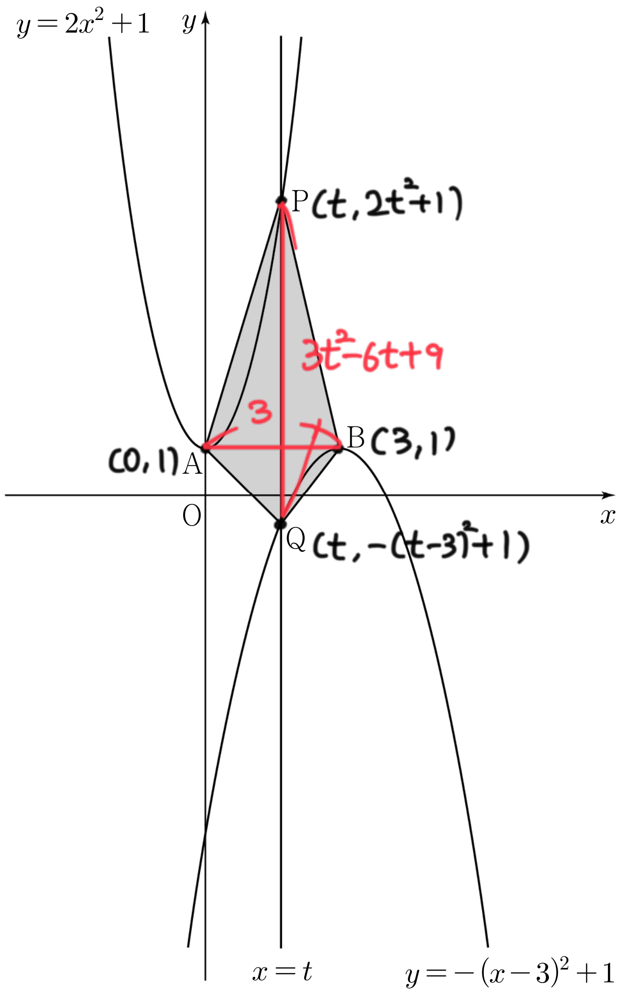
$$V_A=R\left(\frac{\frac{1}{4}n_B\cdot T}{\frac{3}{2}P_B}\right),\quad V_B=R\left(\frac{n_B\cdot T}{P_B}\right)$$

$$\Rightarrow ㉮\ \frac{V_A}{V_B}=\frac{\cancel{R}\left(\frac{\frac{1}{4}\cancel{n_B}\cdot\cancel{T}}{\frac{3}{2}\cancel{P_B}}\right)}{\cancel{R}\left(\frac{\cancel{n_B}\cdot\cancel{T}}{\cancel{P_B}}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

만든놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

그냥 좌표대입하고 계산 때리면 되는데 이상하게 잘 못 푸는 유형

15. 그림과 같이 직선 $x=t\,(0<t<3)$이 두 이차함수 $y=2x^2+1$, $y=-(x-3)^2+1$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A(0, 1), B(3, 1)에 대하여 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $\frac{15}{2}$ ② 9 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

그냥 좌표 구해서 대입!

$P(t, 2t^2+1)$, $Q(t, -(t-3)^2+1)$ 이므로

$\overline{PQ}=3t^2-6t+9$ 이다.

또한 문제에서 $A(0,1)$, $B(3,1)$ 이므로 $\overline{AB}=3$

따라서 $\square PAQB = \frac{1}{2}\times 3\times(3t^2-6t+9)$

$\because$ $\overline{AB}$와 $\overline{PQ}$가 이루는 각 90° → 넓이 $=\frac{1}{2}\times$ 대각선길이곱

$=\frac{9}{2}((t-1)^2+2)$ 이므로 $t=1$ 에서 최솟값 9

㉠ $\boxed{9}$

AB=0 은 A=0 OR B=0을 의미한다! ⇒ case 분류~

16. x에 대한 삼차방정식 $(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$이 서로 다른 세 실근 1, α, β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

i) $(x-a)$ 에서 실근 1 발생했을 경우

$a=1$ 이고, 곧 $(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-2x+4)=0$

이는 x^2-2x+4의 판별식이 0보다 작으므로 서로 다른 두 허근을 가짐

$\therefore$ 모순

ii) $x^2+(1-3a)x+4$ 에서 실근 1 발생했을 경우

1을 대입하면 $1+1-3a+4=0$ 이므로 $a=2$ 이고,

곧 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$ 이므로

$(x-2)(x-1)(x-4)=0$ 이다.

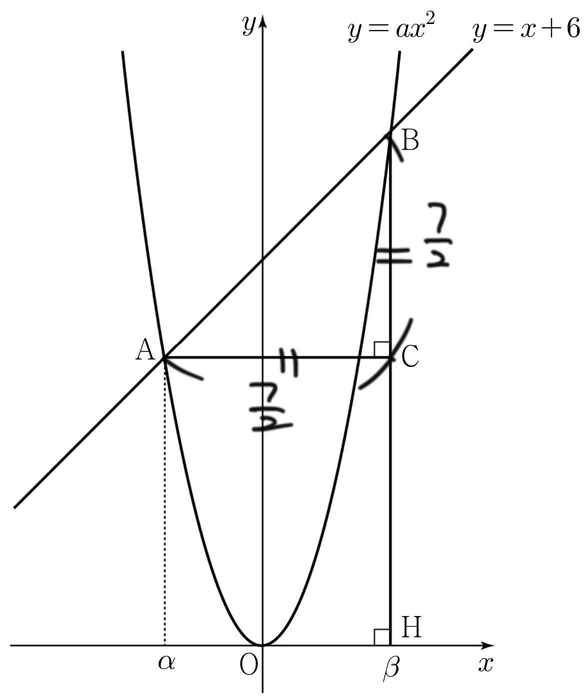
따라서 $(\alpha,\beta)=(2,4)$ OR $(4,2)$ 이므로

㉠ $\alpha\beta=\boxed{8}$

만든놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

결국 기울기 1인 직선의 특수성

17. 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2\,(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+6$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BH에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{BC}=\frac{7}{2}$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]



① $\frac{23}{4}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{31}{4}$

기울기가 1인 직선 → 직각이등변△ 생각가능

(왜? 기울기 $=\frac{y\text{변화량}}{x\text{변화량}}=1$ 이므로 x변화량 $=$ y변화량)

즉 $\overline{BC}=\frac{7}{2}$이므로 $\overline{AC}=\frac{7}{2}$이고, $\beta=\alpha+\frac{7}{2}$을 의미한다.

이 때 α, β는 $y=ax^2$와 $y=x+6$의 교점이므로

$ax^2-a-6=0$의 두 실근 → 근과계수의 관계!

합 $\alpha+\beta=\alpha+\left(\alpha+\frac{7}{2}\right)=2\alpha+\frac{7}{2}=\frac{1}{a}$

곱 $\alpha\beta=\alpha\left(\alpha+\frac{7}{2}\right)=\alpha^2+\frac{7}{2}\alpha=-\frac{6}{a}$

따라서 $-6(\alpha+\beta)=\alpha\beta$ 이므로 $-6\left(2\alpha+\frac{7}{2}\right)=\alpha^2+\frac{7}{2}\alpha$

→ $(2\alpha+3)(\alpha+14)=0$ ∴ $\alpha=-\frac{3}{2}$ ($\beta>0$)

곧 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=2$ 이므로

㉮ $\alpha^2+\beta^2=\frac{9}{4}+4=\boxed{\frac{25}{4}}$

이게 만약 증명문제가 아니라 20이하의 자연수 n을 그냥 생으로 구하라고 했으면 n=2 때문에 실수 많았을 듯

18. 다음은 자연수 n에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$4x^4-4(n+2)x^2+(n-2)^2=0$$ 복이차식

이 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의 모든 n의 값을 구하는 과정이다.

> $P(x)=4x^4-4(n+2)x^2+(n-2)^2$이라 하자.
> $x^2=X$라 하면 주어진 방정식 $P(x)=0$은
> $4X^2-4(n+2)X+(n-2)^2=0$이고 $\left(\frac{n+2\pm\sqrt{(n+2)^2-(n-2)^2}}{2}\right)$
> 근의 공식에 의해 $X=\frac{n+2\pm\sqrt{\boxed{(가)\ 8n}}}{2}$이다.
> 그러므로 $X=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}+1\right)^2$ 또는 $X=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-1\right)^2$에서
> $\frac{n+2\pm\sqrt{8n}}{2}=\frac{n\pm2\sqrt{2n}+2}{2}$ → $\frac{n}{2}\pm\sqrt{2n}+1$ → $\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\pm1\right)^2$
> $x=\sqrt{\frac{n}{2}}+1$ 또는 $x=-\sqrt{\frac{n}{2}}-1$ 또는 $x=\sqrt{\frac{n}{2}}-1$
> 또는 $x=-\sqrt{\frac{n}{2}}+1$이다. (∵ $x^2=X$)
> 방정식 $P(x)=0$이 정수해를 갖기 위해서는 $\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수가 되어야 한다.
> 따라서 자연수 n에 대하여 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의 모든 n의 값은 $\boxed{(나)\ 8}$, $\boxed{(다)\ 18}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $f(b-a)$의 값은? (단, $a<b$) [4점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

(나)와 (다)에 대해서 부연설명을 하자면,

$\sqrt{\frac{n}{2}}$ 이 자연수이므로

① $\sqrt{\frac{n}{2}}=1$: $n=2$
② $\sqrt{\frac{n}{2}}=2$: $n=8$
③ $\sqrt{\frac{n}{2}}=3$: $n=18$

총 3개의 20이하의 자연수 n이 존재.

But if $n=2$라면

$x=\sqrt{\frac{n}{2}}+1,\ -\sqrt{\frac{n}{2}}-1,\ \sqrt{\frac{n}{2}}-1,\ -\sqrt{\frac{n}{2}}+1$ 에서

$\sqrt{\frac{n}{2}}-1=-\sqrt{\frac{n}{2}}+1=0$ 이 되어 "서로 다른" 네 개의 정수해 X

곧 (나)와 (다)는 각각 8, 18이다.

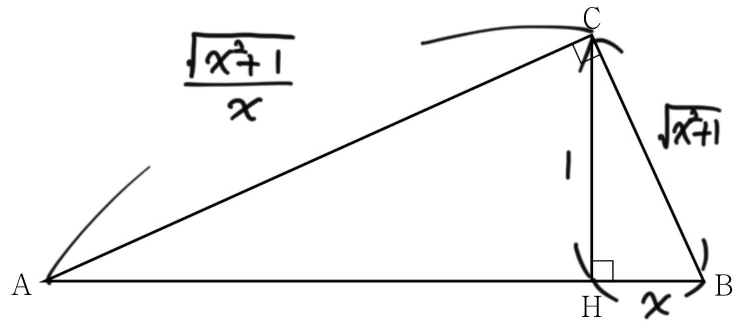
㉮ (가): $8n$, $\underbrace{(나): 8,\ (다): 18}_{(∵\ a<b)}$ 이므로 $f(b-a)=8\times10=\boxed{80}$

※ $n=8$일 경우엔 $x=3,-3,1,-1$
$n=18$일 경우엔 $x=4,-4,2,-2$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

이 그림 잘 기억해두기 ⊕ 구하는 식을 묶어내기

19. 그림과 같이 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.



$\overline{BH}=x$라 할 때, $3x^3-5x^2+4x+7$의 값은? (단, $x<1$) [4점]

① $13-3\sqrt{7}$ ② $14-3\sqrt{7}$ ③ $15-3\sqrt{7}$
④ $16-3\sqrt{7}$ ⑤ $17-3\sqrt{7}$

닮음을 물어보고자 할 때 정말 많이 나오는 그림 !!

기본적으로 이 도형 (직각△에서 수선 내린 그림)은 △BCH, △BAC, △CAH가 모두 닮음이다.

곧 $\overline{BH}=x$로 두면 $\overline{CH}=1$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BC}=\sqrt{x^2+1}$ 에서 $x:1=\sqrt{x^2+1}:\overline{AC}$ (∵ △BCH, △BAC 닮음)

⇒ $\overline{AC}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 이다.

∴ △ABC 넓이 $=\frac{1}{2}\times\sqrt{x^2+1}\times\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{x^2+1}{2x}=\frac{4}{3}$

⇒ $3x^2-8x+3=0$ 이다.

이제 구하는 식 $3x^3-5x^2+4x+7$을 최대한 $3x^2-8x+3=0$을 이용해 묶어내면

$$3x^3-5x^2+4x+7=x(\underbrace{3x^2-8x+3}_{0})+(\underbrace{3x^2-8x+3}_{0})+9x+4$$

따라서 $3x^3-5x^2+4x+7=9x+4$이다.

이제 근의 공식을 통해 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ (∵ $x<1$)을 얻고, 이를 계산하면

㉠ $\boxed{16-3\sqrt{7}}$

결국 또 case 분류.

20. 실수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-a)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
> (나) $2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 같다.

$f(-1)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

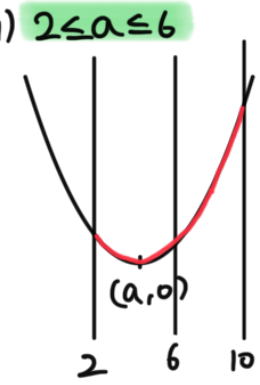
① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

$f(x)=(x-a)^2$의 최솟값은 $x=a$에서 0.

즉 조건 (가)에서 $2\le a\le 10$임을 알 수 있다.

이를 조건 (나)와 이어서 생각해보면 $2\le x\le 6$인 구간과 $6\le x\le 10$인 구간 중 적어도 하나에는 $x=a$가 존재한다는 것을 알 수 있으므로 case 분류 가능.

i) $2\le a\le 6$



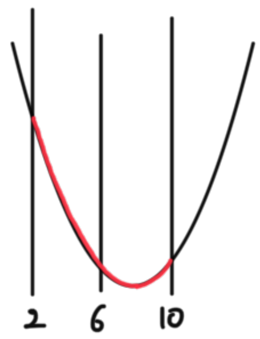
$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$

⇒ $2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(6)$과 같아야 함 : $f(2)\le f(6)$ 의미

⇒ $(2-a)^2\le(6-a)^2$ 이고, (또는 이차함수의 대칭성 이용 가능) 곧 $a\le 4$이다.

즉 $2\le a\le 6$과 $a\le 4$의 공통범위는 $2\le a\le 4$

ii) $6\le a\le 10$



$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0

⇒ $2\le x\le 6$에서 최댓값 0 불가능하다는 점에서 모순

결국 $f(-1)=(-1-a)^2=(a+1)^2$이므로, 최댓값은 $a=4$일때 25
최솟값은 $a=2$일때 9

㉠ $M+m=\boxed{34}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

ㄱ,ㄴ,ㄷ의 유기성 : ㄱ이 ㄴ 푸는데 필요하고, ㄴ이 ㄷ 푸는데 필요한 경우 많음

21. 1이 아닌 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2-6x+6$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 C, D라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작다.) [4점]

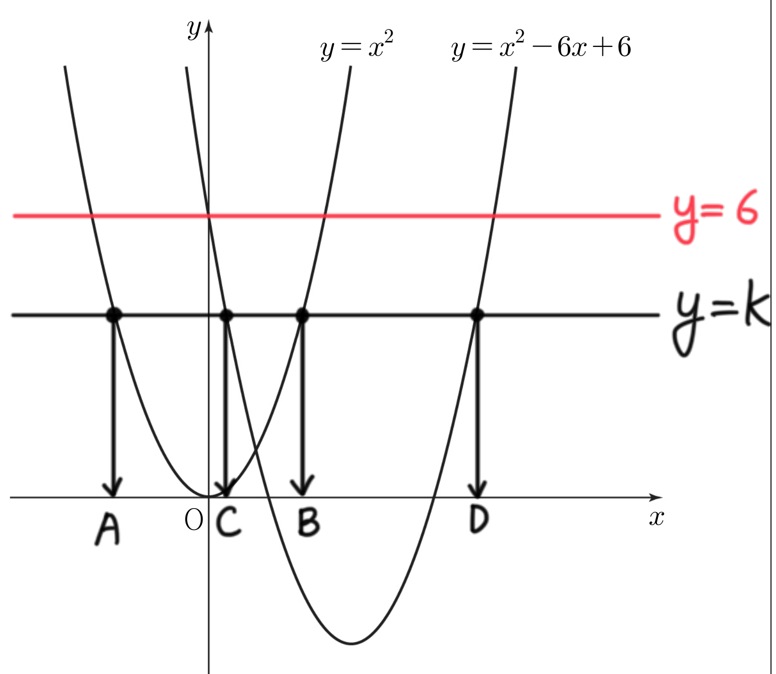
<보 기>

ㄱ. $k=6$일 때, $\overline{CD}=6$이다.

ㄴ. k의 값에 관계없이 $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2$의 값은 일정하다.

ㄷ. $\overline{CD}+\overline{AB}=4$일 때, $k+\overline{BC}=\frac{17}{16}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ ✓



$y=k$일 때 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 구해보면

점 A, B는 $k=x^2$의 교점이므로 $A(-\sqrt{k},k)$, $B(\sqrt{k},k)$

점 C, D는 $k=x^2-6x+6$의 교점이므로 $k=(x-3)^2-3$ 에서

$k+3=(x-3)^2 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{k-3}$

$\therefore C(3-\sqrt{k-3},0)$, $D(3+\sqrt{k-3},0)$

이를 통해 $\overline{AB}$의 길이는 $2\sqrt{k}$임을 알 수 있고, $\overline{CD}$의 길이는 $2\sqrt{k+3}$

ㄱ. sol1) 곧 $k=6$일때 $2\sqrt{k+3}$에 $k=6$ 대입 → $\overline{CD}=\boxed{6}$

sol2) $y=6$은 $y=x^2-6x+6$의 y절편을 지나므로 점 C(0,6)

이 때 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$은 $x=3$을 축으로 가지므로 이차함수의 대칭성에 의해 점 D(6,6)

$\therefore \overline{CD}=\boxed{6}$ (그냥 $6=x^2-6x+6$ 풀어도 됨!)

ㄴ. ㄱ에 의해 $\overline{AB}=2\sqrt{k}$, $\overline{CD}=2\sqrt{k+3}$ 이므로 $\overline{AB}^2=4k$, $\overline{CD}^2=4k+12$

$\Rightarrow \overline{CD}^2-\overline{AB}^2=\boxed{12}$ (일정)

ㄷ은 다음 page

단답형

아직 확통 안 배웠으니 전개...해야겠지? ⊕ 잔머리 굴리면 좀 편하게 가능

22. 다항식 $(4x-y-3z)^2$의 전개식에서 yz의 계수를 구하시오. [3점]

sol1) 쌩으로 전개 ㅠ

$(4x-y-3z)(4x-y-3z)$

$16x^2-4xy-12xz\cdots$

열심히 전개하면 답 $\boxed{6}$

sol2) 필요한 것만!

어차피 $4x$는 yz를 만드는데 관여안함

⇒ 없애도 됨.

$\Rightarrow (-y-3z)(-y-3z)$

$\Rightarrow y^2+6yz+9z^2$

→ ㉠ $\boxed{6}$

부등식은 결국 방정식을 먼저 푸는 것. $x^2+ax+b=0$ 의 해가 $x=2,4$임

23. x에 대한 부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-2\le x\le 4$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

이차부등식의 해가 $-2\le x\le 4$ 이므로

$(x+2)(x-4)\le 0$

$\Rightarrow x^2-2x-8\le 0$ 이다. $\therefore a=-2,\ b=-8$

㉠ $ab=\boxed{16}$

21번 이어서

ㄷ. 마찬가지로 ㄱ에 의해 $\overline{AB}=2\sqrt{k}$, $\overline{CD}=2\sqrt{k+3}$로 두고 계산해도 되지만, 역경기 때문에 ㄴ보기와 ㄷ보기의 연관성을 생각해보자.

ㄴ에서 굳이 $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2$를 물어본 이유가 있지 않을까?

→ 합차공식 연상가능!

만든 놈: [instagram] crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

$\overline{CD}^2-\overline{AB}^2=(\overline{CD}+\overline{AB})(\overline{CD}-\overline{AB})=12$이므로 $\overline{CD}+\overline{AB}=4$면 $\overline{CD}-\overline{AB}=3$

이를 계산하면 $\overline{CD}=\frac{7}{2}$, $\overline{AB}=\frac{1}{2}$이고, 이 때의 k는 $\overline{CD}$나 $\overline{AB}$ 어느것이나 대입해도 구할 수 있다.

∴ $\overline{AB}=2\sqrt{k}=\frac{1}{2}$이므로 $k=\frac{1}{16}$이고, 우리는 이를 이미 알고 있는 점들의 좌표에 대입해 점 B와 C의 좌표를 구할 수 있다.

→ $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $C\left(3-\sqrt{\frac{1}{16}+3}, 0\right)$ → $C\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로 $\overline{BC}=1$이다.

㉠ $k+\overline{BC}=\boxed{\frac{17}{16}}$

곧 정답은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

만든놈: crazy_hansudcwon
수민쿠키, 오그비 : 한석원의눈물

나머지정리 기본 문제

24. 다항식 x^3+2를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차식 이하.

즉 $x^3+2=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$으로 둘 수 있다.

이 식에 $x=-1$ 대입하면 $-a+b=1$

$x=2$ 대입하면 $2a+b=10$

∴ 둘을 연립하면 $a=3$, $b=4$이므로 ㉮ $a+b=\boxed{7}$

결레근 성질 제발 기억!

25. 이차방정식 $x^2-6x+11=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.) [3점]

이차방정식의 항의 계수가 모두 실수이므로 이 이차방정식은 켤레근을 갖는다. ★

즉, α와 β는 서로 켤레복소수이고, $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이다.

따라서 구하는 값 $11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)$은 $11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)$과 같다.

이 때 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=11$이므로

㉮ $11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=11\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)$

$=11\left(\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)$

$=11\left(\frac{36-22}{11}\right)$

$=\boxed{14}$

조립제법... 쓸 줄 아시죠?

26. 다음은 삼차다항식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정의 일부를 나타낸 것이다.

3	a	b	c	11
		$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{-6}$
	1	1	-2	5

$P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

조립제법의 사용법에 따라 $a=1$이고, $b+3=1$이므로 $b=-2$이다.

계속해서 $c+3=-2$이므로 $c=-5$이다.

곧 $P(x)=x^3-2x^2-5x+11$이므로 $P(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는

$P(4)=64-32-20+11$

$=\boxed{23}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수완휘, 오2비 : 한석원의눈물

부등식의 공통범위

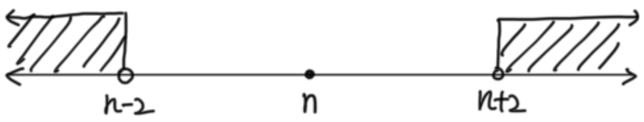
27. 자연수 n에 대하여 x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} |x-n| > 2 \\ x^2-14x+40 \le 0 \end{cases}$$

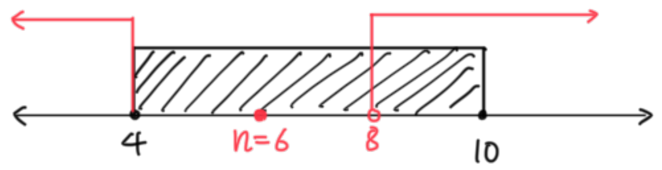
을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

절댓값은 거리 개념!!

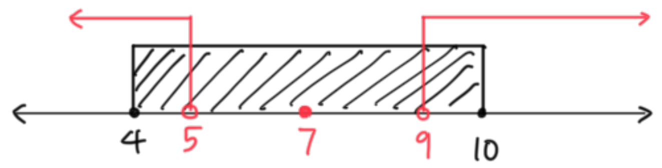
$|x-n|>2$은 수직선상에서 n을 기준으로 거리가 2보다 큰 x 의미!



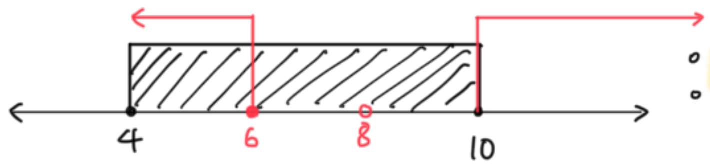
즉 $x<n-2$, $x>n+2$이고 $x^2-14x+40 \le 0$은 $(x-4)(x-10) \le 0$이므로 $4 \le x \le 10$이다.



∴ $x=9, 10$



∴ $x=4, 10$



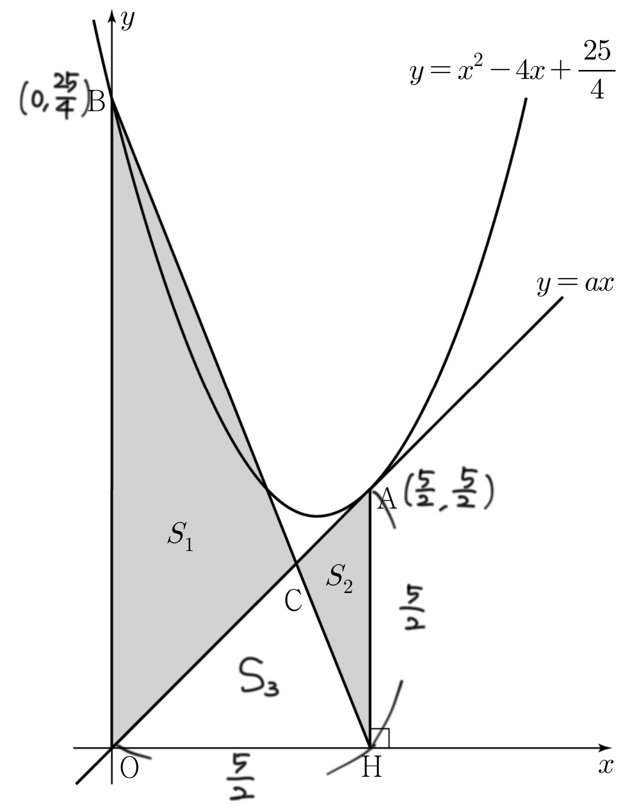
∴ $x=4, 5$

조건을 만족하는 $n=6, 7, 8$ 이므로

㉠ n의 합 : $\boxed{21}$

새로운 넓이를 도입한 넓이의 "차"의 해석

28. 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=ax\,(a>0)$과 한 점 A에서만 만난다. 이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 y축과 만나는 점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 OA와 선분 BH가 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 BOC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACH의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1-S_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$y=x^2-4x+\frac{25}{4}$ 와 $y=ax$이 한 점 A에서만 만나므로

두 식을 뺀 $x^2-(4+a)x+\frac{25}{4}=0$이 실근을 한 개만 가져야 한다.

즉, 판별식이 0이다.

→ $(a+4)^2-25=0$이므로 $(a+4)^2=5^2$에서 $a=1$ (∵ $a>0$)이다.

곧 이를 대입하면 $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$은 $(x-\frac{5}{2})^2=0$이므로 $A(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$이다.

또한 점 B는 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 y절편이므로 $B(0, \frac{25}{4})$이고, 이를 통해 S_1-S_2을 구할 수 있다.

이때 넓이의 "차"를 물어본 이유가 있다!

sol1) △OCH의 넓이를 S_3로 두자.

$S_1+S_3=\triangle OBH$, $S_2+S_3=\triangle OAH$이므로

$$S_1-S_2=(S_1+S_3)-(S_2+S_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{25}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$$
$$=\frac{75}{16}$$

㉠ $p+q=\boxed{91}$

sol2) 아마 대부분 이렇게 풀었을 것 같긴 한데 그냥 점 C 좌표 구하기

점 C는 $y=x$와 $y=-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}$의 교점

⇒ $C(\frac{25}{14}, \frac{25}{14})$

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}\times\frac{25}{14}$ 이고

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times(\frac{5}{2}-\frac{25}{14})$ 이므로

$S_1-S_2=\frac{75}{16}$

㉠ $p+q=\boxed{91}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

결국 주기성

29. 49 이하의 두 자연수 m, n이

$$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n\right\}^2 = 4$$

를 만족시킬 때, $m+n$의 최댓값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = \pm 2$이고, 주기성 있을 것 정도는 예상가능.

① $m=1$일 때 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$이므로 주어진 조건 만족하는 n은 X

② $m=2$일 때 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$이므로 〃 n은 X

$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$인데 i는 4제곱을 주기로 가지므로 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$은 8제곱이 주기.

③ $m=3$일 때 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = i\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$이므로 〃 n은 X

④ $m=4$일 때 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = i^2 = -1$이므로 〃 n은 $i^n=1$인 n

$\Rightarrow n=4k$ (k는 자연수) 꼴이다.

이를 통해 m이 4의 배수가 아닐 때는 주어진 조건을 만족하는 n은 없다는 것 알 수 있다.

즉 $m=8$일 때 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^4 = 1$이므로 〃 n은 $i^n=-1$인 n

$\Rightarrow n=4k-2$ (k는 자연수) 꼴이다.

이를 정리하면

$m=8l-4$ (l은 자연수)이면 $n=4k$ (k는 자연수)

$m=8l$ (l은 자연수)이면 $n=4k-2$ (k는 자연수)

이제 $m+n$의 최댓값은

i) $m=8l-4$일 경우 m의 최댓값은 44, n의 최댓값은 48

$\Rightarrow m+n=92$

ii) $m=8l$일 경우 m의 최댓값은 48, n의 최댓값은 46

$\Rightarrow m+n=94$

㉠ $m+n$의 최댓값: $\boxed{94}$

두 함수의 차의 중요성 ~

30. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

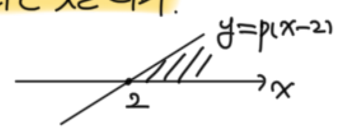
(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점 $(0, 0)$에서만 만난다.
(나) 부등식 $f(x)+g(x)\geq 0$의 해는 $x\geq 2$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\geq f(1)-g(1)$이다.

x에 대한 방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수가 5일 때, $f(22)+g(22)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에 의해 $y=f(x)$는 $y=ax^2$으로 놓을 수 있다.

조건 (나) 해석이 중요한데, 일반적인 경우엔 $f(x)+g(x)$는 이차식이므로 $f(x)+g(x)\geq 0$의 해가 $x\geq a$ 꼴로 나올 수 없다. ($x\geq a, x\leq b$ OR $a\leq x\leq b$ 꼴)

곧 $f(x)+g(x)$는 일차식이라는 것을 알 수 있고, 이는 $y=f(x)$의 최고차항의 계수와 $y=g(x)$의 최고차항의 계수가 절댓값은 같고 부호가 반대라는 것을 의미.

즉, $f(x)+g(x)=p(x-2)$ 꼴로 둘 수 있다. $(p>0)$ ($\because$ )

$\therefore g(x)=-f(x)+p(x-2)$

$\Rightarrow g(x)=-ax^2+p(x-2)$이다.

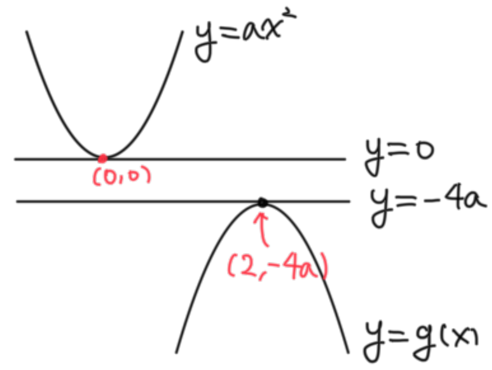
곧 $f(x)-g(x)$는 무조건 이차식이고, (다) 조건에 의해 $f(x)-g(x)=2ax^2-p(x-2)$은 $x=1$에서 최솟값을 가진다.

이는 $f(x)-g(x)=2a(x-1)^2+\square$ 꼴이라는 것을 의미하고, 두 식을 비교하면 $p=4a$

$\Rightarrow g(x)=-ax^2+4a(x-2)$
$=-a(x-2)^2-4a$

문제에서 물어보는 경우가 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 가지지 않는 경우이므로 $f(x)=k$ OR $g(x)=k$가 존재하지 않도록 하는 정수 k가 5개라는 의미.

따라서 f와 g는 다음과 같다.



(이때, $p=4a$에서 $p>0$이었으므로 $a>0$이다)

여기서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 모두와 만나지 않는 $y=k$가 5개 존재해야 하므로 (k는 정수) $-6\leq -4a<-5$이다. $\therefore \frac{5}{4}<a\leq\frac{3}{2}$

㉠ $f(22)+g(22)=p(22-2)=80a$이므로 최댓값은 $80\times\frac{3}{2}=\boxed{120}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.