\+ ×

작성자 : 연연하지말고 이연

− ÷

수학

요약

1. $x=a$ 선대칭 X (a,b) 점대칭 = ?

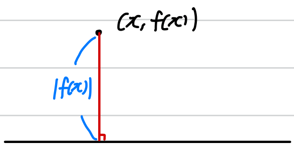
$x=a$ 선대칭 X $(a,0)$ 점대칭 = $(a,0)$ 점대칭

2. $f(x)$: 기함수 & 감소함수 일 때,

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = -x$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t) \Leftrightarrow$ f와 g는 역함수관계

4. $|f(x)|$의 해석 방법 → x축까지의 거리



5. 절댓값 부등식

$|x|+|y| \ge |x+y|$ (등호 : $xy \ge 0$ 일 때 성립)

ex) $\sum_{n=1}^{10} |a_n| = \left|\sum_{n=1}^{10} a_n\right|$ → $a_1 \sim a_{10}$ 부호동일

$\sum_{n=1}^{10} |a_n|+|b_n| = \sum_{n=1}^{10} |a_n+b_n|$ → $a_n b_n \ge 0$

$(xy<0) \Rightarrow |x|+|y| > |x+y|$

$|x|+|y|-|x+y| = 2 \times \min\{|x|, |y|\}$

ex) $|3|+|-1|-|3+(-1)| = 2 \times \min\{|3|, |-1|\}$

$= 2$

$|x+y| \ge |x|-|y|$ (등호 : $\underbrace{(x+y) \times y \le 0}$ 일 때 성립)

↳ $|x|>|y|$ 포함 조건

$y>0 \to (x+y) \times ⊕ \le 0$

$y<0 \to (x+y) \times ⊖ \le 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{|x+y|}_{=a} + \underbrace{|-y|}_{=b} \ge |x|$ 라 하면

$|a| + |b| \ge |a+b|$

ex) $\sum_{k=1}^{10} |a_k+b_k| = \sum_{k=1}^{10} (|a_k|-|b_k|)$

→ $|a_k+b_k| = |a_k|-|b_k|$

→ $(a_k+b_k) \times b_k \le 0$

연연하지말고 이연

6. max , min 함수 → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \leq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 큰 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 작은 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

7. 가우스함수 (최대 정수 함수)

$[x]$: x 이하의 정수 중 가장 큰 정수

$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$

* 가우스함수를 정수 개수 세는 식에 활용하기. → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

ex) 자연수 n에 대해,

$2n - \sqrt{4n^2+n} < x < 2n + \sqrt{4n^2+n}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자.

$$\rightarrow a_n = \underbrace{2[\sqrt{4n^2+n}]}_{\text{양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수}} + \underbrace{1}_{0\text{ 개수}}$$

해설

1. 점대칭함수와 선대칭함수의 곱

i) $x=a$ 선대칭 × $(a,0)$ 점대칭 → $(a,0)$ 점대칭

증명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=0$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x) = f(x)\times g(x)$ 라 하자.

$h(x) = f(x)\times g(x)$

$= f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\}$

$= -f(2a-x)\times g(2a-x)$

$= -h(2a-x)$

→ $h(x)+h(2a-x)=0$ 이므로,

$h(x)$는 $(a,0)$ 점대칭이다.

ii) $x=a$ 선대칭 × (a,b) 점대칭 → 직접 살펴봐야 함

설명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=2b$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x) = f(x)\times g(x)$ 라 하자.

$h(x) = f(x)\times g(x)$

$= f(2a-x)\times\{2b-g(2a-x)\}$

$= f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\}+2bf(2a-x)$

$= -h(2a-x)+2bf(2a-x)$

$h(x)+h(2a-x) = 2bf(2a-x)$

$= 2bf(x)$

→ 정리하니 별 의미 없는 식이 나왔다.

이런 경우가 나오면, 직접 살펴보자.

* $h(x)+h(2a-x)$: $x=a$ 대칭 ($h(x)$, $h(2a-x)$ 각각은 $x=a$ 대칭인지 알 수 없음)

$2bf(x)$: $x=a$ 대칭

→ 별 의미 없다.

2. f(x)와 그 역함수의 교점 - 관련 기출(2021년 시행 고3 10월 이적 30번)

30. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$ 감소 & 기함수

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점] 10

(가) $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)$

$h(0)=g(f(0))=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0$

$\rightarrow f(2)=f^{-1}(2)$

이때, $f(x)$는 기함수이자 감소함수이기 때문에, $(2,-2)$와 $(-2,2)$를 지난다는 점을 알 수 있다.

(여기서 $(2,2)$ 지난다고 풀면 큰일납니다!)

$\rightarrow 4a+b=5$ ($(2,-2)$ 대입하고 정리함.)

(나) $g'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))}=f'(2)-\dfrac{1}{f'(-2)}=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$ ($f(x)$가 기함수 $\rightarrow$ $f'(x)$는 우함수)

$h'(2)=g'(f(2))\times f'(2)$

$=g'(-2)\times f'(2)$

$\rightarrow f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5f'(2)\times\{f'(2)-1\}$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$(5f'(2)+1)(f'(2)-1)(f'(2)+1)=0 \rightarrow f'(2)=-\frac{1}{5}$ or $f'(2)=-1$

$\rightarrow f'(x)=-\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}$

만약 $f'(2)=-1$ 이라면 $a=1, b=1$. (서로 다른 두 양수라는 조건에 모순)

$\therefore f'(2)=-\frac{1}{5}$, $a=\frac{1}{2}$, $b=3$

$\rightarrow 4(b-a)=12-2=10$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ $\Leftrightarrow$ f와 g는 역함수관계

설명) $f(x)=t$ 라는 x에 관한 식의 실근이 $g(t)$라 했으므로,

x자리에 $g(t)$를 대입하면

$f(g(t))=t$.

이 식을 t에 관한 식으로 해석하면 f와 g는 역함수 관계임을 알 수 있다.

6. Max 함수 - 관련기출 (13학년도 6평 21번 (가))

설명) max, min 함수는 표기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 딱히 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

21. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

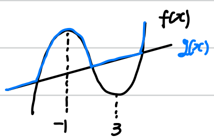
라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점] 2

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

$g(x)=\max\{f(x),\ mx\}$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

mx를 이렇게나 잡아보며 상황을 파악해보자.



→ 이 경우, $g(x)$는 $f(x)$와 mx의 교점에서 미분불가능하다.

→ $f(x)-mx=(x-\square)^3$ 형태일 때 모든 교점에서 미분가능함.

$f(x)$의 세 근의 합이 3이므로, $f(x)-mx=(x-1)^3$

→ $m=-12$.

\# $\max\{f(x), mx\}=\dfrac{f(x)+mx}{2}+\dfrac{|f(x)-mx|}{2}$ 이므로, $f(x)$와 mx의 '접하지 않는' 교점이 미분불가능점이라고 수식적 이해 가능

\# mx는 $f(x)$의 변곡접선.

6. min 함수 - 관련기출 (17학년도 9평 21번 (나))

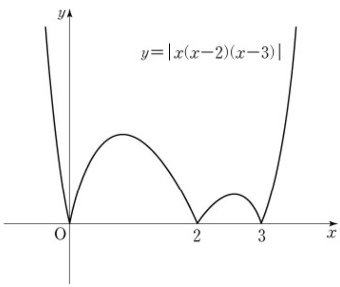
설명) max, min 함수는 표기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 딱히 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점] 2

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ V ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



편의상 $h(x) = |x(x-2)(x-3)|$ 이라 하겠다.

(가) $f(x) \to x=0$ or $x=2$ or $x=3$에서 중근을 가져야 함.

(나) $g(x) = \min\{f(x), h(x)\}$

0, 2, 3 중 중근을 α, 중근이 아닌 두 근을 β, γ라 하자. $(\beta<\gamma)$

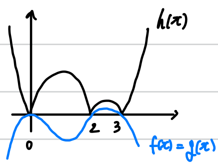
만약 $\beta \le x \le \gamma$ 에서 $f(x)$가 $h(x)$보다 커진다면, $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 f와 h는 접해야 함 (∵ g의 식이 바뀌는 경계가 되기 때문)

→ f와 h는 $x=\alpha$에서 교점이 생기고 (h f) $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 접해야 함. 그런데 f는 4차, h의 형태는 3차이기 때문에, 4차함수와 3차함수가 교점 1개 + 접점 2개를 갖는다는 것은 불가능. (주어진 상황대로 하면 $f-h$의 형태가 최소 $(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$을 가져야 하므로 4차를 넘어감)

∴ $\beta \le x \le \gamma$에서 $f(x) \le h(x)$ → 이 범위에서 $g(x) = f(x)$.

> 교점 2개 + 접점 1개는 가능하기 때문에, 밑에서 미분계수로 식 세울 때 등호가 들어감

i) $f(x) = px^2(x-2)(x-3)$

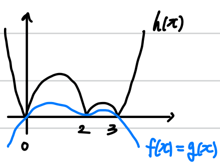


이 경우 $f'(2) \le$ (h의 $x=2$에서의 우미분계수)

$-4p \le 2 \to 0 > p \ge -\frac{1}{2}$

$f(1) = 2p \to 0 > 2p \ge -1$

ii) $f(x) = px(x-2)^2(x-3)$



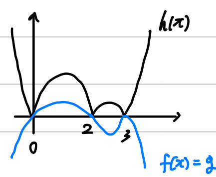
$f'(0) \le$ (h의 $x=0$에서의 우미분계수)

$f'(3) \ge$ (h의 $x=3$에서의 좌미분계수)

$\left.\begin{matrix} -12p \le 6 \\ 3p \ge -3 \end{matrix}\right) 0 > p \ge -\frac{1}{2}$

$f(1) = -2p \to 1 \ge -2p > 0$

iii) $f(x) = px(x-2)(x-3)^2$



$f'(0) \le$ (h의 $x=0$에서의 우미분계수)

$f'(2) \ge$ (h의 $x=2$에서의 좌미분계수)

$\left.\begin{matrix} -18p \le 6 \\ 2p \ge -2 \end{matrix}\right) p \ge -\frac{1}{3}$

$f(1) = -4p \to -4p \le \frac{4}{3}$

∴ $f(1)$의 최댓값 $= \frac{4}{3}$

7. 가우스함수 표기를 이용한 개수세기 - 관련 기출 (2023년 시행 고3 3월 미적 29번)

설명) 가우스함수 표기를 이용한 개수세기는 풀이에 직접적인 영향을 미치지는 않는다.

다만, 개수를 셀 때 '실수'를 안 하는게 매우 중요한데, 가우스함수로 표현해놓으면 실수할 여지는 줄어드는 듯 하다.

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점] 50

$2n-\sqrt{4n^2+n} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$

$a_n = 2\underbrace{[\sqrt{4n^2+n}]}_{} + 1$

양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수

0도 정수이기 때문에 1개 더해줘야 함.

$(2n)^2 < 4n^2+n < (2n+1)^2$

$\rightarrow a_n = 2\times 2n + 1$

$= 4n+1$

$(\text{주어진 극한}) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{na_n-p^2n^2}{\sqrt{na_n}+pn} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn} = \dfrac{1}{2+p} = q$

$\hookrightarrow p=2$ $\hookrightarrow q=\frac{1}{4}$

$\therefore 100pq = 50$

수학1

(요약) 지수함수와 로그함수

1. 지수로그함수 활용에서, 주어진 함수의 식에 a,b,k등 문자가 포함된 경우, $\log_a k$ 등의 복잡한 형태로 좌표를 일일이 설정하는 것보다 길이관계를 먼저 구하고 $\log_a k$등을 간단한 문자로 치환해 푸는게 더 간단한 경우가 많다.

   i) 길이관계 구하기

   ii) 복잡한 좌표를 간단한 문자로 치환해 좌표 설정하기 (이때 치환한 문자의 수가 문제에서 주어진 문자의 수보다 많아지면 안 됨.)

   iii) i의 정보를 이용해 치환한 문자의 값 구하기

   iv) 문제에서 물어본 정보 구하기

   (무조건 이 순서로 풀어라! 이건 아니지만, 문제에서 문자로 주는 값이 많아질수록 복잡한 좌표를 치환하는 게 중요해짐.)

2. 지수로그함수 ㄱㄴㄷ 문제에서 고려해봐야 하는 것.

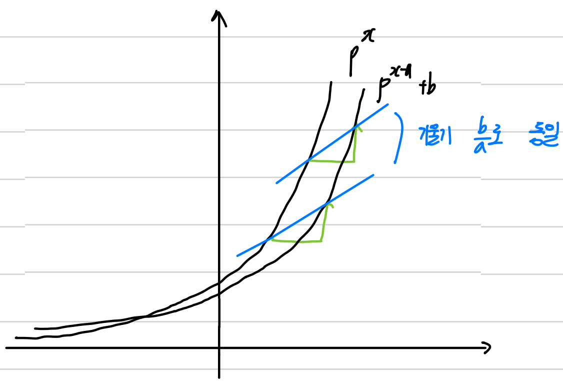
   i) 교점의 x좌표의 범위를 물어본 경우 → 교점 주위에서 함숫값의 대소관계가 바뀐다는 점 이용

   ii) (주로 ㄷ 에서) 이상한 형태의 부등식을 물어볼 때 고려해야 하는 것.

   - 길이 (x_2-x_1 , y_2-y_1)
   - 기울기 (원점 - 주어진 좌표 ($\frac{y_1}{x_1}$)이나 주어진 좌표 - 주어진좌표)
   - 넓이 ($x_1 \times y_1$)
   - 대칭성

3. 지수로그함수를 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 점을 이어보면 항상 기울기가 $\frac{b}{a}$이다.

(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우를 조심하자. 이 경우 기울기는 $\frac{b}{a}$가 아니다.)

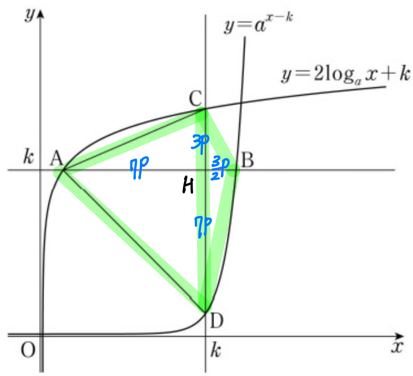


(해설) 지수함수와 로그함수

1. 복잡한 지수로그함수 활용 - 관련기출 (2023년 시행 고3 3월 21번)

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]

12



$[\square ADBC] = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{85}{2}$

$[\triangle CAD] = 35 \rightarrow [\triangle BCD] = \frac{15}{2}$

$\therefore \overline{AH} : \overline{BH} = 7 : \frac{3}{2}$ → $\overline{AH} = 7p$, $\overline{BH} = \frac{3}{2}p$ (p라는 새로운 좌표 설정)

$\overline{AH} = k-1$ (H와 A의 x좌표 직접 구해서 구함)

$\overline{DH} = k-1$ (H와 D의 x좌표 직접 구해서 구함)

$\rightarrow \overline{AH} = \overline{DH} = 7p$

$\overline{BH} = \log_a k$ (직접 좌표구해서 구함)

$\overline{CH} = 2\log_a k$ (직접 좌표구해서 구함)

$\rightarrow \overline{BH} : \overline{CH} = 1:2 \rightarrow \overline{CH} = 3p$

$[\triangle CAD] = \frac{1}{2} \times 10p \times 7p = 35p^2 = 35 \quad \therefore p=1$

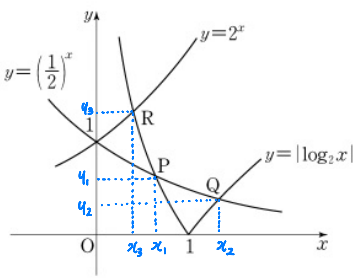
$A(1,k) \rightarrow B(1+\frac{17}{2}p, k) = B(\frac{19}{2}, k) \Rightarrow a^{\frac{19}{2}-k} = k \Rightarrow \log_a k = \frac{19}{2}-k$

$D(k,1) \rightarrow C(k, 1+10p) = C(k, 11) \Rightarrow 2\log_a k = 11-k$

$\rightarrow k=8, a=4$

2. 지수로그함수 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문항 – 관련기출 (11학년도 수능 16번 (나))

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] 3



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

~~ㄷ.~~ $x_2(x_1-1) > y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

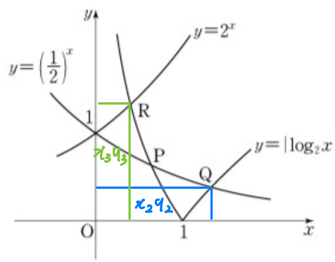
ㄱ 함숫값 대소관계 교차를 이용한 간접비교

$x_1 < 1$: 눈으로 확인 가능

$x=\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left|\log_2 \frac{1}{2}\right|$

$\rightarrow x_1 > \frac{1}{2}$

ㄴ $x_2y_2,\ x_3y_3$: 직사각형의 넓이



→ 대소비교가 아니라 정확히 '같음'을 보여야 하기 때문.

하지만 이 선지에서는 '역함수'의 '대칭성'이 더 중요!

$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} = \log_2 x_2$ → x_2는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$의 실근

$y_3 = 2^{x_3} = -\log_2 x_3$

$x_3 = \log_2 y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y_3}$ → y_3는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$의 실근

$\therefore x_2 = y_3 \rightarrow y_2 = x_3$

$\therefore x_2y_2 = x_3y_3$

ㄷ. 기울기로 해석

$x_1 - 1 < 0$ 이라서 부등호 방향 바뀜

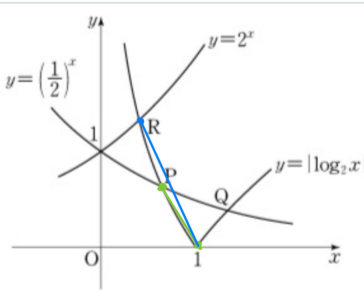
$$\frac{x_2}{y_2-1} < \frac{y_1}{x_1-1}$$

ㄴ에서 찾은 R,Q 대칭성 이용

$$\frac{y_3}{x_3-1} < \frac{y_1}{x_1-1}$$

(x_3, y_3) (x_1, y_1)

$(1, 0)$ $(1, 0)$



$$\frac{y_3}{x_3-1} > \frac{y_1}{x_1-1}$$ 이므로 거짓.

3. 지수로그함수와 기울기

함수 $f(x)$에 대하여 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동 시킨 함수 $f(x-a)+b$를 생각해보자.

$f(x)$ 위의 점 (x, y)에 대하여, 위 규칙에 따라 평행이동시키면 $(x+a, y+b)$ 라는 점이 나온다.

→ 이 두 점의 기울기 = $\dfrac{(y+b)-y}{(x+a)-x} = \dfrac{b}{a}$

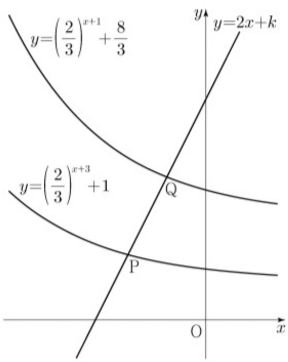
평행이동 관계에 있지 않은 두 점에 대해서는 성립하지 않음. - 관련기출(22학년도 수능 9번)

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

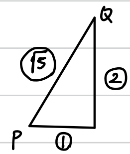
$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점] 4

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



P와 Q는 평행이동 관계에 있는 두 점이 아님!



PQ의 기울기로 x좌표 차이와 y좌표 차이 찾기

점 P의 좌표를 $\left(p, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1\right)$ 이라 하면,

점 Q의 좌표는 $\left(p+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3\right)$.

→ $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

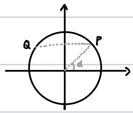
→ $p=-2$ → $P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

∴ $k=\frac{17}{3}$

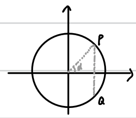
(요약) 삼각함수

1. 삼각방정식

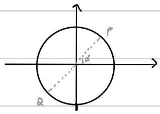
$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta+\alpha = (2n+1)\pi & \text{(y축 대칭)} \end{cases}$



$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta+\alpha = 2n\pi & \text{(x축 대칭)} \end{cases}$

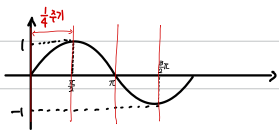


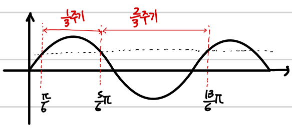
$\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta-\alpha = (2n+1)\pi & \text{(원점 대칭)} \end{cases}$



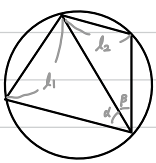
$\tan\alpha$: $\overline{OP}$의 기울기
$\tan\beta$: $\overline{OQ}$의 기울기
→ O, P, Q 한 직선

2. 삼각함수 그래프의 비율관계 (sin x 기준)

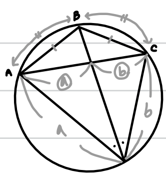


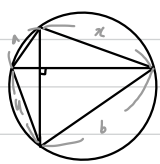


3. 도형 관련 여러 성질



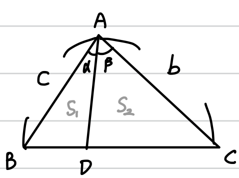
$l_1 : l_2 = \sin\alpha : \sin\beta$





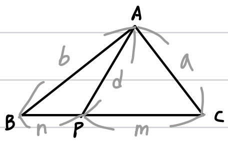
$a^2+b^2 = x^2+y^2 = 4R^2$

(반지름 : R)



$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a\cdot\sin\alpha}{b\cdot\sin\beta}$

4. 스튜어트정리



$$mb^2+na^2=(m+n)(mn+d^2)$$

(위 그림에서 $m=n$일 때)

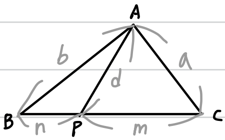
$a^2+b^2=2(m^2+d^2)$

5. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin x<x<\tan x$

(삼각함수의 그래프가 직접 주어졌을 때 쓸 만한 정보)

(해설) 삼각함수

4. 스튜어트정리



$$mb^2+na^2=(m+n)(mn+d^2)$$

i) 중선정리 : 위 그림에서 $m=n$인 상황

$$m^2(a^2+b^2)=2m(m^2+d^2)$$

ii) 각이등분선 : $a:b=m:n$ 인 상황

→ $m=ak$, $n=bk$라 하자.

$$(ak)\times b^2+(bk)\times a^2=(ak+bk)\times(abk^2+d^2)$$

$$d^2=ab-abk^2$$

(교과 내 과정으로 풀려면 cos법칙으로 풀면 됨)

(요약) 수열

1 . $a_n = S_n - S_{n-1}$

→ n이 1부터 성립하려면 $S_0 = 0$

2. 점화식 [$S_{n+1} - S_n$ or $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 의 형태
주어진 식 자체를 변형

3. 등차수열에서 S_n 이 주어졌을때 a_n 빠르게 구하기

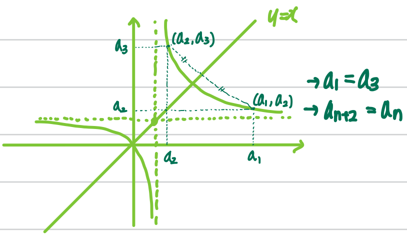
$$a_n = (S_n)' - \frac{1}{2}d$$

4. $a_{n+p} = f(a_n)$, $f(x) = f^{-1}(x)$

→ 주기가 2p형태의 수열. ($\because$ $a_n = f(a_{n+p}) = a_{n+2p}$)

ex) $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $a_1 = 1$

$f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f(f(x)) = x$ (점근선의 교점이 $y=x$ 위에있음)

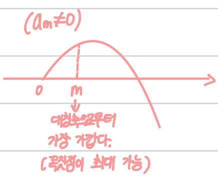


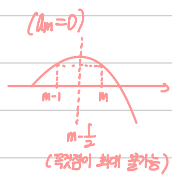
→ $a_1 = a_3$
→ $a_{n+2} = a_n$

5. 등차수열 합 분석

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

1) $a>0$, $d<0$





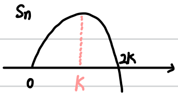
2) $a<0$, $d<0$

6. 등차수열 합 분석 심화

등차수열 a_n, 그 합 S_n이 있을 때

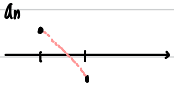
$S_n = an(n-k)$라 하자.

① k가 짝수



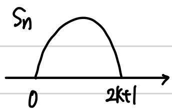
최대) 유일하게 존재

나머지 전부 대칭



부호 반대, 함숫값 대칭

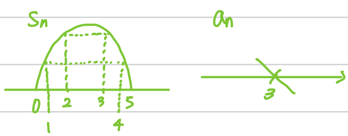
② k가 홀수



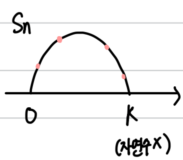
최대) 유일하지 않음.

나머지 전부 대칭

ex)



③ k가 이상한 숫자



→ 대칭 X

$a_n \neq 0$

부호 반대, 절댓값 다름

7. 수열을 그래프로 분석하기

a_{n+1}이 a_n에 관한 식으로만 표현되어 있을 때, $a_{n+1} = f(a_n)$이라 생각해 그래프로 그려보기.

단, 식에 'n'이 포함되어 있으면 이 풀이는 적합하지 않음.

(수열의 경향 파악할 때도 효과적임)

8. 수열의 귀납적 추론

'나열'은 귀찮아도 계속 해본다는 마인드 가지기.

나열
- i) 기준이 되는 항을 알고 있는 경우 → 당연히 나열
- ii) 기준이 되는 항을 모르는 경우 → 수열의 규칙성 / 경향성을 파악해보기 위해 임의의 숫자를 대입해 하나쯤 나열해보는 것도 나쁘지 않음.

수열 관찰
- i) 나열할 때 '각 항'의 범위
- ii) 주어진 조건에서 나올 수 있는 범위 관찰

ex) $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1 & (a_n \geq k) \\ \sim & (a_n < k) \end{cases}$ 인 경우 $a_n \geq k$에서 나올 수 있는 a_{n+1}의 범위는

$a_{n+1} \geq 2k+1$ 이다.

즉, 어떤 항에 대해 $a_{n+1} < 2k+1$ 이었다면, 그때의 a_n은 아래쪽 식을 통해 구해야 함.

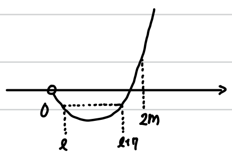
5, 6 등차수열 합 분석 - 관련문제 (2022 수특 , 문항번호 21008 - 0156)

첫째항이 -30이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. d와 S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) d는 $3 < d < 30$인 자연수이다.
(나) $|S_l| = |S_{l+7}| = |S_m|$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 l, m이 존재한다.

$a_l + a_{l+7} + a_m$의 값을 구하시오. (단, $m > l+7$) 35

S_n의 그래프를 그려보자.



→ S_n의 대칭축이 $l+\frac{7}{2}$ 이므로,

$S_n = \frac{d}{2} n\{n-(2l+7)\}$ 이라고 할 수 있다.

→ $S_1 = \frac{d}{2}(-2l-6) = -30$ 이므로 $d(l+3) = 30$ 이다.

d와 l은 모두 자연수이므로, 이때 가능한 (d, l)의 순서쌍은 $(5, 3)$, $(6, 2)$가 있다.

i) $d=5$, $l=3$

$S_n = \frac{5}{2} n(n-13)$

$S_3 = -75$, $S_m = \frac{5}{2} \times m \times (m-13) = 75$.

이때 $m = 15$

ii) $d=6$, $l=2$

$S_n = 3n(n-11)$

$S_2 = -54$, $S_m = 3m(m-11) = 54$.

이를 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

$\therefore$ $a_1 = -30$, $d = 5$

$a_l = a_3 = -20$

$a_{l+7} = a_{10} = 15$

$a_m = a_{15} = 40$

7. 수열을 그래프로 분석하기 - 관련 기출 (22학년도 9평 15번)

그래프로 그리면 역추적 할 때 직관적으로 이해하는 것에 도움이 될 것이다.

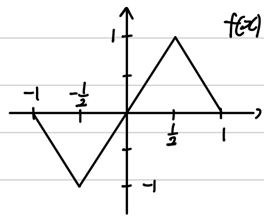
15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

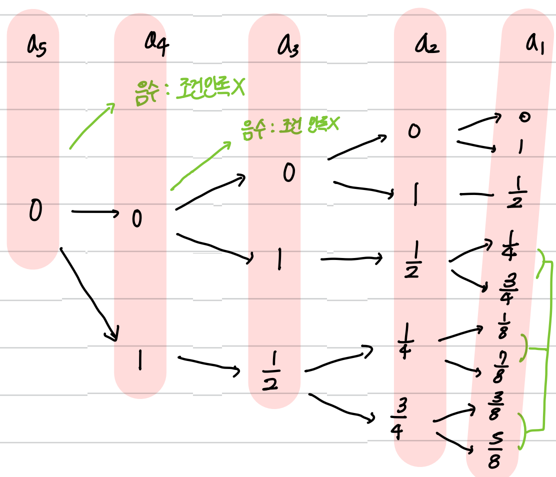
① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\frac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$



역추적하며 a_{n+1}이 한 번이라도 음수가 나오면 이후 a_n은 계속 음수, a_{n+1}이 양수가 나오면 이후 a_n은 계속 양수이다.

$a_6 = -a_5 \Rightarrow f(a_5) = -a_5$: a_5는 $f(x)$와 $y=-x$의 교점 $\Rightarrow \therefore a_5 = 0$



각 항 안 구하고 대칭성 이용해 2개 합 1이다 라고 해도 됨.

$\therefore$ 가능한 a_1의 합은 $1 \times 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

8. 수열의 귀납적 추론 - 관련기출 (2023 시행 고3 4월 15번)

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

④

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

$a_{n+1} = f(a_n)$으로 표현하기 애매해서 그래프 안 그림

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

주어진 수열을 관찰해보자.

$a_n < 1 \rightarrow a_{n+1} > 0$ / a_{n+1}은 a_n과 별개로 확정

$a_n \geq 1 \rightarrow a_{n+1} = \log_2 a_n \geq 0$

즉, $n \geq 2$인 모든 n에 대하여 $\boxed{a_n \geq 0}$이다.

a_5의 범위에 따라 (나) 조건을 살펴보자

i) $a_5 < 1 \Rightarrow a_6 = 8$

이 경우 $a_5 = -7$이라 불가능하다.

ii) $a_5 \geq 1 \Rightarrow a_6 = \log_2 a_5$

$a_5 + \log_2 a_5 = 1$

→ 이를 만족시키는 $\boxed{a_5 = 1}$, $\boxed{a_6 = 0}$이다.

이제 역추적을 해 보자.

$a_4 < 1 \rightarrow a_5 = 2^2$ (X)

$a_4 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_4 = 1 \rightarrow \boxed{a_4 = 2}$

$\boxed{a_3 < 1} \rightarrow a_4 = 2^1$

$a_3 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_3 = 2 \rightarrow \boxed{a_3 = 4}$

i) $\boxed{a_3 < 1}$

$a_2 < 1 \rightarrow a_3 = 2^0 = 1$ (X) ($a_3 < 1$ 이용)

$a_2 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_2 = a_3 \rightarrow a_2 = 2^{a_3} \rightarrow \boxed{1 \leq a_2 < 2}$

$a_1 < 1 \rightarrow a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (X)

$a_1 \geq 1 \rightarrow a_2 = \log_2 a_1 \rightarrow 1 \leq \log_2 a_1 < 2$

$\boxed{2 \leq a_1 < 4}$

ii) $\boxed{a_3 = 4}$

$a_2 < 1 \rightarrow a_3 = 2^0 = 1$ (X)

$a_2 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_2 = 4 \rightarrow \boxed{a_2 = 16}$

$a_1 < 1 \rightarrow a_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ (X)

$a_1 \geq 1 \rightarrow \log_2 a_1 = 16 \rightarrow \boxed{a_1 = 2^{16}}$

$\therefore\ 2 \leq a_1 < 4$ or $a_1 = 2^{16}$

$m = 2,\ M = 2^{16}$

$\log_2 \frac{M}{m} = 15$