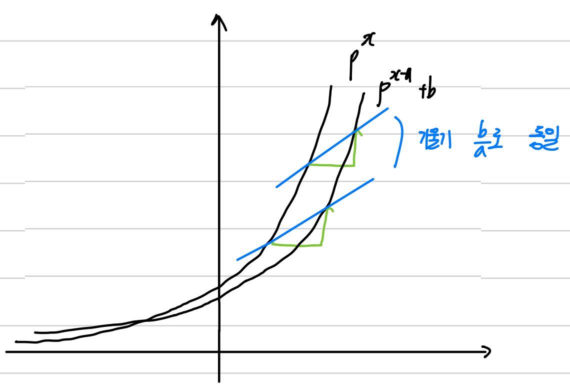
(요약) 지수함수와 로그함수

1. 지수로그함수 활용에서, 주어진 함수의 식에 a, b, k등 문자가 포함된 경우, $\log_a k$ 등의 복잡한 형태로 좌표를 일일히 설정하는 것보다 길이관계를 먼저 구하고 $\log_a k$등을 간단한 문자로 치환해 푸는게 더 간단한 경우가 많다.
   i) 길이관계 구하기
   ii) 복잡한 좌표를 간단한 문자로 치환해 좌표 설정하기 (이때 치환한 문자의 수가 문제에서 주어진 문자의 수보다 많아지면 안 됨.)
   iii) i의 정보를 이용해 치환한 문자의 값 구하기
   iv) 문제에서 물어본 정보 구하기
   (무조건 이 순서로 풀어라! 이건 아니지만, 문제에서 문자로 주는 값이 많아질수록 복잡한 좌표를 치환하는 게 중요해짐.)

2. 지수로그함수 ㄱㄴㄷ 문제에서 고려해봐야 하는 것.
   i) 교점의 x좌표의 범위를 물어본 경우 → 교점 주위에서 함숫값의 대소관계가 바뀐다는 점 이용
   ii) (주로 ㄷ 에서) 이상한 형태의 부등식을 물어볼 때 고려해야 하는 것.
   - 길이 ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$)
   - 기울기 (원점 - 주어진 좌표 ($\frac{y_1}{x_1}$)아 주어진 좌표 - 주어진좌표)
   - 넓이 ($x_1 \times y_1$)
   - 대칭성

3. 지수로그함수를 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 점을 이어보면 항상 기울기가 $\frac{b}{a}$이다.



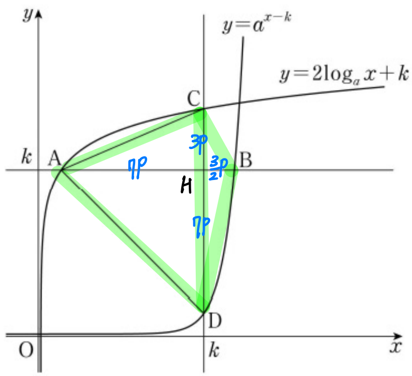
(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우를 조심하자. 이 경우 기울기는 $\frac{b}{a}$가 아니다.)

(해설) 지수함수와 로그함수

1. 복잡한 지수로그함수 활용 - 관련기출 (2023년 시행 고3 3월 21번)

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]

12



$[\square ADBC] = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD} = \frac{85}{2}$

$[\triangle CAD] = 35 \rightarrow [\triangle BCD] = \frac{15}{2}$

$\therefore \overline{AH} : \overline{BH} = 7 : \frac{3}{2}$ → $\overline{AH}=7p$, $\overline{BH}=\frac{3}{2}p$ (p라는 새로운 좌표 설정)

$\overline{AH} = k-1$ (H와 A의 x좌표 직접 구해서 구함)
$\overline{DH} = k-1$ (H와 D의 x좌표 직접 구해서 구함)
$\rightarrow \overline{AH} = \overline{DH} = 7p$

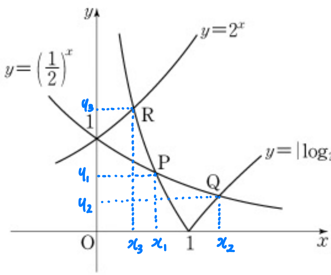
$\overline{BH} = \log_a k$ (직접 좌표구해서 구함)
$\overline{CH} = 2\log_a k$ (직접 좌표구해서 구함)
$\rightarrow \overline{BH} : \overline{CH} = 1:2 \rightarrow \overline{CH} = 3p$

$[\triangle CAD] = \frac{1}{2}\times 10p\times 7p = 35p^2 = 35 \quad \therefore p=1$

$A(1,k) \rightarrow B(1+\frac{17}{2}p, k) = B(\frac{19}{2}, k) \Rightarrow a^{\frac{19}{2}-k} = k \Rightarrow \log_a k = \frac{19}{2}-k$
$D(k,1) \rightarrow C(k, 1+10p) = C(k, 11) \Rightarrow 2\log_a k = 11-k$
$\rightarrow k=8, a=4$

2. 지수로그함수 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문항 - 관련기출 (11학년도 수능 16번 (나))

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] 3



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1-1) > y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

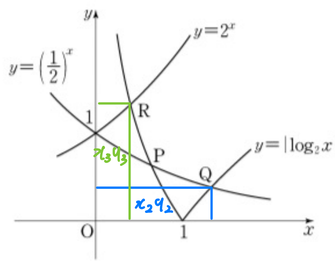
ㄱ 함숫값 대소관계 교차를 이용한 간접비교

$x_1 < 1$: 눈으로 확인 가능

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left|\log_2 \frac{1}{2}\right|$

$\rightarrow x_1 > \frac{1}{2}$

ㄴ $x_2y_2,\ x_3y_3$: 직사각형의 넓이



→ 대소비교가 아니라 정확히 '같음'을 보여야 하기 때문

하지만 이 선지에서는 '역함수'의 '대칭성'이 더 중요!

$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} = \log_2 x_2$ → x_2는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$의 실근

$y_3 = 2^{x_3} = -\log_2 x_3$

$x_3 = \log_2 y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y_3}$ → y_3은 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$의 실근

$\therefore x_2 = y_3 \rightarrow y_2 = x_3$

$\therefore x_2y_2 = x_3y_3$

ㄷ. 기울기로 해석

$x_1 - 1 < 0$ 이라서 부등호 방향 바뀜

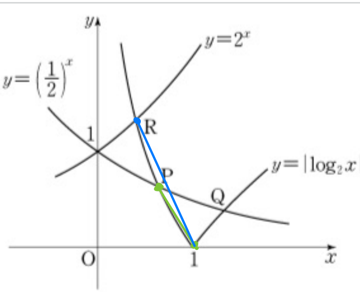
$$\frac{x_2}{y_2-1} < \frac{y_1}{x_1-1}$$

ㄴ에서 찾은 R,Q 대칭성 이용

$$\frac{y_3}{x_3-1} < \frac{y_1}{x_1-1}$$

(x_3, y_3) (x_1, y_1)

$(1, 0)$ $(1, 0)$



$\frac{y_3}{x_3-1} > \frac{y_1}{x_1-1}$ 이므로 거짓.

3. 지수로그함수와 기울기

함수 $f(x)$에 대하여 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동 시킨 함수 $f(x-a)+b$를 생각해보자.

$f(x)$ 위의 점 (x, y)에 대하여, 위 규칙에 따라 평행이동시키면 $(x+a, y+b)$라는 점이 나온다.

→ 이 두 점의 기울기 $= \dfrac{(y+b)-y}{(x+a)-x} = \dfrac{b}{a}$

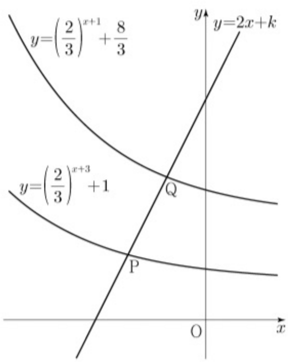
평행이동 관계에 있지 않은 두 점에 대해서는 성립하지 않음. - 관련기출(22학년도 수능 9번)

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

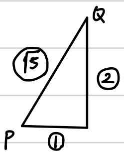
$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점] 4

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ V ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



P와 Q는 평행이동 관계에 있는 두 점이 아님!



PQ의 기울기로 x좌표 차이와 y좌표 차이 찾기

점 P의 좌표를 $\left(p, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1\right)$이라 하면,
점 Q의 좌표는 $\left(p+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3\right)$.

→ $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

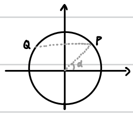
→ $p=-2$ → $P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

∴ $k=\frac{17}{3}$

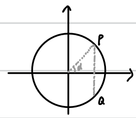
(요약) 삼각함수

1. 삼각방정식

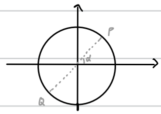
$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow$
- $\beta-\alpha = 2n\pi$ (두 동경 일치)
- $\beta+\alpha = (2n+1)\pi$ (y축 대칭)



$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow$
- $\beta-\alpha = 2n\pi$ (두 동경 일치)
- $\beta+\alpha = 2n\pi$ (x축 대칭)

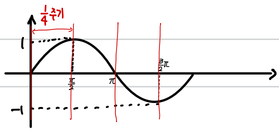


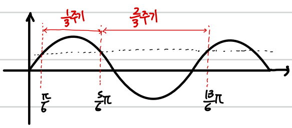
$\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow$
- $\beta-\alpha = 2n\pi$ (두 동경 일치)
- $\beta-\alpha = (2n+1)\pi$ (원점 대칭)



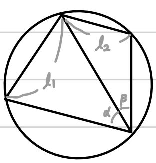
$\tan\alpha$: $\overline{OP}$의 기울기
$\tan\beta$: $\overline{OQ}$의 기울기
→ O, P, Q 한 직선

2. 삼각함수 그래프의 비율관계 ($\sin x$ 기준)

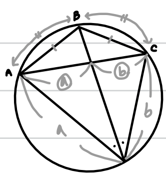


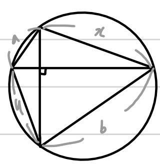


3. 도형 관련 여러 성질



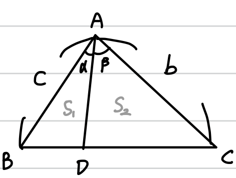
$l_1 : l_2 = \sin\alpha : \sin\beta$





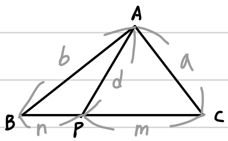
$a^2+b^2 = x^2+y^2 = 4R^2$

(반지름 : R)



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{b\cdot\sin\beta}$$

4. 스튜어트정리



$mb^2+na^2=(m+n)(mn+d^2)$

(위 그림에서 $m=n$일 때)

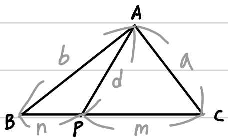
$a^2+b^2=2(m^2+d^2)$

5. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $0<\sin x<x<\tan x$

(삼각함수의 그래프가 직접 주어졌을 때 쓸 만한 정보)

(해설) 삼각함수

4. 스튜어트정리



$$mb^2+na^2=(m+n)(mn+d^2)$$

i) 중선정리 : 위 그림에서 $m=n$인 상황

$$m^2(a^2+b^2)=2m(m^2+d^2)$$

ii) 각이등분선 : $a:b=m:n$ 인 상황

→ $m=ak$, $n=bk$ 라 하자.

$$(ak)\times b^2+(bk)\times a^2=(ak+bk)\times(abk^2+d^2)$$

$$d^2=ab-abk^2$$

(교과 내 과정으로 풀려면 cos법칙으로 풀면 됨)