6. max, min 함수 → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \leq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 큰 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 작은 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

7. 가우스함수 (최대 정수 함수)

$[x]$: x 이하의 정수 중 가장 큰 정수

$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$

* 가우스함수를 정수 개수 세는 식에 활용하기. → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

ex) 자연수 n에 대해,

$2n-\sqrt{4n^2+n} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자.

$$\rightarrow a_n = \underbrace{2[\sqrt{4n^2+n}]}_{\substack{\text{양수부분 정수개수} \\ +\text{음수부분 정수개수}}} + \underbrace{1}_{0\text{개수}}$$

3. $f(x)=t$의 실근 $g(t)$ ⟺ f와 g는 역함수관계

설명) $f(x)=t$ 라는 x에 관한 식의 실근이 $g(t)$라 했으므로,

x자리에 $g(t)$를 대입하면

$f(g(t))=t$.

이 식을 t에 관한 식으로 해석하면 f와 g는 역함수 관계임을 알 수 있다.

6. max 함수 - 관련기출 (13학년도 6평 21번 (가))

설명) max, min 함수는 표기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 딱히 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

21. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

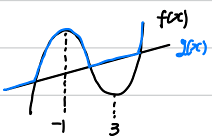
라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점] 2

① -14 V ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

$g(x)=\max\{f(x),\ mx\}$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

mx를 아무렇게나 잡아보며 상황을 파악해보자.



→ 이 경우, $g(x)$는 $f(x)$와 mx의 교점에서 미분불가능하다.

→ $f(x)-mx=(x-\square)^3$ 형태일 때 모든 교점에서 미분가능함.

$f(x)$의 세 근의 합이 3이므로, $f(x)-mx=(x-1)^3$

→ $m=-12$.

\# $\max\{f(x),\ mx\}=\dfrac{f(x)+mx}{2}+\dfrac{|f(x)-mx|}{2}$ 이므로, $f(x)$와 mx의 '접하지 않는' 교점이 미분불가능점이라고 수식적 이해 가능

\# mx는 $f(x)$의 변곡접선.

연연하지않고 이연

6. min 함수 - 관련기출 (17학년도 9평 21번 (나))

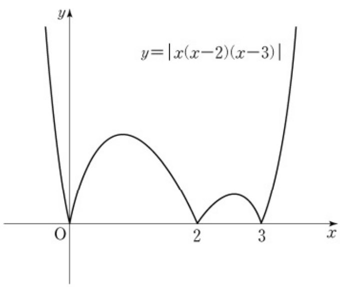
설명) max, min 함수는 풀기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 딱히 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점] ②

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



편의상 $h(x)=|x(x-2)(x-3)|$ 이라 하겠다.

(가) $f(x)$ → $x=0$ or $x=2$ or $x=3$에서 중근을 가져야 함.

(나) $g(x)=\min\{f(x), h(x)\}$

0, 2, 3 중 중근을 α, 중근이 아닌 두 근을 β, γ라 하자. $(\beta<\gamma)$

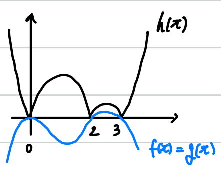
만약 $\beta\le x\le\gamma$ 에서 $f(x)$가 $h(x)$보다 커진다면, $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 f와 h는 접해야 함 (∵ g의 식이 바뀌는 경계가 되기 때문)

→ f와 h는 $x=\alpha$에서 교점이 생기고 (h f) $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 접해야 함. 그런데 f는 4차, h의 원형은 3차이기 때문에, 4차함수와 3차함수가 교점 1개 + 접점 2개를 갖는다는 것은 불가능. (주어진 상황대로 하면 $f-h$의 원형이 최소 $(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$을 가져야 하므로 4차를 넘어감)

∴ $\beta\le x\le\gamma$에서 $f(x)\le h(x)$ → 이 범위에서 $g(x)=f(x)$.

> 교점 2개 + 접점 1개는 가능하기 때문에, 밑에서 미분계수로 식 세울 때 등호가 들어감

i) $f(x)=px^2(x-2)(x-3)$

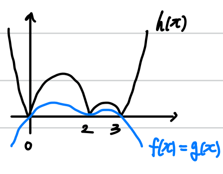


이 경우 $f'(2)\le$ (h의 $x=2$에서의 우미분계수)

$-4p\le 2$ → $0>p\ge-\frac{1}{2}$

$f(1)=2p$ → $0>2p\ge-1$

ii) $f(x)=px(x-2)^2(x-3)$



$f'(0)\le$ (h의 $x=0$에서의 우미분계수)

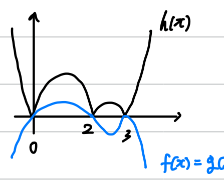
$f'(3)\ge$ (h의 $x=3$에서의 좌미분계수)

$-12p\le 6$

$3p\ge-3$) $0>p\ge-\frac{1}{2}$

$f(1)=-2p$ → $1\ge-2p>0$

iii) $f(x)=px(x-2)(x-3)^2$



$f'(0)\le$ (h의 $x=0$에서의 우미분계수)

$f'(2)\ge$ (h의 $x=2$에서의 좌미분계수)

$-18p\le 6$

$2p\ge-2$) $p\ge-\frac{1}{3}$

$f(1)=-4p$ → $-4p\le\frac{4}{3}$

∴ $f(1)$의 최댓값 $=\frac{4}{3}$

7. 가우스함수 표기를 이용한 개수세기 – 관련 기출 (2023년 시행 3월 모의고사 미적 29번)

설명) 가우스함수 표기를 이용한 개수세기는 풀이에 직접적인 영향을 미치지는 않는다.

다만, 개수를 셀 때 '실수'를 안 하는게 매우 중요한데, 가우스함수로 표현해놓으면 실수할 여지는 줄어드는 듯 하다.

29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점] 50

$2n-\sqrt{4n^2+n} < x < 2n+\sqrt{4n^2+n}$

$a_n = 2\underbrace{[\sqrt{4n^2+n}]}_{\text{양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수}} + 1$

0도 정수이기 때문에 1개 더해줘야 함.

$(2n)^2 < 4n^2+n < (2n+1)^2$

$\rightarrow a_n = 2\times 2n + 1$

$= 4n+1$

$$(\text{주어진 극한}) = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n-p^2n^2}{\sqrt{na_n}+pn} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn} = \frac{1}{2+p} = q$$

$\hookrightarrow p=2$

$\hookrightarrow q=\frac{1}{4}$

$\therefore 100pq = 50$