+ ×

작성자 : 연연하지말고 이연

− ÷

# 수학

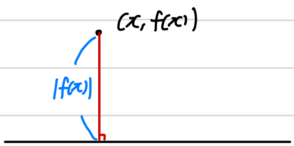
## 요약

1. $x=a$ 선대칭 X $(a,b)$ 점대칭 $=?$
   $x=a$ 선대칭 X $(a,0)$ 점대칭 $=(a,0)$ 점대칭

2. $f(x)$ : 기함수 & 감소함수 일 때,
   $f(x)=f^{-1}(x) \iff f(x)=-x$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ $\iff$ $f$와 $g$는 역함수관계

4. $|f(x)|$의 해석 방법 → $x$축까지의 거리




5. 절댓값 부등식

$|x|+|y| \ge |x+y|$ (등호 : $xy \ge 0$ 일 때 성립)

ex) $\sum_{n=1}^{10}|a_n| = \left|\sum_{n=1}^{10}a_n\right|$ → $a_1 \sim a_{10}$ 부호동일

$\sum_{n=1}^{10}|a_n|+|b_n| = \sum_{n=1}^{10}|a_n+b_n|$ → $a_nb_n \ge 0$

$(xy<0) \Rightarrow |x|+|y| > |x+y|$

$$|x|+|y|-|x+y| = 2\times\min\{|x|,|y|\}$$

ex) $|3|+|-1|-|3+(-1)| = 2\times\min\{|3|,|-1|\}$
$= 2$

$|x+y| \ge |x|-|y|$ (등호 : $\underbrace{(x+y)\times y \le 0}$ 일 때 성립)

→ $|x|>|y|$ 포함 조건

$y>0 \to (x+y)\times ⊕ \le 0$

$y<0 \to (x+y)\times ⊖ \le 0$

$\iff \underbrace{|x+y|}_{=a}+\underbrace{|-y|}_{=b} \ge |x|$ 라 하면

$|a|+|b| \ge |a+b|$

ex) $\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k| = \sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

→ $|a_k+b_k| = |a_k|-|b_k|$

→ $(a_k+b_k)\times b_k \le 0$

연연하지말고 이연

6. max, min 함수 → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \ge g(x)) \\ g(x) & (f(x) \le g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 큰 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \le g(x)) \\ g(x) & (f(x) \ge g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 작은 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

7. 가우스함수 (최대 정수 함수)

$[x]$ : $x$ 이하의 정수 중 가장 큰 정수

$n \le x < n+1 \rightarrow [x] = n$

* 가우스함수를 정수 개수 세는 식에 활용하기. → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

ex) 자연수 $n$에 대해,

$2n - \sqrt{4n^2+n} < x < 2n + \sqrt{4n^2+n}$ 을 만족시키는 정수 $x$의 개수를 $a_n$이라 하자.

$$\rightarrow a_n = \underbrace{2\left[\sqrt{4n^2+n}\right]}_{\text{양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수}} + \underbrace{1}_{\text{0 개수}}$$

해설

1. 점대칭함수와 선대칭함수의 곱

i) $x=a$ 선대칭 × $(a,0)$ 점대칭 → $(a,0)$ 점대칭

증명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=0$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x)=f(x)\times g(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)\times g(x) \\ &= f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\} \\ &= -f(2a-x)\times g(2a-x) \\ &= -h(2a-x) \end{aligned}$$

→ $h(x)+h(2a-x)=0$ 이므로,

$h(x)$는 $(a,0)$ 점대칭이다.

ii) $x=a$ 선대칭 × $(a,b)$ 점대칭 → 직접 살펴봐야 함

설명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=2b$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x)=f(x)\times g(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)\times g(x) \\ &= f(2a-x)\times\{2b-g(2a-x)\} \\ &= f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\}+2bf(2a-x) \\ &= -h(2a-x)+2bf(2a-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x)+h(2a-x) &= 2bf(2a-x) \\ &= 2bf(x) \end{aligned}$$

→ 정리하니 별 의미 없는 식이 나왔다.

이런 경우가 나오면, 직접 살펴보자.

* $h(x)+h(2a-x)$ : $x=a$ 대칭 ($h(x)$, $h(2a-x)$ 각각은 $x=a$ 대칭인지 알 수 없음)

$2bf(x)$ : $x=a$ 대칭

→ 별 의미 없다.

## 2. f(x)와 그 역함수의 교점 - 관련 기출(2021년 시행 고3 10월 이적 30번)

**30.** 서로 다른 두 양수 $a$, $b$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$ 감소 & 기함수

라 하자. 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x) \neq 0$이고, 두 함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $g(2) = h(0)$ |
| (나) $g'(2) = -5h'(2)$ |

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점] 10

(가) $g(2) = f(2) - f^{-1}(2)$

$h(0) = g(f(0)) = g(0) = f(0) - f^{-1}(0) = 0$

$\rightarrow f(2) = f^{-1}(2)$

이때, f(x)는 기함수이자 감소함수이기 때문에, (2,-2)와 (-2,2)를 지난다는 점을 알 수 있다.

(여기서 (2,2) 지난다고 풀면 큰일납니다!)

$\rightarrow 4a+b = 5$ ((2,-2) 대입하고 정리함.)

(나) $g'(2) = f'(2) - \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = f'(2) - \dfrac{1}{f'(-2)} = f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)}$ (f(x)가 기함수 → f'(x)는 우함수)

$h'(2) = g'(f(2)) \times f'(2)$

$= g'(-2) \times f'(2)$

$\rightarrow f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)} = -5f'(2) \times \{f'(2) - 1\}$

$5\{f'(2)\}^3 + \{f'(2)\}^2 - 5f'(2) - 1 = 0$

$(5f'(2)+1)(f'(2)-1)(f'(2)+1) = 0 \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{5}$ or $f'(2) = -1$

$\rightarrow f'(x) = -\dfrac{ax^4 + (3a-b)x^2 + b}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(2) = -\dfrac{28a-3b}{25}$

만약 $f'(2) = -1$이라면 $a=1, b=1$. (서로 다른 두 양수라는 조건에 모순)

$\therefore f'(2) = -\frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$

$\rightarrow 4(b-a) = 12 - 2 = 10$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ ⟺ $f$와 $g$는 역함수관계

설명) $f(x)=t$ 라는 $x$에 관한 식의 실근이 $g(t)$라 했으므로,

$x$자리에 $g(t)$를 대입하면

$f(g(t))=t$.

이 식을 $t$에 관한 식으로 해석하면 $f$와 $g$는 역함수 관계임을 알 수 있다.

6. max 함수 - 관련기출 (13학년도 6평 21번 (가))

설명) max, min 함수는 표기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 역시 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

21. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 $m$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

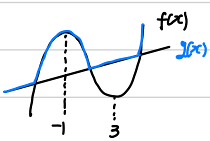
라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $m$의 값은? [4점] 2

① $-14$ ② $-12$ ③ $-10$ ④ $-8$ ⑤ $-6$

$g(x)=\max\{f(x), mx\}$

$f'(x)=3x^2-6x-9 = 3(x-3)(x+1)$

$mx$를 아무렇게나 잡아와서 상황을 파악해보자.




→ 이 경우, $g(x)$는 $f(x)$와 $mx$의 교점에서 미분불가능하다.

→ $f(x)-mx = (x-\square)^3$ 형태일 때 모든 교점에서 미분가능함.

$f(x)$의 세 근의 합이 3이므로, $f(x)-mx=(x-1)^3$

→ $m=-12$.

# $\max\{f(x), mx\} = \dfrac{f(x)+mx}{2} + \dfrac{|f(x)-mx|}{2}$ 이므로, $f(x)$와 $mx$의 '접하지 않는' 교점이 미분불가능점이라고 수식적 이해 가능

# $mx$는 $f(x)$의 변곡접선.

6. min 함수 - 관련기출 (17학년도 9평 21번 (나))

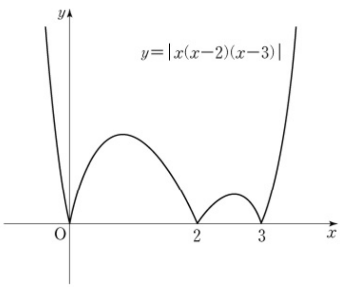
설명) max, min 함수는 표기의 명료함, 직관적 이해 등에만 도움을 주지, 문제를 풀 때는 딱히 큰 역할을 하지 않는다.

모르더라도 문제푸는데 큰 지장은 없지만, 그래도 알아두어서 나쁠건 없으니... 알아두자.

**21.** 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점] ②

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 $x$에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$




편의상 $h(x) = |x(x-2)(x-3)|$ 이라 하겠다.

(가) $f(x)$ → $x=0$ or $x=2$ or $x=3$에서 중근을 가져야 함.

(나) $g(x) = \min\{f(x), h(x)\}$

0, 2, 3 중 중근을 $\alpha$, 중근이 아닌 두 근을 $\beta, \gamma$라 하자. $(\beta<\gamma)$

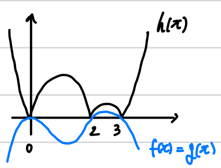
만약 $\beta \le x \le \gamma$ 에서 $f(x)$가 $h(x)$보다 커진다면, $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 $f$와 $h$는 접해야 함 (∵ $g$의 식이 바뀌는 경계가 되기 때문)

→ $f$와 $h$는 $x=\alpha$에서 교점이 생기고 ( ) $x=\beta$와 $x=\gamma$에서 접해야 함. 그런데 $f$는 4차, $h$의 원형은 3차이기 때문에, 4차함수와 3차함수가 교점 1개 + 접점 2개를 갖는다는 것은 불가능. (주어진 상황대로 하면 $f-h$의 원형이 최소 $(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$을 가져야 하므로 4차를 넘어감)

∴ $\beta \le x \le \gamma$ 에서 $f(x) \le h(x)$ → 이 범위에서 $g(x) = f(x)$.

교점 2개 + 접점 1개는 가능하기 때문에, 밑에서 미분계수로 식 세울 때 등호가 들어감

i) $f(x) = px^2(x-2)(x-3)$

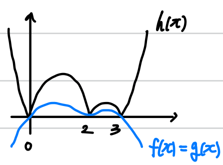



이 경우 $f'(2) \le$ ($h$의 $x=2$에서의 우미분계수)

$-4p \le 2$ → $0 > p \ge -\frac{1}{2}$

$f(1) = 2p$ → $0 > 2p \ge -1$

ii) $f(x) = px(x-2)^2(x-3)$




$f'(0) \le$ ($h$의 $x=0$에서의 우미분계수)

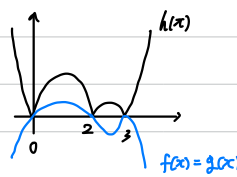
$f'(3) \ge$ ($h$의 $x=3$에서의 좌미분계수)

$-12p \le 6$

$3p \ge -3$ ) $0 > p \ge -\frac{1}{2}$

$f(1) = -2p$ → $1 \ge -2p > 0$

iii) $f(x) = px(x-2)(x-3)^2$




$f'(0) \le$ ($h$의 $x=0$에서의 우미분계수)

$f'(2) \ge$ ($h$의 $x=2$에서의 좌미분계수)

$-18p \le 6$

$2p \ge -2$ ) $p \ge -\frac{1}{3}$

$f(1) = -4p$ → $-4p \le \frac{4}{3}$

∴ $f(1)$의 최댓값 $= \frac{4}{3}$

7. 가우스함수 표기를 이용한 개수세기 – 관련 기출 ( 2023년 시행 3월 모의고사 미적 29번)

설명) 가우스함수 표기를 이용한 개수세기는 풀이에 직접적인 영향을 미치지는 않는다.

다만, 개수를 셀 때 '실수'를 안 하는게 매우 중요한데, 가우스함수로 표현해놓으면 실수할 여지는 줄어드는 듯 하다.

**29.** 자연수 $n$에 대하여 $x$에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 $x$의 개수를 $a_n$이라 하자. 두 상수 $p$, $q$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점] 50

$$2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$$

$$a_n=\underbrace{2\left[\sqrt{4n^2+n}\right]}_{\text{양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수}}+\underbrace{1}_{\text{0도 정수이기 때문에 1개 더해줘야 함.}}$$

$$(2n)^2<4n^2+n<(2n+1)^2$$

$$\rightarrow a_n=2\times 2n+1$$
$$=4n+1$$

$$(\text{주어진 극한})=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-p^2n^2}{\sqrt{na_n}+pn}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+pn}=\frac{1}{2+p}=q$$

↳ $p=2$

↳ $q=\frac{1}{4}$

$\therefore 100pq=50$