+ ×

작성자 : 연연하지말고 이연

− ÷

수학

요약

1\. $x=a$ 선대칭 X (a,b) 점대칭 $= ?$

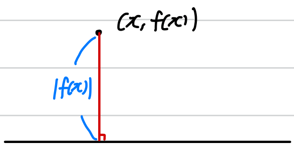
$x=a$ 선대칭 X $(a,0)$ 점대칭 $=$ $(a,0)$ 점대칭

2\. $f(x)$: 기함수 & 감소함수 일 때,

$f(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) = -x$

3\. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ $\leftrightarrow$ f와 g는 역함수관계

4\. $|f(x)|$의 해석 방법 $\rightarrow$ x축까지의 거리



5\. 절댓값 부등식

$|x|+|y| \geq |x+y|$ (등호 : $xy \geq 0$ 일 때 성립)

ex) $\sum_{n=1}^{10} |a_n| = |\sum_{n=1}^{10} a_n|$ $\rightarrow$ $a_1 \sim a_{10}$ 부호동일

$\sum_{n=1}^{10} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{10} |a_n + b_n|$ $\rightarrow$ $a_n b_n \geq 0$

$(xy < 0) \Rightarrow |x|+|y| > |x+y|$

$|x|+|y|-|x+y| = 2 \times \min\{|x|, |y|\}$

ex) $|3|+|-1|-|3+(-1)| = 2 \times \min\{|3|, |-1|\}$

$= 2$

$|x+y| \geq |x|-|y|$ (등호 : $\underbrace{(x+y) \times y \leq 0}$ 일 때 성립)

$\hookrightarrow$ $|x|>|y|$ 포함 조건

$y>0 \rightarrow (x+y) \times ⊕ \leq 0$

$y<0 \rightarrow (x+y) \times ⊖ \leq 0$

$\iff \underbrace{|x+y|}_{=a} + \underbrace{|-y|}_{=b} \geq |x|$ 라 하면

$|a| + |b| \geq |a+b|$

ex) $\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| = \sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|)$

$\rightarrow |a_k + b_k| = |a_k| - |b_k|$

$\rightarrow (a_k + b_k) \times b_k \leq 0$

해설

1. 점대칭함수와 선대칭함수의 곱

i) $x=a$ 선대칭 × $(a,0)$ 점대칭 → $(a,0)$ 점대칭

증명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=0$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x)=f(x)\times g(x)$라 하자.

$h(x)=f(x)\times g(x)$

$=f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\}$

$=-f(2a-x)\times g(2a-x)$

$=-h(2a-x)$

→ $h(x)+h(2a-x)=0$ 이므로,

$h(x)$는 $(a,0)$ 점대칭이다.

ii) $x=a$ 선대칭 × (a,b) 점대칭 → 직접 살펴봐야 함

설명) $f(x)=f(2a-x)$ 인 함수 $f(x)$와,

$g(x)+g(2a-x)=2b$인 함수 $g(x)$가 있다.

$h(x)=f(x)\times g(x)$라 하자.

$h(x)=f(x)\times g(x)$

$=f(2a-x)\times\{2b-g(2a-x)\}$

$=f(2a-x)\times\{-g(2a-x)\}+2bf(2a-x)$

$=-h(2a-x)+2bf(2a-x)$

$h(x)+h(2a-x)=2bf(2a-x)$

$=2bf(x)$

→ 정리하니 별 의미 없는 식이 나왔다.

이런 경우가 나오면, 직접 살펴보자.

* $h(x)+h(2a-x)$: $x=a$ 대칭 ($h(x)$, $h(2a-x)$ 각각은 $x=a$ 대칭인지 알 수 없음)

$2bf(x)$: $x=a$ 대칭

→ 별 의미 없다.

2. $f(x)$와 그 역함수의 교점 – 관련 기출(2021년 시행 고3 10월 미적 30번)

30. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$ 감소 & 기함수

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$이고, 두 함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2) = h(0)$
(나) $g'(2) = -5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점] 10

(가) $g(2) = f(2) - f^{-1}(2)$

$h(0) = g(f(0)) = g(0) = f(0) - f^{-1}(0) = 0$

$\rightarrow f(2) = f^{-1}(2)$

이때, $f(x)$는 기함수이자 감소함수이기 때문에, $(2,-2)$와 $(-2,2)$를 지난다는 점을 알 수 있다.

(여기서 $(2,2)$ 지난다고 풀면 큰일납니다!)

$\rightarrow 4a+b=5$ ($(2,-2)$ 대입하고 정리함.)

(나) $g'(2) = f'(2) - \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = f'(2) - \dfrac{1}{f'(-2)} = f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)}$ ($f(x)$가 기함수 $\rightarrow$ $f'(x)$는 우함수)

$h'(2) = g'(f(2)) \times f'(2)$

$= g'(-2) \times f'(2)$

$\rightarrow f'(2) - \dfrac{1}{f'(2)} = -5f'(2) \times \{f'(2) - 1\}$

$5\{f'(2)\}^3 + \{f'(2)\}^2 - 5f'(2) - 1 = 0$

$(5f'(2)+1)(f'(2)-1)(f'(2)+1) = 0$ $\rightarrow f'(2) = -\frac{1}{5}$ or $f'(2) = -1$

$\rightarrow f'(x) = -\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ $\rightarrow f'(2) = -\dfrac{28a-3b}{25}$

만약 $f'(2) = -1$ 이라면 $a=1, b=1$. (서로 다른 두 양수라는 조건에 모순)

$\therefore f'(2) = -\frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $b=3$

$\rightarrow 4(b-a) = 12-2 = 10$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ $\Leftrightarrow$ f와 g는 역함수관계

설명) $f(x)=t$ 라는 x에 관한 식의 실근이 $g(t)$라 했으므로,

x자리에 $g(t)$를 대입하면

$f(g(t))=t$.

이 식을 t에 관한 식으로 해석하면 f와 g는 역함수 관계임을 알 수 있다.