2468 N제

2024학년도 수능 대비

수학1

표지 디자인 / 설맞이 팀장

1 거듭제곱근

2 이상 50 이하인 자연수 n에 대하여 $n-9$의 n 제곱근 중에서 양의 실수가 존재하고, $n-20$의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 구하시오.

2 거듭제곱근의 개수

2 이상인 자연수 n에 대하여 $5-n$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 $|n-6|$의 값과 같도록 하는 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3 거듭제곱근의 개수

다음 조건을 만족시키는 정수 k의 개수를 구하시오.

(가) $1 < |k| \leq 50$

(나) k의 m 제곱근 중 실수인 것의 개수와
m의 $|k|$ 제곱근 중 실수인 것의 개수가 같도록 하는 자연수 $m(m \geq 2)$이 존재한다.

4 거듭제곱근 + 삼각함수

2 이상 50 이하인 자연수 n에 대하여 $\sin\frac{n}{4}\pi$가 어떤 음의 실수의 n 제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

5 거듭제곱근의 활용

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 $f(2n)$의 최솟값을 구하시오.

(가) $f(64)=0$
(나) 방정식 $f(x)f\left(x^n\right)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖고, 이 네 실근은 모두 자연수이다.

6 지수법칙

두 양수 $a\,(a>1)$, b가

$$2^{a-2}\times b=b^{a}=16$$

을 만족시킬 때, $a=p+q\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

7 로그의 성질

1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a + \log_3 b = \log_6 c$
(나) $\dfrac{c}{3ab} = 3^{\log_2 a}$

$ac = 48$일 때, $6(a+c)$의 값을 구하시오.

8 지수법칙과 로그의 성질

1이 아닌 세 양수 a, b, c가

$$2^a = 3^b, \quad \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^c = 3^a, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$$

을 만족시킬 때, $3^a \times b$의 값은?

① $2+2\log_3 2$ ② $2+3\log_3 2$ ③ $3+2\log_3 2$
④ $3+3\log_3 2$ ⑤ $4+2\log_3 2$

9 로그가 자연수가 되기 위한 조건

$(a-3\log_b 6)(a-6\log_b 2)=0$을 만족시키는 두 자연수 a, $b(b\neq 1)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.

10 로그가 자연수가 되기 위한 조건

2 이상 50 이하인 자연수 n과 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 세 수

$$\log_n a^2, \quad \log_a b^4, \quad 2^n \times \log_b n$$

이 모두 같은 자연수일 때, $\log_b a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\log_2 \frac{M}{m}$의 값을 구하시오.

11 지수함수의 그래프

함수 $y=\left|4^{x-a}-a\right|$의 그래프의 점근선이 함수 $y=2^{x-a}$의 그래프와 점 A에서 만난다. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $y=\left|4^{x-a}-a\right|$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B의 y좌표가 12일 때, 점 B의 x좌표는? (단, a는 양수이다.)

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

12 지수함수의 그래프

곡선 $y=k^x(k>1)$가 y축과 만나는 점을 A, 직선 $y=2$와 만나는 점을 B라 하자. 곡선 $y=k^{-x}$위의 두 점 C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 C의 y좌표는 $p+q\sqrt{7}$이다. $p+q+k^4$의 값을 구하시오. (단, 점 C의 x좌표는 음수이고, p와 q는 유리수이다.)

(가) 선분 CD의 중점의 좌표는 $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$이다.

(나) 두 직선 AC, BD는 서로 평행하다.

13 지수함수의 그래프

$k<-\frac{1}{4}$인 상수 k에 대하여 곡선 $y=2^{\frac{2}{3}x}$와 함수 $y=k\times(|x|-4)$의 그래프가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 음수이고, 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BQ}} = 1 : 16$$

일 때, 점 P의 x좌표는 $-\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

14 로그함수의 그래프

곡선 $y=\log_a x(a>1)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 B를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이 x축과 만나는 점을 C, y축과 만나는 점을 D라 하자. 두 삼각형 BOC, DOA의 넓이가 같을 때, 점 A의 x좌표는? (단, O는 원점이고 $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$이다.)

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

15 로그함수의 그래프

두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_a(x-2)$와 직선 $y=b$의 교점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\log_a x$위의 점 C가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 값은? (단, a, b는 $a>1$, $b>0$인 상수이다.)

(가) 서로 다른 세 점 A, $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, C는 한 직선 위에 있다.

(나) 서로 다른 세 점 B, $\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$, C는 한 직선 위에 있다.

(다) $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{16}{3}$

① $3^{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{10}}{5}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{15}}{5}}$ ④ $3^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ ⑤ 3

16 지수함수와 로그함수의 그래프

곡선 $y=3^{x}+k$위의 점 A와 곡선 $y=\log_{3}(x-k)$위의 두 점 B, C에 대하여 직선 AC는 x축과 평행하고,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}, \quad \angle \mathrm{ABC}=90^{\circ}$$

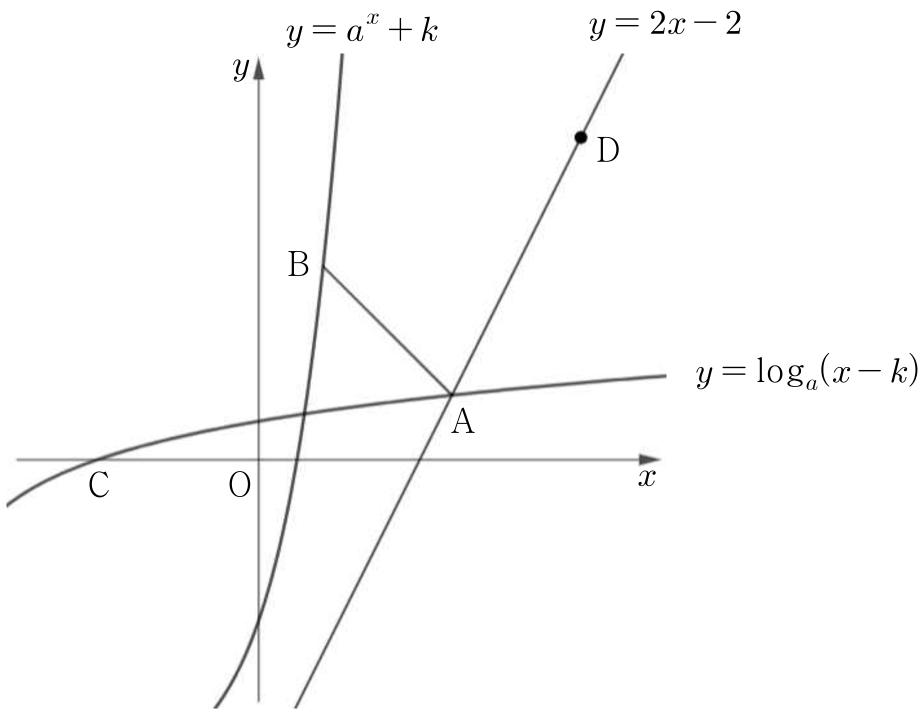
이다. 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 클 때, 점 B의 y좌표는? (단, k는 상수이다.)

① $-\log_{3}2$　② -1　③ $-2\log_{3}2$
④ $-\log_{3}5$　⑤ $-\log_{3}2-1$

17 지수함수와 로그함수의 그래프

두 상수 a, $k(a>1,\ -3<k<1)$에 대하여 곡선 $y=\log_a(x-k)$이 직선 $y=2x-2$와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=a^x+k$와 만나는 점을 B라 하자. 곡선 $y=\log_a(x-k)$이 x축과 만나는 점 C와 점 D$(2,\ 2)$에 대하여 삼각형 DAC의 넓이가 삼각형 DBC의 넓이의 4배이고 $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{5}$일 때, $\dfrac{a}{32}=\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



18 삼각함수의 방정식

다음은 방정식

$$\cos^2\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{x-8}{16}\right)\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{x}{32}=0$$

을 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합을 구하는 과정이다.

$\cos^2\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{x-8}{16}\right)\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{x}{32}=0$에서 $\left(\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}x+\frac{x}{16}\right)=0$이므로

'(i) $\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$' 또는 '(ii) $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$' 이다.

(i)의 경우 :

$\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{(가)}$ 이다.

(ii)의 경우 :

x가 자연수이므로 $-\frac{x}{16}$은 음의 유리수이고, $\cos\frac{\pi}{6}x$도 음의 유리수이다. 즉

$\cos\frac{\pi}{6}x=-1$ 또는 $\cos\frac{\pi}{6}x=\boxed{(나)}$

이므로 $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$을 만족시키는 30 이하의 자연수 x의 값은 $\boxed{(다)}$ 뿐이다.

(i), (ii)에 의하여 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{(가)}+\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값은? (단, $q\neq-1$)

① $\frac{161}{2}$ ② $\frac{163}{2}$ ③ $\frac{165}{2}$ ④ $\frac{167}{2}$ ⑤ $\frac{169}{2}$

19 삼각함수 방정식의 실근의 개수

집합 $\{x \mid 0 \le x \le 2\pi\}$의 두 부분집합

$$A = \{x \mid \sin ax = -1\}, \qquad B = \{x \mid |3\cos 2x| = 1\}$$

의 원소의 개수가 서로 같도록 하는 자연수 a의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

20 삼각함수 방정식의 실근의 개수

두 상수 $a(a<0)$, b에 대하여 $0 \le x \le 4\pi$에서 방정식

$$\sin x = a$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n_1, $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식

$$4\cos^2 x + (1-8b)\cos x = 2b$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n_2라 하자. $n_2 - n_1 = 1$일 때, $a \times b \times n_2$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

21 삼각함수 방정식의 실근의 개수

함수 $f(x) = \sin(k\pi x + k\pi)$에 대하여 $0 \leq x \leq 1$에서 세 방정식

$$f(x) = 1, \quad f(x) = \frac{1}{3}, \quad f(x) = -1$$

의 서로 다른 실근의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

$$a = b \text{ 또는 } b = c \text{ 또는 } c = a$$

가 되도록 하는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

22 삼각함수의 주기성과 대칭성

두 상수 p, q에 대하여 방정식

$$4x^2+px+35=0$$

은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고, $0\le x\le 4$에서 방정식

$$\sin\frac{\pi}{2}x=q$$

은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다. $p^2\times q^2$의 값을 구하시오.

23 삼각함수의 주기성과 대칭성

$-1 < a < 0$인 상수 a에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식

$$2\sin^2 x - (2a+1)\sin x + a = 0$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 k_1, k_2, k_3, k_4이다.

$$k_1 \cos k_4 = a \times k_2 \cos k_3$$

일 때, $\cos k_4 = \frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

24 삼각함수의 주기성과 대칭성

$0 \leq x < 10\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin\frac{12}{k}x$와 $0 < t < 1$인 실수 t에 대하여 방정식 $f(x) = t$의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\frac{\pi}{2}$, x_2, x_3, $\cdots$, x_m이다.

$\tan\frac{x_2}{4}$, $\tan\frac{x_3}{4}$의 값이 모두 존재하고

$$2\pi < x_2, \quad \tan\frac{x_3}{4} < \tan\frac{x_2}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, m은 3 이상인 자연수이다.)

25 삼각함수의 그래프

$0 \leq x \leq 2\pi$에서 정의된 함수 $y = |a\sin x|(a > 0)$의 그래프가 직선 $y = k(0 < k < a)$와 만나는 점을 x좌표가 작은 점부터 차례대로 A_1, A_2, A_3, A_4라 하고, 점 A_3에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} : \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4} = 2 : 3$이고 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{H}$의 넓이가 2일 때, $\pi(a+k)$의 값을 구하시오.

26 삼각함수의 그래프

상수 $a(0<a<4\pi)$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin ax & \left(0<x\le \dfrac{\pi}{a}\right) \\ x-\dfrac{\pi}{a} & \left(\dfrac{\pi}{a}<x\right) \end{cases}$$

가 있다. 직선 $y=b(0<b<1)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만날 때, 직선 OA의 기울기는 4이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{8}$이다. $f(6)$의 값은? (단, O는 원점이고 $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.)

① $\dfrac{21}{4}$ ② $\dfrac{27}{5}$ ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ $\dfrac{39}{7}$ ⑤ $\dfrac{45}{8}$

27 삼각함수의 그래프

$0 \leq x \leq 2$에서 정의된 함수 $f(x) = \sin \pi x$에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = a(0 < a < 1)$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$위의 점 C가 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다.
두 점 C, $(1,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 y좌표가 음수인 점을 D, 두 점 C, D에서 직선 $y = a$에 내린 수선이 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. $\overline{\mathrm{AH_2}} = \frac{3}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{DH_1}}$의 값은?
(단, $\overline{\mathrm{BH_2}} < \overline{\mathrm{AH_2}} < \overline{\mathrm{H_1H_2}}$)

① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

28 삼각함수와 조건 해석

닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=|\sin kx|, \quad g(x)=-\cos 6x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

> 실수 a가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 y좌표이면 집합
>
> $$\{x\,|\,f(x)=a\}\cap\{x\,|\,g(x)=a\}$$
>
> 의 원소의 개수는 2 이상이다.

29 삼각함수와 조건 해석

두 함수

$$f(x) = \sin 10x, \quad g(x) = \cos kx$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

a와 $a+\pi$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 되도록 하는 실수 $a\left(0<a<\dfrac{\pi}{4}\right)$가 존재한다.

30 사인법칙

넓이가 $\frac{9}{10}$인 삼각형 ABC에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = 6, \quad \overline{\mathrm{CA}} = 4$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① $\frac{20}{3}$　② 7　③ $\frac{22}{3}$　④ $\frac{23}{3}$　⑤ 8

31 사인법칙

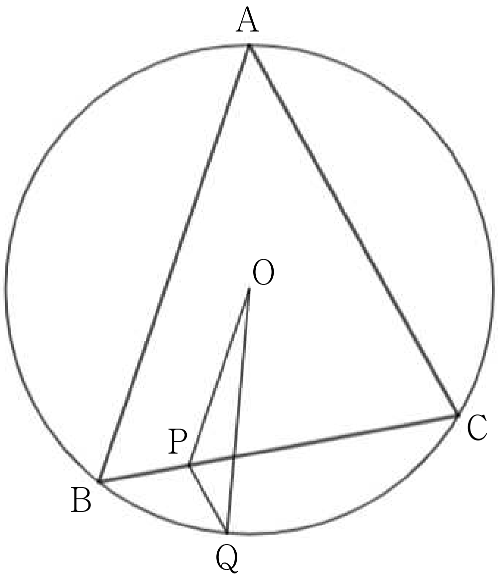
$\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하자.

삼각형 ABD의 외접원의 넓이가 두 점 C, D를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이의 6배일 때,

$40\times\sin^2(\angle DAC)$의 값을 구하시오.

32 사인법칙

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 8인 원에 내접하고 $\overline{BC}=12$인 예각삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위의 점 P를 두 직선 AB, OP가 서로 평행하도록 잡고, 점 A를 포함하지 않은 호 BC위의 점 Q를 두 직선 AC, PQ가 서로 평행하도록 잡는다. $\sin(\angle POQ)=\frac{1}{4}$일 때, 선분 PQ의 길이는?



① 2　② $\frac{13}{6}$　③ $\frac{7}{3}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{8}{3}$

33 코사인법칙

좌표평면에서 두 원 $x^2+(y-4)^2=25$, $(x+4)^2+y^2=100$이 만나는 점 중 x축에 더 가까운 점을 P라 하자. 다음은 세 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$, $\mathrm{C}(0,\ -4)$에 대하여

$$\angle\mathrm{CPB}=\alpha,\qquad \angle\mathrm{ACP}=\beta$$

라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하는 과정이다.

점 D를 $\mathrm{D}(-4,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=5$, $\quad\overline{\mathrm{DP}}=\boxed{\text{(가)}}$

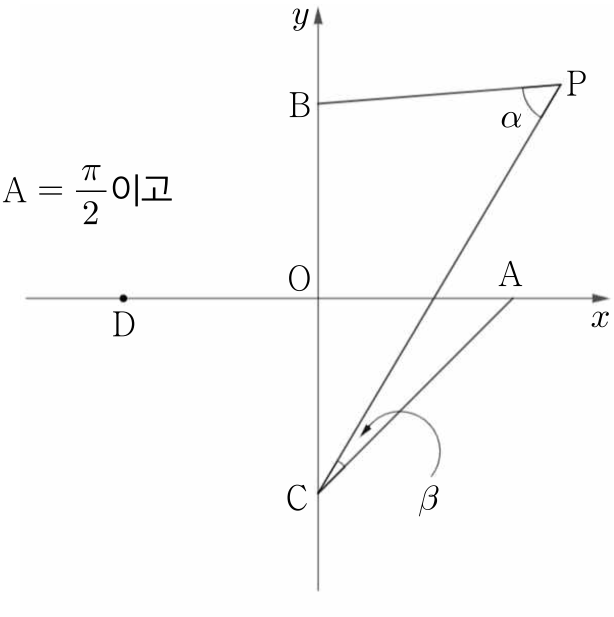
이다. 사각형 BDCA가 정사각형이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DBA}=\dfrac{\pi}{2}$이고

$\angle\mathrm{DBP}=\boxed{\text{(나)}}-\alpha+\beta$

이다. 따라서 삼각형 PBD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\alpha-\beta)=\boxed{\text{(다)}}$

이다.



위의 (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

① $\dfrac{41}{8}\sqrt{2}\pi$　② $\dfrac{41}{4}\sqrt{2}\pi$　③ $\dfrac{43}{8}\sqrt{2}\pi$　④ $\dfrac{43}{4}\sqrt{2}\pi$　⑤ $\dfrac{45}{4}\sqrt{2}\pi$

34 코사인법칙

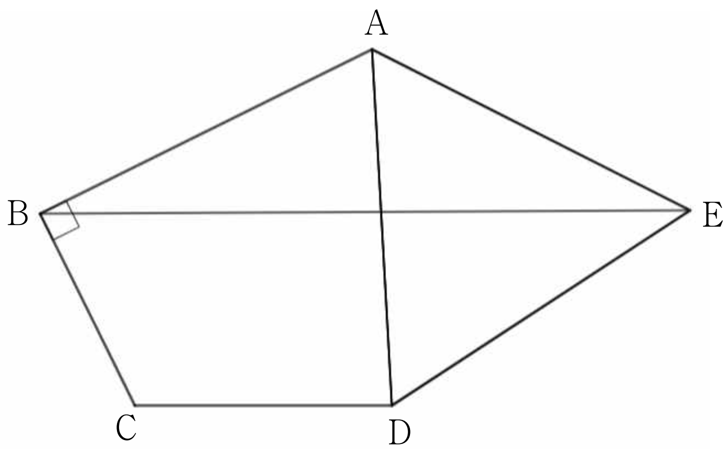
길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O에 대하여 반원 위의 두 점 P, Q를 두 직선 AP, OQ가 서로 평행하도록 잡는다. $\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{6}$일 때, 선분 AP의 길이를 구하시오.

35 코사인법칙

그림과 같이 오각형 ABCDE가

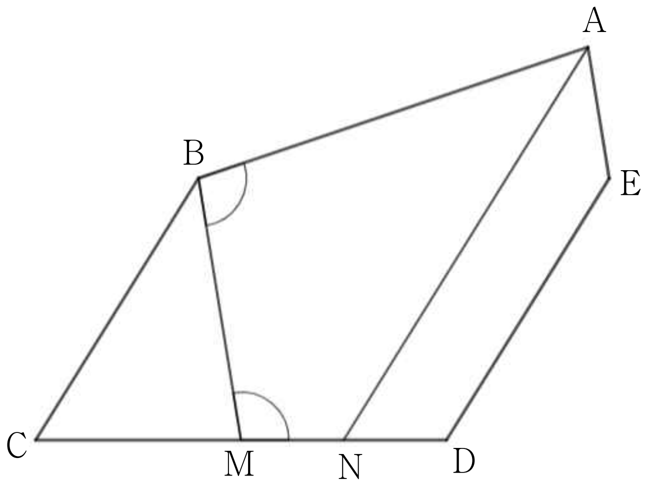
$$\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{3}, \quad \overline{\mathrm{BC}} = 3, \quad \overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{13}$$

을 만족시키고, 삼각형 ADE는 넓이가 $\frac{25}{4}\sqrt{3}$인 정삼각형이다. $\overline{\mathrm{BE}}^2 = p + q\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)



36 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{BC}=\overline{DE}=3$인 오각형 ABCDE가 있다. 선분 CD의 중점을 M, 선분 MD의 중점을 N이라 하자. 세 직선 BC, AN, ED가 서로 평행하고 $\angle ABM=\angle BMD$일 때, 선분 AE의 길이는 l이다. $3l^2$의 값을 구하시오.

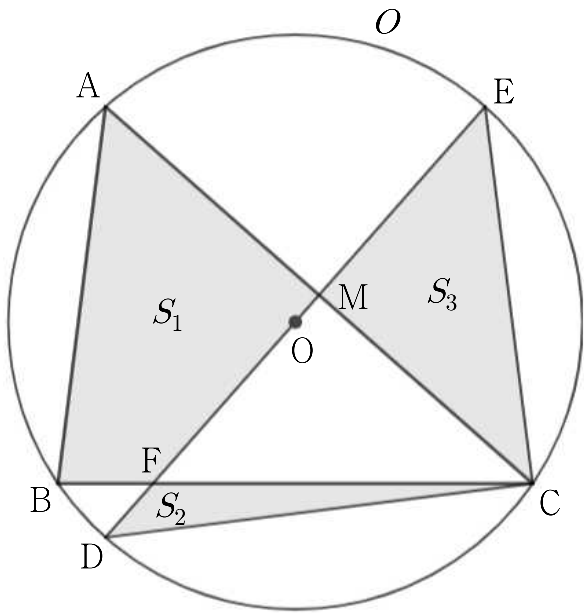


37 사인법칙과 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원 O의 중심을 O, 선분 CA의 중점을 M이라 하자. 직선 OM이 원 O와 만나는 점 중 점 B에 더 가까운 점을 D, 점 B에 더 먼 점을 E라 하고, 직선 OM이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자.

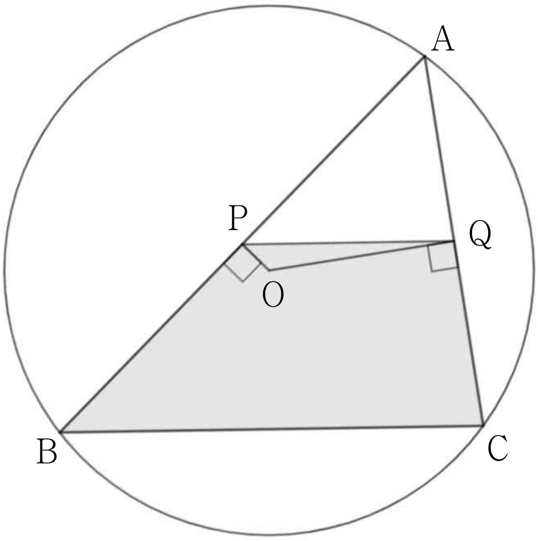
사각형 ABFM의 넓이를 S_1, 두 삼각형 FDC, EMC의 넓이를 각각 S_2, S_3이라 할 때,

$S_1-S_2-S_3=\frac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



38 사인법칙과 코사인법칙

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC가 있다. 점 O에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=4$이고 사각형 PBCQ의 넓이가 21일 때, 사각형 PBCQ의 둘레의 길이는 $p+q\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

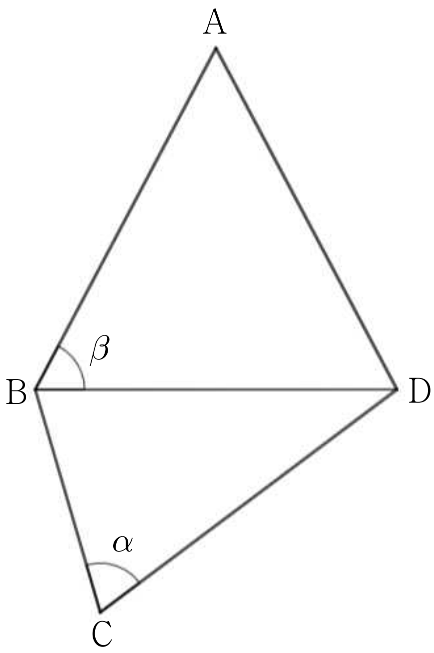


39 사인법칙과 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$인 사각형 ABCD에 대하여 $\angle BCD=\alpha$, $\angle ABD=\beta$라 할 때,

$$\alpha>\beta,\qquad \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\sin\alpha,\qquad \sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{8}$$

이 성립한다. 세 점 B, C, D를 지나는 원의 중심과 점 A 사이의 거리를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.



40 등차수열

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad (a_2 - a_1)\times(a_3 - a_2)\times\cdots\times(a_{n+1} - a_n) = k^{2-a_{n+1}}$$

을 만족시킨다. 다음은 $a_7 = 4$, $a_{11} = 6$일 때, a_1의 값을 구하는 과정이다. (단, k는 $k>1$인 상수이다.)

모든 자연수 n에 대하여 $S_n = (a_2 - a_1)\times(a_3 - a_2)\times\cdots\times(a_{n+1} - a_n)$라 하면, $S_n = k^{2-a_{n+1}}$에서

$$2 - a_{n+1} = \log_k S_n \quad \cdots \text{ ㉠}$$

이고, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$2 - a_n = \log_k S_{n-1} \quad \cdots \text{ ㉡}$$

이다. ㉠−㉡을 하면

$$a_n - a_{n+1} = \log_k S_n - \log_k S_{n-1} = \log_k(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots \text{ ㉢}$$

이다. 즉 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n$은 방정식 $-x = \log_k x$의 해이다.
$k > 1$이므로 방정식 $-x = \log_k x$은 오직 하나의 실근 d를 갖는다.
따라서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = d$이다.
$a_7 = 4$, $a_{11} = 6$이므로 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. ㉢에서 $k = \boxed{\text{(나)}}$ 이고, $S_n = k^{2-a_{n+1}}$에서 $n=1$을 대입하면 $a_1 = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $f(14)+p+q$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

41 등차수열 + 삼각함수

첫째항과 공차가 모두 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\sin(a_n)=0$이다.
(나) $a_n < 11\pi$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 6이다.

$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

42 등차수열

등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)=0$
(나) $(a_4-1)(a_5-2)(a_6-3)=0$
(다) $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)<0$

$a_{10}\times a_{11}\neq 5$일 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값을 구하시오.

43 등차수열

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_3| + |a_{15}| = |2a_7|$

(나) $|a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}| = |a_{10} \times a_{13}| + 3$

$a_2 > 0$일 때, $\sum_{k=3}^{15} a_k$의 값을 구하시오.

44 등차수열

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (-1)^n - 1$$

이다. 등차수열 $\{b_n\}$과 상수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, $m \times b_{10}$의 값을 구하시오.

모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} b_k = n(m - a_n)(na_{n+1} - 3)$$ 이다.

45 등차수열

첫째항이 20이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 d의 값의 합은?

(가) 어떤 자연수 n_1에 대하여 $\sum_{k=n_1}^{n_1+4} a_k \geq 0$이다.
(나) 어떤 자연수 n_2에 대하여 $\sum_{k=1}^{n_2} a_k = 0$이다.

① -34　② -32　③ -30　④ -28　⑤ -26

46 등차수열 / 수열의 합의 최대와 최소

공차가 0이 아니고 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=4}^{9} b_k$의 최솟값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_n \rvert = \lvert b_n \rvert$이다. (나) $b_4 = a_6$

① -20 ② -18 ③ -16 ④ -14 ⑤ -12

47 등차수열 / 수열의 합의 최대와 최소

모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 최댓값을 구하시오.

(가) 수열 $\{a_{2n-1} \times a_{2n}\}$은 첫째항이 -7이고 공차가 3인 등차수열이다.

(나) $a_2 < a_5 < a_8$

48 등비수열

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=2}^{10}(a_k + k) = \sum_{k=3}^{10}(a_k + 3)$$

을 만족시킬 때, r의 값은?

① $-\frac{5}{9}$ ② $-\frac{16}{27}$ ③ $-\frac{17}{27}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{19}{27}$

49 등비수열

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+4}}{a_{2n}}\right\}$은 등비수열이다.

$$a_5 = \sqrt{2}, \quad a_9 = 16, \quad a_{16} = -\sqrt{2}$$

일 때, a_2의 값은?

① -8　　② $-4\sqrt{2}$　　③ -4　　④ $-2\sqrt{2}$　　⑤ -2

50 등비수열

$a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{2}\,a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=2x^2$ 위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 P_n, 곡선 $y=x^2$ 위에 있고 x좌표가 a_n인 점을 Q_n이라 하고, 점 P_n에서 y축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\dfrac{a_n}{2}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\dfrac{a_n}{2}$이므로

점 Q_{n+1}의 y좌표와 점 P_n의 y좌표의 차는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다

$\mathrm{Q}_{n+1}\left(a_{n+1},\ (a_{n+1})^2\right)$, $\mathrm{P}_n\left(a_n,\ 2(a_n)^2\right)$이므로

$$(a_{n+1})^2 - 2(a_n)^2 = \boxed{\text{(가)}}$$

이고,

$$(a_{n+1})^2 + \boxed{\text{(가)}} = 2\times\left\{(a_n)^2 + \boxed{\text{(가)}}\right\}$$

이므로 수열 $\left\{(a_n)^2 + \boxed{\text{(가)}}\right\}$은 등비수열이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

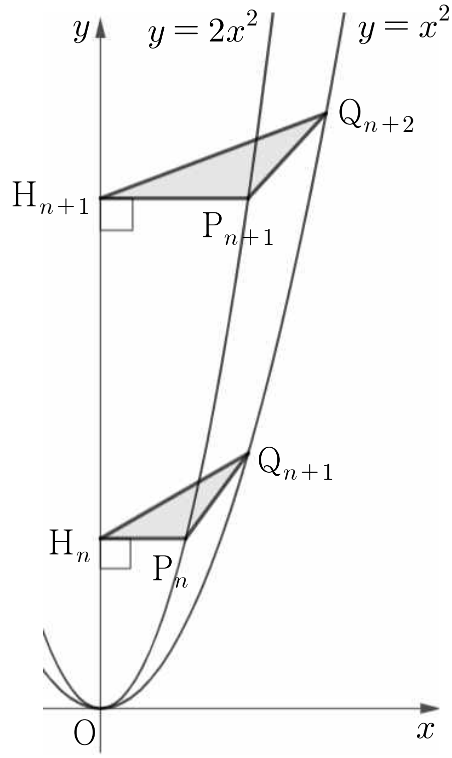
$$(a_n)^2 = \boxed{\text{(나)}}$$

이고, $\mathrm{Q}_n\left(a_n,\ (a_n)^2\right)$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $(a_n)^2$이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.



위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(7)+g(8)$의 값은?

① 626 ② 628 ③ 630 ④ 632 ⑤ 634

51 등비수열 / 시그마의 성질

공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{50}\left\{(51-k)a_k-\frac{1}{50}\right\}=\sum_{k=1}^{49}S_k,\qquad S_{25}=\frac{1}{100}$$

일 때, $\dfrac{a_{30}}{a_5}$의 값을 구하시오.

52 등비수열

공비가 1이 아니고 $a_4 + a_{10} = -\sqrt{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_1 = a_1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n > 0) \\ 1 - a_1 & (a_n \leq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $b_7 = 1 - a_1$일 때, $3 \times \sum_{k=1}^{17} b_{3k-2}$의 값을 구하시오.

53 등비수열 + 거듭제곱근

다음 조건을 만족시키고 공비가 음의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 100 이하의 자연수 m의 개수를 구하시오.

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} 3a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k$

(나) $a_1 \neq 0$이고 $\dfrac{a_{31}}{a_1}$은 정수이다.

54 시그마의 성질

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 $a_{21}=42$일 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}$의 값을 구하는 과정이다.

모든 자연수 k에 대하여

$$\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k=(\boxed{\text{(가)}})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(\boxed{\text{(가)}})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)=n^2$$

이다. 이때

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{\text{(가)}})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)=(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$$

이므로

$$(\boxed{\text{(나)}})\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2 \quad \cdots \text{ ㉠}$$

이다. $a_{21}=42$이므로 ㉠에 $n=20$을 대입하면 $\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(20)\times g(9)+p$의 값은?

① -350 ② -348 ③ -346 ④ -344 ⑤ -342

55 수열의 규칙 찾기

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최솟값을 구하시오.

(가) $a_{3n-1} = a_{3n}$

(나) $a_n \times a_{n+1} \leq 4a_n - 4$

56 수열의 규칙 찾기

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n^2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_n-n^2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k = 50$일 때, a_1의 값은?

① -25　② $-\dfrac{49}{2}$　③ -24　④ $-\dfrac{47}{2}$　⑤ -23

57 수열의 규칙 찾기

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{2}{4-a_n} & (a_n \geq 1)\\ \\ n+1 & (a_n<1)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_{2k}}$의 값은?

① -160 ② -158 ③ -156 ④ -154 ⑤ -152

58 수열의 합의 최대와 최소

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $(a_n-5)(a_n-n)(a_n-2n)=0$이다. (나) 수열 $\{a_n\}$의 항 중 가장 큰 항은 10이다.

59 귀납적으로 정의된 수열과 조건 해석

실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} (k+1)a_n & (a_n < 0) \\ (k-1)a_n & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$a_m = -2a_{m+2}$인 자연수 m이 존재하도록 하는 k의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

60 귀납적으로 정의된 수열과 조건 해석

상수 k와 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n-1}+a_{2n}=(\sqrt{2}+1)a_n$
(나) $a_{2n-1}\times a_{2n}=k\times(a_n)^2$

$a_2=\dfrac{1}{9}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{128}(a_k)^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

61 귀납적으로 정의된 수열과 조건 해석

다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 자연수 k의 개수는?

(가) $a_1 = 40,\ a_{21} = 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - k & (a_n \geq 0) \\ k & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

62 삼각함수 + 수열

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+5}$이고, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때, $a_n = 4 - |n-3|$이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, $b_n = \cos\dfrac{S_n}{7}\pi$라 하자.

<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = b_{n+5}$이다.

ㄴ. $b_2 + b_9 = b_3 + b_{16}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=3}^{26} b_k < \frac{11}{2}$

정답

1	20	2	④	3	73	4	12	5	116
6	4	7	224	8	④	9	224	10	15
11	④	12	4	13	83	14	②	15	③
16	①	17	157	18	②	19	②	20	③
21	52	22	288	23	7	24	69	25	12
26	①	27	④	28	67	29	60	30	①
31	15	32	⑤	33	③	34	3	35	70
36	5	37	37	38	18	39	18	40	①
41	290	42	255	43	26	44	82	45	③
46	②	47	444	48	①	49	③	50	③
51	99	52	527	53	54	54	⑤	55	200
56	②	57	②	58	129	59	③	60	29
61	④	62	110						

여담

원래 수2만 배포할 계획이었지만,

많은 관심을 주신 덕분에 수1까지 배포하게 되었습니다!

문제 편집해 주신 이경남 선생님,

표지 편집해 주신 skyb1ue(설맞이 팀장)님 진심으로 감사드리고,

문제 풀어주신 모든 분들 진심으로 감사드립니다!

요즘 세상이 많이 시끄러운 상황에 조금이라도 도움이 되길 바라며

앞으로의 수능도 대박 나길 기원합니다!

감사합니다!