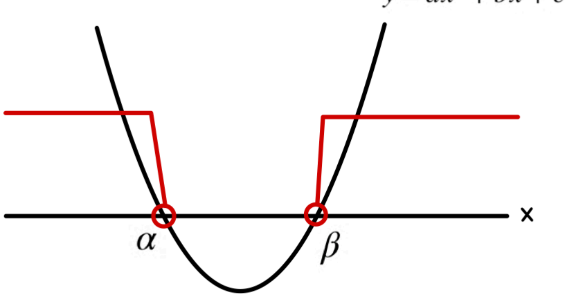
수학, 알고 있니?

이차부등식으로 알아보는 함수와 부등식의 이해!!

수능에서 너무 많이 나와서 꼭 알아야 합니다~~



안녕하세요 수알입니다

오늘은 이차부등식의 함수적 해석에 대해 다뤄보겠습니다

이 파트 역시 수능에서 직접적으로 연계되는 부분이고

답을 내거나 중간중간 논리를 펼치는데 있어서 자주 사용되어

이해가 부족할 경우

수2

미적분

과목에서 많은 어려움을 느낄 수 있습니다!

그러니 꼭 모르는 내용 없게 숙지해주세요

그럼 바로 시작합니다

$$ax^2+bx+c>0$$

위의 이차부등식은 어떻게 풀까요?

혹시 0이 되는 x를 찾은 뒤

<0 이면 사잇 범위

>0 이면 바깥 범위

이렇게만 알고 있나요?

물론, 기계적으로 이렇게만 알아도 당장 이차 부등식은 풀 수 있겠지만

좀 더 근본적인 이해가 필요합니다

바로 그래프 상황이 머리에 그려져야 한다는 것인데요!

부등식 $ax^2+bx+c>0$ 은

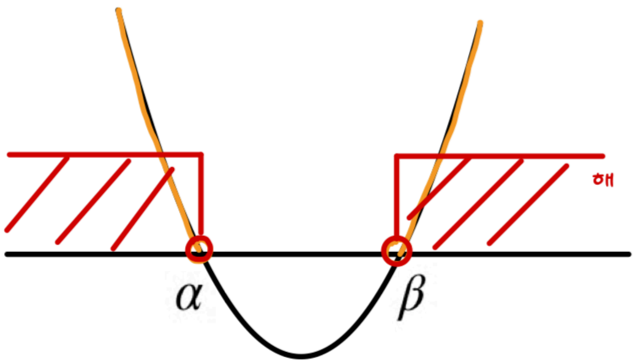
$y=ax^2+bx+c$ 와 $y=0$ (x축)의

y!!값을 비교했을 때,

더 윗쪽에 있게하는 x의 범위를 해로 갖습니다

이차함수에 따라 다르겠지만

a>0이고 x축과 두 점에서 만나는 상황의 경우



위 그림과 같이 표현할 수 있고

0보다 크다 이므로 (>0)

이차함수가 x축과 만나 0이 되는 지점은 구멍을 뚫어주어야 합니다

이차함수의 y값이 0보다 큰 부분은 노란색으로 표현하면

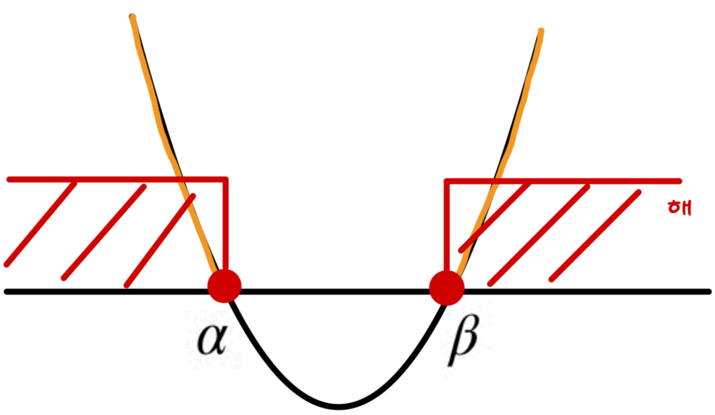
해의 범위는 빨간색으로 표시 할 수 있고

$x < \alpha, x > \beta$ 가 됩니다

만약 0보다 크거나 같다 (≥ 0) 이면

x축과 만나 0이 되는 지점도 해가 되므로

경계가 되는 구멍을 색칠해주면 되고



해는 $x \le \alpha, x \ge \beta$ 가 됩니다

물론 x축과 만나는 지점(α, β) 은

앞서 배운 이차방정식에서처럼 결국 식 계산을 해야하지만

포인트는 부등식을 보고

그래프 이미지가 머리에 바로바로 떠올라야 한다는 것입니다.

자 그렇다면 삼차부등식은 어떨까요?

다음과 같은 삼차부등식에 대하여

$$ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하고

x축과의 위치를 비교하기 위해

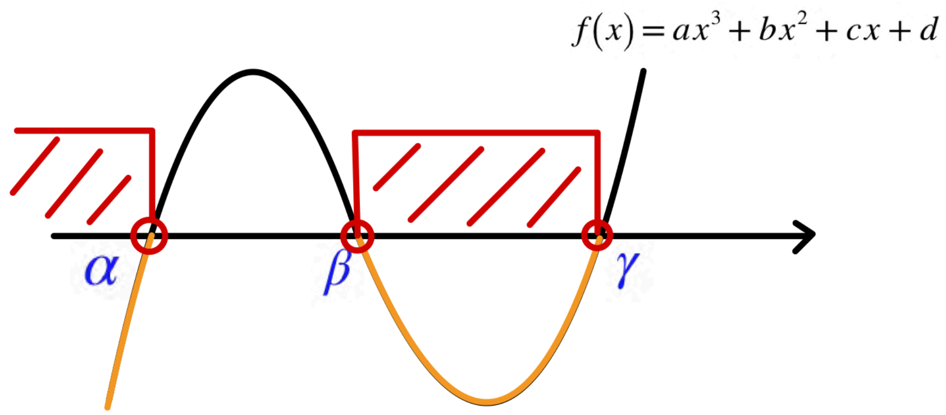
삼차함수의 상황에 따라 그래프를 그려봅시다

<x축과 교점이 3군데인 경우>

$$ax^3+bx^2+cx+d<0$$ (a>0)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 와 $y=0$ (x축) 의

y값을 비교하기 위해 그래프를 그려보면



위와 같이 그릴 수 있고

f(x)가 x축보다 아래에 있는 부분은 노란색이고

이에 따른 해의 범위는 빨간색으로 표시됩니다

그러므로 부등식의 해는

$x<\alpha, \beta<x<\gamma$ 입니다

<x축과의 교점이 2군데인 경우>

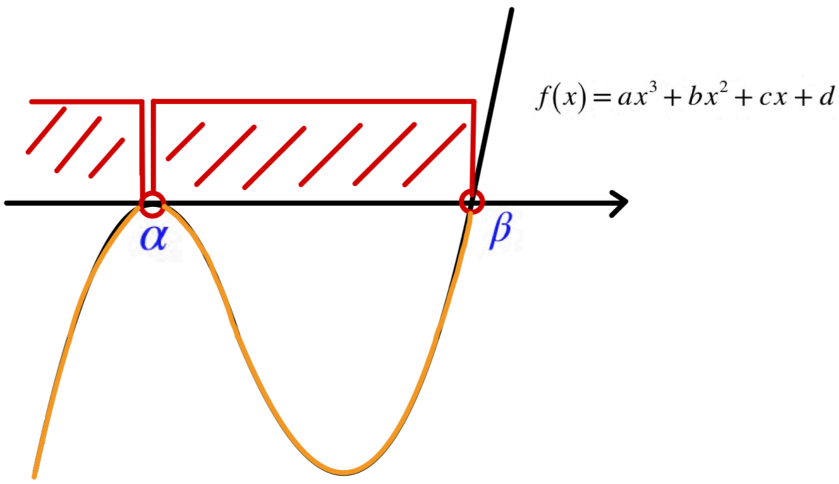
삼차함수가 x축과 2군데에서 만나는 상황도 여러가지가 있겠지만

특정한 상황을 예로 들어 해봅시다

$$ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 와 $y = 0$ (x축) 의

y값을 비교하기 위해 그래프를 그려보면



f(x)가 x축보다 아래에 있거나 만나는 부분은 노란색이고

이에 따른 해의 범위는 빨간색으로 표시됩니다

그러므로 부등식의 해는

$x < \alpha, \alpha < x < \beta$ 입니다

다음으로는 특정 구간에서

부등식이 항상 만족할 조건

을 찾는 상황에 대해 공부해보겠습니다

쉬운 예부터 해봅시다

$-1 \leq x \leq 5$인 모든 x에서 $3x + a \geq 0$일 a의 조건을 구해보세요

.

.

.

.

꼭 직접 생각해보세요!!!

.

.

.

.

푸셨나요?

만약

$a \geq -3x$ 로 바꾼 후

$-15 \leq -3x \leq 3$ 이므로

$a \geq 3$이라고 구했으면

틀린 것은 아니지만,

더 공부해야할 부분이 있습니다

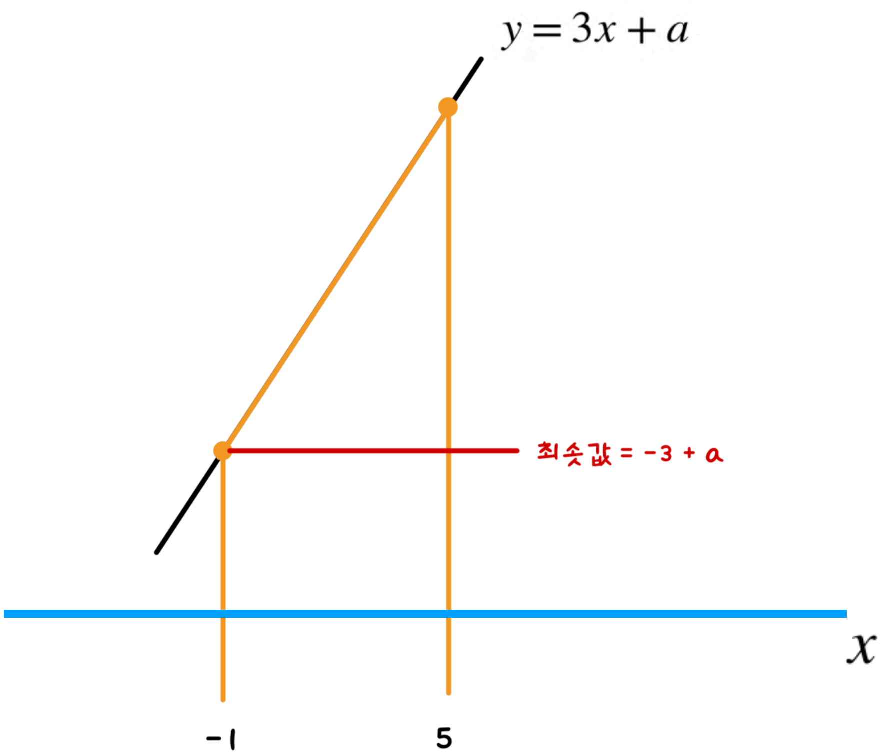
먼저, $3x+a \geq 0$ 라는 부등식은

$y=3x+a$ 와 $y=0$ (x축) 의 y값을 비교하라는 뜻이므로

그래프를 떠올릴 수 있어야 하는데,

이 때!!! 반드시 정의역을 생각해서 그래프를 그립니다

정의역을 고려하여 그래프를 그리면



이와 같이 노란색으로 그려지고, 3x+a가 항상 x축보다 위에있거나 같으려면

그래프의 가장 아랫부분 = 최!솟!값!! 이 0보다 크거나 같아야 한다는 것을 알 수 있습니다.

그러므로 $a \geq 3$ 이 답이됩니다

이 부분은 모든 함수에서 통용될 수 있는 아이디어이니

반드시 이해하고 숙지하기 바랍니다.

같은 방법으로 이차함수에서 따져보겠습니다

모든 x에서 $x^2 - 4x + a > 0$ 이 성립하게하는 a의 조건은

이차함수의 최솟값이 0보다 커야하므로

이차함수의 최솟값을 구해야합니다

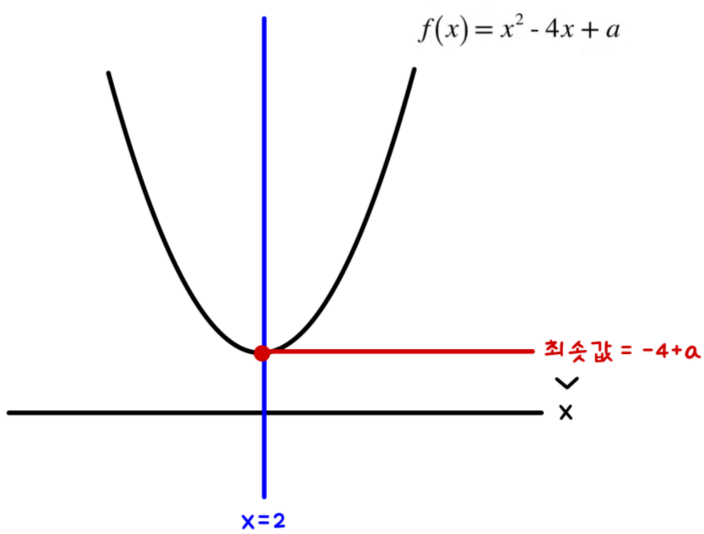
함수의 최솟값을 구하려면 무엇을 하고 싶어야한다고 배웠죠?

맞습니다

정의역에 맞는 그래프!! 그리는겁니다

모든 x가 정의역이므로

이차함수의 그래프를 그려보면



위와 같이 축이 $x=2$ 이고

그 때의 y값이 $-4+a$ 이므로

최솟값이 $-4+a$입니다

즉, 최솟값인 $-4+a$ 가 0보다 커야하므로

$-4+a>0$을 풀면

$a>4$ 가 답이 되는 것입니다

그런데, 이차함수는 특수하게

x축과 만나는 상황에 대해

다른 방법을 사용할 수 있다는 것을 기억하시나요?

이차함수가 x축과

2번 만날지
1번 만날지
아예 만나지 않을지

는 결국 이차방정식의 실근의 갯수가 결정하므로

이차방정식의 실근의 갯수를 판단하는 방법인 판별식! 을 사용하면

부등식을 만족할 조건을 찾을 수 있습니다

모든 x에서 $x^2 - 4x + a > 0$ 이

성립하게하는 a의 조건 문제를 다시 살펴보면

이차함수가 최고차항의 계수가 양수인 아래로 볼록 모양이므로

함수의 그래프가 x축 위에 떠있기만 하면

즉, x축과 만나지 않는다면

모든 x에 대하여 부등식을 만족하게 됩니다

그러므로 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의

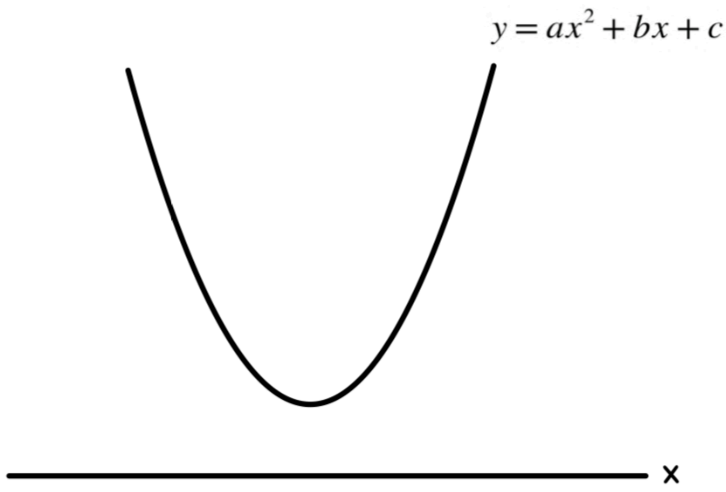
판별식 $D/4 = 2^2 - a = 4 - a < 0$

을 통해 a>4 를 찾을 수 있습니다

이번엔 이차함수와 x축의 위치관계에 따른 여러가지 부등식의 해를 구해보겠습니다

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에 대하여

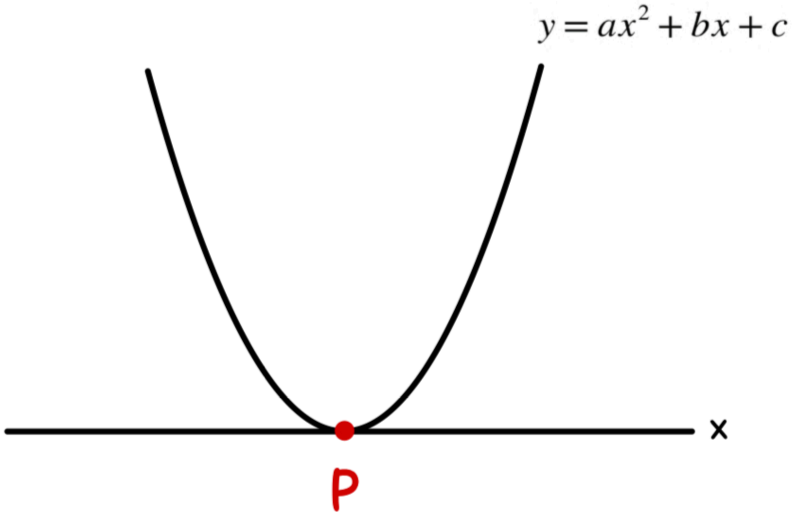
<a>0이고 최솟값>0 일 때>



$ax^2 + bx + c > 0$ -> 실수 전체

$ax^2 + bx + c < 0$ -> 해 없음

<a>0이고 최솟값=0 일 때>



$$ax^2+bx+c>0$$ -> $x \neq p$

이차함수가 0이되는 x값(=p)을 제외하고 모든 실수가 부등식을 만족하는 해가 됩니다

$$ax^2+bx+c \geq 0$$ -> 모든 실수

이차함수가 0이 되는 x값(=p)도 부등식을 만족하므로 모든 실수가 해가 됩니다

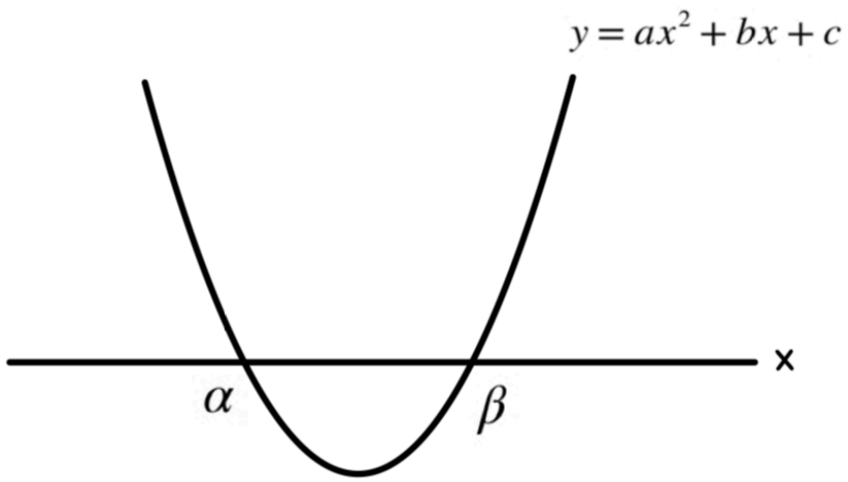
$$ax^2+bx+c \leq 0$$ -> $x=p$

이차함수가 0이 되는 x값(=p)만 부등식을 만족하므로 x=p만 해가 됩니다

$$ax^2+bx+c<0$$ -> 해 없음

x축보다 이차함수가 아래에 있게되는 x값이 없으므로 해가 없습니다

<a>0이고 최솟값<0 일 때>



부등식별로 해를 나타내면

$ax^2+bx+c>0$ -> $x<\alpha, x>\beta$

$ax^2+bx+c\geq 0$ -> $x\leq\alpha, x\geq\beta$

$ax^2+bx+c<0$ -> $\alpha<x<\beta$

$ax^2+bx+c\leq 0$ -> $\alpha\leq x\leq\beta$

입니다

$a<0$일 때는 반대로 해주시면 됩니다!!

방금 설명한 부등식을

여러 개념서에서 결과를 정리해 놓았는데

그 부분을 단순 암기하지 마시고

반드시 위와 같이 그래프를 통한

이해를 통해 해를 구할 수 있어야 합니다!

<정리>

첫 째, $f(x)>0$ 이라는 부등식은 $y=f(x)$와 $y=0$(x축)의 그래프를 그린 후 y값의 높이를 비교하여 부등식에 맞는 x의 영역을 표시해주면 해가 된다

둘 째, >0인지 ≥ 0 인지 잘판단하여 경계값이 해에 포함되는지를 반드시 확인하자!

셋 째, 특정 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건을 따질 때는,
그 구간에서의 최댓값 혹은 최솟값을 구해 부등식을 해결한다

특정 구간의 모든 x에 대하여

$f(x)>0$ -> 구간 내 $f(x)$의 최솟값 >0
$f(x)<0$ -> 구간 내 $f(x)$의 최댓값 <0

넷 째, 이차부등식이 항상 성립할 조건은 x축과의 관계를 생각하면 되므로
판별식을 활용할 수 있다

다섯 째, 이차함수와 x축 관계를 잘 따지면 이차부등식을 더 깊이 이해할 수 있다

여기까지 이차함수와 부등식에 대해 다뤘습니다

이차함수 뿐만 아니라

다른 함수와 관련된 부등식도 해결할 수 있는

핵심 아이디어를 다뤘으니

내용 숙지하시기 바랍니다!

이상으로 길었던 이차함수를 활용한 함수의 기초 시리즈를 마치겠습니다

함수의 그래프 그리기

함수 식세우기

함수의 최대,최소 찾기

함수와 방정식

함수와 부등식

에 대해 다뤘는데요.

수능 수학의 범위가 함수이고

모든 함수 단원이 위와 같은 내용들을 다 같이 다루고 있습니다

어느 함수 단원을 공부하든 핵심은 위에서 다룬 내용입니다

다른 주제보다도 수능에서 특히 중요한 내용이니

꼭꼭!! 모든 내용을 이해하고 체화해보세요

이상 마치겠습니다

-끝-