# 1. 420

(가)를 만족시키기 위해서는 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\int_0^a f(t)dt = \int_1^a f(t)dt$에서 $\int_0^1 f(t)dt = 0$이다.

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$이므로 $\int_0^1 f(t)dt = 0$에서 $g(1) = 0$이다.

$g(0) = g(1) = 0$이므로 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $g'(0) = g'(1) = 0$

을 만족시켜야 한다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $g(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$이고,

$g'(x) = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$이다. 따라서 $f(8) = 420$

# 2. ④

조건의 부등식 $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 양 변에 $b-a$를 곱해서 정리하면

$f(a)-g(a) \leq f(b)-g(b)$임을 알 수 있고,

함수 $f(x)-g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가함을 알 수 있다.

$f(x)-g(x)=x^3-(2k+1)x^2+3kx+3$에서 $f'(x)-g'(x)=3x^2-2(2k+1)x+3k \geq 0$이고

이차방정식 $3x^2-2(2k+1)x+3k=0$의 판별식 $D$가 $D \leq 0$이어야 한다.

$D=4(2k+1)^2-36k=4(4k-1)(k-1) \leq 0$에서 $k$의 최댓값은 $1$이다.

# 3. ④

$f(x) = x^3 - 2x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$이라 하자.

곡선 $y = f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y = f'(t)(x-t) + f(t)$이고 이 직선이 원점을 지나므로
$f(t) = tf'(t)$, $t^3 - 2t^2 = t(3t^2 - 4t)$에서 $t = 0$ 또는 $t = 1$이다.

(i) $t = 0$인 경우
$y = f'(0)x + f(0) = 0$이므로 이 직선의 기울기는 $0$이다.
즉, 곡선 $y = g(x)$에 접선의 기울기가 $0$이어야 하고, 이 직선 역시 $y = 0$이다.
그런데 이 직선은 점 $(0,\ a)(a < 0)$을 지날 수 없다.

(ii) $t = 1$인 경우
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x$이므로 이 직선의 기울기는 $-1$이다.
즉, 곡선 $y = g(x)$에 접선의 기울기가 $-1$이어야 한다,
$g'(x) = x = -1$이므로 곡선 $y = g(x)$위의 점 $(-1,\ g(-1))$에서의 접선의 방정식은
$y = g'(-1)(x+1) + g(-1) = -x - \frac{1}{2}$
이 직선이 점 $(0,\ a)(a < 0)$을 지나므로 $a = -\frac{1}{2}$이다.

(i) ,(ii)에 의하여 $a = -\frac{1}{2}$

# 4. 7

$g(x)=\int_0^x \{f(t)\}^3 dt+\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^3$에서

$g'(x)=\{f(x)\}^3+3f(x)\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^2=f(x)\times\left\{\{f(x)\}^2+3\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^2\right\}dt$

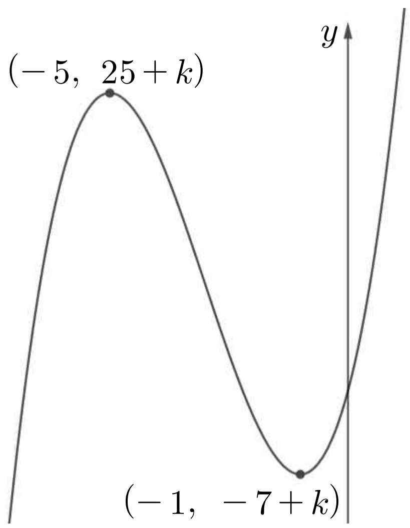
$\{f(x)\}^2+3\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^2 \geq 0$이므로 $g'(x)$의 부호가 변하는 구간과

$f(x)$의 부호가 변하는 구간이 같다.

함수 $g(x)$가 오직 하나의 구간을 가지므로 $g'(x)$의 부호가 변하는 $x$는 단 하나 뿐이고,

함수 $f(x)$의 부호가 변하는 $x$는 단 하나 뿐이다.

함수 $f(x)=x^3+9x^2+15x+k$의 그래프 개형은 다음과 같다.




$k$가 양수이므로 함수 $f(x)$의 부호가 변하는 $x$가 단 하나 뿐이기 위해서는 함수 $f(x)$의 극솟값인 $-7+k$이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $k$의 최솟값은 7이다.

참고 : $\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^3$의 미분은 세 함수의 곱의 미분으로 미분할 수 있다. (수2의 내용으로 미분할 수 있다.)

# 5. 16

방정식 $f(x)=0$의 실근이 하나 뿐이므로 함수 $f(x)$는 $x$축에 접한다.

$\int_0^{-1}|f(x)|dx<0$이고 $f'(0)=2>0$이므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수임을 알 수 있다. 따라서 $\int_0^{-1}|f(x)|dx=\int_0^{-1}f(x)dx$이다.

$f(x)=k(x-a)^2(a<0)$라 두면 $f'(0)=2$에서 $-2ak=2$, $k=-\frac{1}{a}$이고,

$f(x)=-\frac{1}{a}(x-a)^2=-\frac{1}{a}x^2+2x-a$에서

$\int_0^{-1}f(x)dx=\left[-\frac{1}{3a}x^3+x^2-ax\right]_0^{-1}=\frac{1}{3a}+a+1=a$에서

$a=-\frac{1}{3}$, $k=3$이고 $f(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

$3\times f(1)=16$

## 6. 15

$\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^n - x^3}{x^3} = -1$에서 $\{f(x)\}^n - x^3$은 최고차항의 계수가 $-1$인 삼차함수이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)$의 차수는 2 이하이다.

만약 함수 $f(x)$의 차수가 1 이하이면

$f'(x)$는 상수함수이므로 $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{f(x)} = 1$을 만족시킬 수 없다.

즉 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x) = x^2 + ax + b$에서

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{f(x)} = 1$이므로 $f(0) = b = 0$이어야 하고,

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x^2 + ax} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x + a} = 1$이므로 $a = 2$이다.

따라서 $f(x) = x^2 + 2x$에서 $f(3) = 15$

참고 : $n = 1$인데 출제자는 $n$의 값도 같이 물어보는 것을 까먹었다고 한다.

# 7. 39

$x^2f(x)=\left\{xf'(x)-\int_{-1}^{k}f(t)dt\right\}^2$에 $x=0$을 대입하면 $\int_{-1}^{k}f(t)dt=0$이므로

$x^2f(x)=\{xf'(x)\}^2$, $f(x)=\{f'(x)\}^2$ $\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$의 차수를 $n$이라 하면 ㉡의 좌변의 차수는 $n$, 우변의 차수는 $2n-2$이므로

$n=2$, $f(x)$는 이차함수이다. 즉, $f(x)=ax^2+bx+c\,(ac\neq 0)$

㉡에서 $\{f'(x)\}^2\geq 0$이므로 $f(x)\geq 0$이고, $\int_{-1}^{k}f(t)dt=0$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$k=-1$이다.

㉡에서 $f(x)=ax^2+bx+c$를 대입하면

$ax^2+bx+c=(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$

각 항의 계수를 비교하면 $a=\frac{1}{4}$, $c=b^2$, $f(x)=\frac{1}{4}x^2+bx+b^2$이다.

$f(k)=f(-1)=\frac{1}{4}-b+b^2=\frac{1}{4}$에서 $b=1$ $(\because c=b^2$이고, $b^2\neq 0)$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+1$, $4\times\int_{0}^{3}f(x)dx=4\times\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^3=39$

참고 : $f(x)$의 차수를 구하는 부분에서 $f(x)$의 차수가 0, 즉 $f(x)$가 상수함수인 경우도 있지만 $f(0)\neq 0$을 만족시킬 수 없다.

# 8. 54

(가)에서 $x>0$에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 갖기 위해서는 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 극솟값을 가져야 한다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=a(a>0)$에서 극솟값 $0$을 갖는다.
함수 $f(x)$의 극솟값이 $0$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이다.

만약 $x<0$에서 함수 $f(x)$가 극대가 되는 $x$가 존재하면 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이므로 (나)를 만족시킬 수 없다.
즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$가 극대가 되는 $x$가 존재하지 않고, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
$x \le 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)$임을 알 수 있고, $f(0)=0$이다.

$f(x)=x(x-a)^2$에서 $f(1)+f'(1)=(1-a)^2+(1-a)^2+2(1-a)=4$이고
$a=0$ 또는 $a=3$인데 $a>0$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=x(x-3)^2$, $f(6)=54$

# 9. 105

$g(x)=(x+2)f(x)$의 극값이 $0$이기 위해서는 $f(-2)=0$이어야 한다.

$h(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$의 극값이 $0$이기 위해서는

$h(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt=\frac{1}{3}(x-b)(x-c)^2$꼴이어야 하고,

$h(2)=0$이므로

(i) $c=2$인 경우

$h(x)=\frac{1}{3}(x-b)(x-2)^2$에서 $h'(x)=f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{2}{3}(x-b)(x-2)$

$f(-2)=0$이므로 $\frac{1}{3}(-4)^2+\frac{2}{3}(-2-b)(-4)=0$에서 $b=-4$,

$f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{2}{3}(x+4)(x-2)$에서 $f(1)=-3<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=2$인 경우

$h(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x-b)^2$에서 $h'(x)=f(x)=\frac{1}{3}(x-b)^2+\frac{2}{3}(x-2)(x-b)$

$f(-2)=0$이므로 $\frac{1}{3}(-2-b)^2+\frac{2}{3}(-4)(-2-b)=0$에서 $b=-2$ 또는 $b=-10$

$b=-2$이면 $f(x)=\frac{1}{3}(x+2)^2+\frac{2}{3}(x-2)(x+2)$에서

$f(1)=1$이므로 조건을 만족시키지 않고,

$b=10$이면 $f(x)=\frac{1}{3}(x+10)^2+\frac{2}{3}(x-2)(x+10)$에서 $f(1)=33>1$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\frac{1}{3}(x+10)^2+\frac{2}{3}(x-2)(x+10)=(x+10)(x+2)$이고

$f(5)=105$

<다른 풀이>

$h(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt=\frac{1}{3}(x-b)(x-c)^2$에서

$h'(-2)=f(-2)=0$이다.

(i) $c=2$인 경우

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로

구간 $(-2,\ 2)$에서 감소한다. 즉, 구간 $(-2,\ 2)$에서 $h'(x)=f(x)<0$이므로

$f(1)>1$을 만족시킬 수 없다.

(ii) $b=2$인 경우

$h'(-2)=0,\ h(-2)=0$에서 함수 $h(x)$의 극댓값이 $0$임을 알 수 있다.

함수 $h(x)$가 $x=-2$에서 극대이면 $h(-2)=0$이므로

$h(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x+2)^2,\ f(x)=\frac{1}{3}(x+2)^2+\frac{2}{3}(x-2)(x+2)$에서 $f(1)=1$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이고,

삼차함수의 비율관계에 의하여 함수 $h(x)$는 $x=-10$에서 극대임을 알 수 있다.

$h'(x)=f(x)=(x+10)(x+2)$에서 $f(1)=33>1$이므로 조건을 민족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x+10)(x+2)$이고

$f(5)=105$

참고 : <다른 풀이>는 계산을 최대한 줄이는 방향으로 나아간 풀이이다.

# 10. 6

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+k & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$에서

(i) $|f(x)|$가 $x=1$에서 연속인 경우
$|2+k|=1$에서 $k=-1$ 또는 $k=-3$
이때 함수 $f(-x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $|f(x)|f(-x)$도 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고
조건을 만족시킨다. 따라서 $k=-1$, $k=-3$

(ii) $|f(x)|$가 $x=1$에서 불연속인 경우
함수 $f(-x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고
함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이므로
함수 $|f(x)|f(-x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는
$x=1$에서 연속이어야 한다.
$\lim_{x \to 1+}|f(x)|f(-x)=-2+k$, $\lim_{x \to 1-}|f(x)|f(-x)=(2+k)(-2+k)$에서
$-2+k=(2+k)(-2+k)$에서 $k \neq -1$이므로 $k=2$

(i), (ii)에서 $k=-1$, $k=-3$, $k=2$이므로 모든 $k$의 값의 곱은 $6$

# 11. 16

함수 $f(x)$는 무조건 극값 $m$을 가지므로
함수 $g(t)$가 불연속이 되는 $t$의 값은 방정식 $tf(t)=m$의 실근과 같다.
함수 $g(t)$가 $t=0,\ t=3$이므로 방정식 $tf(t)=m$의 모든 실근이 $t=0,\ t=3$이다.
따라서 $m=0$

$tf(t)=at(t-3)^2$ 또는 $tf(t)=at^2(t-3)$에서
$f(t)=a(t-3)^2$ 또는 $f(t)=at(t-3)$인데 $m=0$에서 함수 $f(x)$의 극값이 $0$이므로
$f(t)=a(t-3)^2$이다.

$f(4)=a=4$에서 $f(t)=4(t-3)^2$이고, $f(5)=16$

# 12. ②

(가)에서 모든 음수 $x$에 대하여 $\int_x^0 f(t) \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고, 모든 음수 $x$에 대하여 $f(x) \geq 0$이다.

$f(3)=0$이므로 $f(x)=k(x-\alpha)(x-3)\,(k>0)$이라 두면
모든 음수 $x$에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로 $\alpha \geq 0$이다.

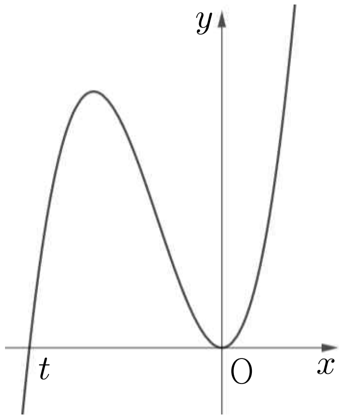
$\int_0^3 f(t)dt = k \times \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3+\alpha}{2}x^2 + 3\alpha x\right]_0^3 = \frac{9}{2}k(\alpha-1) \leq 0$에서 $k>0$이므로 $\alpha \leq 1$이다.
따라서 $f(x)=k(x-\alpha)(x-3)\,(0 \leq \alpha \leq 1)$이고
$\frac{f(9)}{f(6)} = \frac{18-2\alpha}{6-\alpha} = 2 - \frac{6}{\alpha-6}\,(0 \leq \alpha \leq 1)$

$2-\frac{6}{\alpha-6}$은 $\alpha=0$에서 최솟값 $m=3$을 갖고, $\alpha=1$에서 최댓값 $M=\frac{16}{5}$를 갖는다.
$M-m=\frac{1}{5}$

# 13. 13

(i) $t < 0$

$y = |t|x^2(x-t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



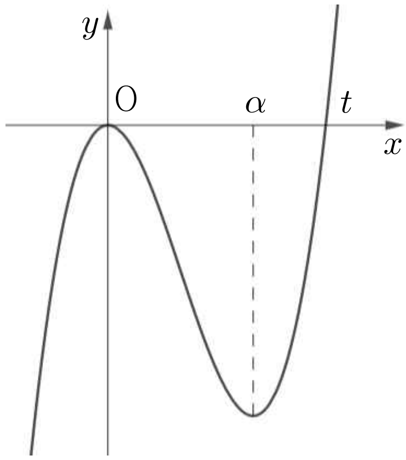

즉, 함수 $y = |t|x^2(x-t)$는 $x = 0$에서 극솟값 0을 갖고, $f(t) = 0$

(ii) $t = 0$

$y = 0$이므로 극솟값 0을 갖고, $f(t) = 0$

(iii) $t > 0$

$y = |t|x^2(x-t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




즉, 함수 $y = |t|x^2(x-t)$는 $x = \alpha\,(\alpha \neq 0)$에서 극솟값을 갖는다.

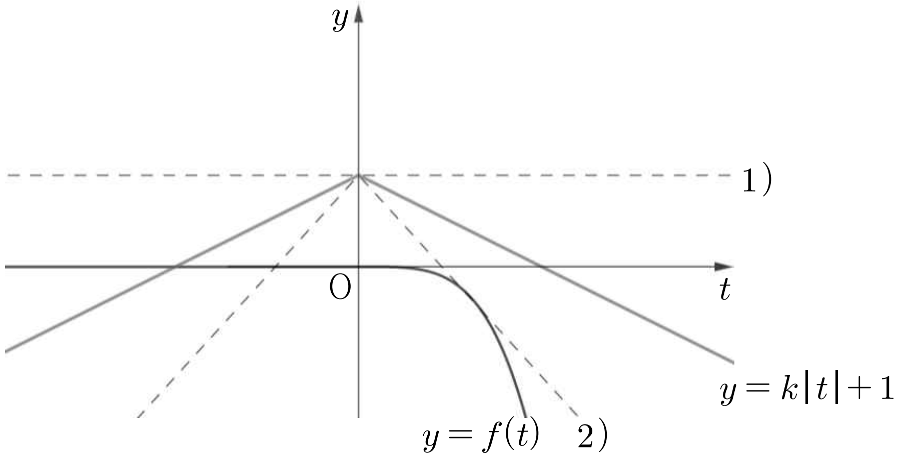
$y = |t|x^2(x-t)$에서 $y' = 2|t|x(x-t) + |t|x^2 = 0$ $\alpha = \dfrac{2}{3}t$

즉, $y = |t|x^2(x-t)$은 $x = \dfrac{2}{3}t$에서 극솟값 $-\dfrac{4}{27}t^4$을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t\le 0)\\ -\dfrac{4}{27}t^4 & (t>0)\end{cases}$$ 이고, 방정식 $f(t)=k|t|+1$이 오직 하나의 실근을 가지므로

두 함수 $y=f(t)$, $y=k|t|+1$의 그래프가 단 한점에서만 만난다.




그림과 같이 $k$의 값이 1)인 경우보다 작고 2)인 경우보다 커야한다.

1)인 경우에서 $k<0$

2)인 경우는 직선 $y=kt+1$가 곡선 $y=-\dfrac{4}{27}t^4$와 $t>0$에서 접하는 경우이다.

$y=-\dfrac{4}{27}t^4$위의 점 $\left(a,\ -\dfrac{4}{27}a^4\right)(a>0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{16}{27}a^3(x-a)-\dfrac{4}{27}a^4$, 이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-\dfrac{16}{27}a^3(-a)-\dfrac{4}{27}a^4$, $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y=-\dfrac{4}{9}\sqrt{6}k+1$이므로 $-\dfrac{4}{9}\sqrt{6}<k$

즉 $k$의 범위는 $-\dfrac{4}{9}\sqrt{6}<k<0$에서 $a+b=-\dfrac{4}{9}\sqrt{6}=-\dfrac{q}{p}\sqrt{6}$, $p+q=13$

참고 : (ii)에서 상수함수는 모든 구간에서 극대이고 극소이므로 $y=0$은 극솟값 0을 갖는다.

# 14. 13

$g(x)=\int_1^x |f(t)|\times\{f(x)-f(t)\}\times\{f(x)+f(t)\}dt$

$=\int_1^x |f(t)|\times\left\{\{f(x)\}^2-\{f(t)\}^2\right\}dt=\int_1^x |f(t)|\{f(x)\}^2dt-\int_1^x |f(t)|\{f(t)\}^2dt$

$=\{f(x)\}^2\int_1^x |f(t)|dt-\int_1^x |f(t)|\{f(t)\}^2dt$

$g'(x)=2f'(x)f(x)\int_1^x |f(t)|dt+\{f(x)\}^2|f(x)|-\{f(x)\}^2|f(x)|=2f'(x)f(x)\int_1^x |f(t)|dt$

$g'(x)=2f'(x)f(x)\int_1^x |f(t)|dt$에서 $f(x)=(x+2)^2(x-3)$,

$f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$이므로

$g'(x)=2(x+2)^3(x-3)(3x-4)\int_1^x |f(t)|dt$

함수 $\int_1^x |f(t)|dt$는 $x<1$에서 $\int_1^x |f(t)|dt<0$, $x>1$에서 $\int_1^x |f(t)|dt>0$이므로

$g'(x)=2(x+2)^3(x-3)(3x-4)\int_1^x |f(t)|dt$의 부호가 변하는 $x$의 값은

$-2$, $3$, $\frac{4}{3}$, $1$ 뿐이고, 이때 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소이다.

따라서 $-2+3+\frac{4}{3}+1=\frac{10}{3}=\frac{q}{p}$, $p+q=13$

# 15. 81

$f(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + c\,(b \neq 0)$이라 두면
$g(x) = f'(0)x + f(0) = bx + c$이다.
즉, 두 직선 $y = bx + c + 32$, $y = -bx + c$ 모두 곡선 $y = 8x^3 + ax^2 + bx + c$에 접하고,
두 방정식 $8x^3 + ax^2 + bx + c = bx + c + 32$, $8x^3 + ax^2 + bx + c = -bx + c$가
모두 중근을 갖는다.
$8x^3 + ax^2 + bx + c = bx + c + 32$ 에서 $8x^3 + ax^2 = 32$이므로
방정식 $8x^3 + ax^2 = 32$의 중근이 존재하려면 함수 $y = 8x^3 + ax^2$이 극값 32를 가져야 한다.
$y' = 24x^2 + 2ax = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = -\dfrac{1}{12}a$
$x = 0$에서 함수 $y = 8x^3 + ax^2$의 극값은 0이므로
$x = -\dfrac{1}{12}a$에서 함수 $y = 8x^3 + ax^2$가 극값 32를 가져야 한다.
$8\left(-\dfrac{1}{12}a\right)^3 + a\left(-\dfrac{1}{12}a\right)^2 = \dfrac{4}{12^3}a = 32$, $a^3 = 12^3 \times 2^3$에서 $a = 24$

$8x^3 + 24x^2 + bx + c = -bx + c$에서 $8x^3 + 24x^2 + 2bx = x\left(8x^2 + 24x + 2b\right) = 0$이므로
방정식 $x\left(8x^2 + 24x + 2b\right) = 0$이 중근을 가지려면 방정식 $8x^2 + 24x + 2b = 0$이
중근을 가져야 한다. ($\because b \neq 0$)
$8x^2 + 24x + 2b = 0$의 판별식인 $D = 24^2 - 4 \times 8 \times 2b = 0$이므로 $b = 9$이다.

따라서 $f(x) = 8x^3 + 24x^2 + 9x + c$에서 $f'(x) = 24x^2 + 48x + 9$이므로
$f'(1) = 81$

# 16. 100

(가)에서 함수 $|f(x)|g(x)$는 $f(x)=0$, $g(x)\neq 0$인 $x$에서 미분가능하지 않을 수 있다.
즉, $f(2)=0$, $g(2)\neq 0$

(나)에서 함수 $f(x)|g(x)|$는 $g(x)=0$, $f(x)\neq 0$인 $x$에서 미분가능하지 않을 수 있다.
즉, $g(4)=0$, $f(4)\neq 0$
$g(4)=0$이므로 $g(x)=(x-4)(x-k)$로 둘 수 있고, $k=4$이면 함수 $f(x)|g(x)|$가 $x=4$에서 미분가능하므로 $k\neq 4$이다.

$g(x)=(x-4)(x-k)$에서 만약 $f(k)\neq 0$이면 함수 $f(x)|g(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않으므로 (나)를 만족시키지 못한다. 즉, $f(k)=0$
$f(x)=(x-2)(x-k)(x-p)$이고 (가)에 의하여 $k$와 $p$는 2가 아니다.

$f(x)=(x-2)(x-k)(x-p)$, $g(x)=(x-4)(x-k)$에서
함수 $|f(x)|g(x)$는 $x=p$에서도 미분가능해야 하므로 $g(p)=0$에서 $p=4$ 또는 $p=k$인데
$f(4)\neq 0$이므로 $p=k$이어야 한다.
즉, $f(x)=(x-2)(x-k)^2$, $g(x)=(x-4)(x-k)$

$f'(0)+g'(0)=24$에서 $(-k)^2+2(-2)(-k)-k-4=0$이므로 $k=-7$ 또는 $k=4$인데
$k\neq 4$이므로 $k=-7$이다.

따라서 $f(x)=(x-2)(x+7)^2$, $f(3)=100$

## 17. ②

$\lim_{x \to k} \frac{f(x)-f(k)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}$에서 극한값이 $0$이 아니므로

$(k^2-1)^2 = 0$, $k=1$ 또는 $k=-1$

(i) $k=1$

$f(1) \times f'(1) = 1$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x^2-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)^2(x-1)^2}$이므로 극한값이 존재하려면

$f(x)-f(1)$은 $(x-1)^2$을 인수로 가지고, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.

즉, $f(1) \times f'(1) = 1$을 만족시키지 못한다.

(ii) $k=-1$

$f(1) \times f'(1) = -1$, $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x^2-1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)^2(x-1)^2}$이므로 극한값이 존재하려면

$f(x)-f(-1)$은 $(x+1)^2$을 인수로 가진다. 즉, $f(x) = -(x-a)(x+1)^2 + f(-1)$

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)^2(x-1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{-(x-a)(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{-x+a}{(x-1)^2} = \frac{1+a}{4} = \frac{1}{4}$, $a=0$

$f(x) = -x(x+1)^2 + f(-1)$에서 $f(1) = -4 + f(-1)$, $f'(1) = -8$이므로

$f(1) \times f'(1) = -1$에서 $f(-1) = \frac{33}{8}$이고

$f(x) = -x(x+1)^2 + \frac{33}{8}$, $f(0) = \frac{33}{8}$

# 18. 27

$g(t)$가 불연속인 경우는 함수 $f(x)$의 극값 $k$에 대하여 방정식 $|t|=k$의 실근과 같다.
함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$가 극값 $0$을 가진다는 것을 알 수 있다.

만약 함수 $f(x)$의 극댓값이 $0$이면 $t \neq 0$에서 $g(t)=1$이므로 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=3$를 만족시킬 수 없다.
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값이 $0$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이다.
함수 $f(x)$의 극댓값을 $M(M>0)$이라 하자.

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>M,\ t<-M) \\ 2 & (t=M,\ t=-M,\ t=0) \\ 3 & (0<t<M,\ -M<t<0) \end{cases}$$

$g(t)$가 불연속인 경우는 $t=0.$ $t=M,$ $t=-M$이다.
함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서만 불연속이므로 $t=M,$ $t=-M$에서는 연속이어야 한다.

$\lim_{t\to -M-} f(t)g(t)=f(-M),$ $\lim_{t\to -M+} f(t)g(t)=3f(-M)$에서 $f(-M)=0$이고
같은 방법으로 $f(M)=0$이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 $0$이므로 $f(x)=(x+M)(x-M)^2$이다.

$f(x)=(x+M)(x-M)^2$에서 $f'(x)=(x-M)^2+2(x+M)(x-M)=0$이고
$x=-\frac{1}{3}M,$ $x=M$에서 함수 $f(x)=(x+M)(x-M)^2$가 $x=-\frac{1}{3}M$에서 극대이므로
$f\left(-\frac{1}{3}M\right)=\left(-\frac{1}{3}M+M\right)\left(-\frac{1}{3}M-M\right)^2=M$에서 $M>0$이므로 $M=\frac{3\sqrt{6}}{8}$이다.
$f'(x)=(x-M)^2+2(x+M)(x-M)$에서 $f'(0)=-M^2=-\frac{27}{32}$이므로
$32\times|f'(0)|=27$

참고 : $M=\frac{3\sqrt{6}}{8}$에서 $\left|-\frac{1}{2}\right|<\frac{3\sqrt{6}}{8}$이므로 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=3$을 만족시킨다.

# 19. ③

$h(x)=f'(x)g(x)-\int_0^x (2u+3)g(u)du\,h(x)=(x^2+3x)g(x)-\int_0^x (2u+3)g(u)du$

$h'(x)=(2x+3)g(x)+(x^2+3x)g'(x)-(2x+3)g(x)=x(x+3)f(|x|)$

함수 $h(x)$가 극대 또는 극소인 $x$의 개수가 2이기 위해서는
$x(x+3)f(|x|)$의 부호가 변하는 $x$의 개수가 2이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+k$에서 $x \geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x \geq 0$에서 증가한다.
즉, 함수 $f(|x|)$는 $x=0$에서만 극값을 갖고, $x=0$에서 극소이자 최소이다.

$x(x+3)f(|x|)$의 부호가 변하는 $x$의 개수가 2이기 위해서 가능한 경우는 다음과 같다.

(i) $f(|x|)$의 최솟값이 0 이상인 경우
$x(x+3)f(|x|)$의 부호가 변하는 $x$는 0과 3이므로 만족시킨다.
즉, $f(0)\geq 0$에서 $k \geq 0$이다.

(ii) $f(|x|)$의 최솟값이 음수인 경우
$f(x)=0$인 양수 $x$의 값을 $\alpha$라 두면
$x<-\alpha$에서 $f(|x|)>0$, $-\alpha<x<\alpha$에서 $f(|x|)<0$, $\alpha<x$에서 $f(|x|)>0$이므로
$x(x+3)f(|x|)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 무조건 부호가 변한다.
즉, 조건을 만족시키기 위해서는 $x(x+3)f(|x|)$가 $x=-3$에서 부호가 변하지 않아야 한다.
따라서 $\alpha=3$이고, $f(3)=\frac{45}{2}+k=0$에서 $k=-\frac{45}{2}$

(i), (ii)에 의하여 $k=-\frac{45}{2}$ 또는 $k \geq 0$이므로

$k$의 최솟값은 $-\frac{45}{2}$

# 20. 126

(i) $n=3$

$|f(x)-x^3|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이다.

만약 $f(x)-x^3$이 이차함수이면 $|f(x)-x^3|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이 될 수가 없다.

따라서 $f(x)-x^3$은 이차함수가 아니며, $f(x)=x^3+ax+b$이다.

$f(1)=1+a+b=1$에서 $b=-a$이고 $f(x)=x^3+ax-a$이다.

(ii) $n=2$

$|f(x)-x^2|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이다.

$|f(x)-x^2|=|x^3-x^2+ax-a|=|(x-1)(x^2+a)|$에서

$|(x-1)(x^2+a)|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이기 위해서는

방정식 $x^2+a=0$가 $x=1$을 근으로 갖거나, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+a \geq 0$이어야 한다.

즉, $a=-1$ 또는 $a \geq 0$

(iii) $n=1$

$|f(x)-x|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이다.

$|f(x)-x|=|x^3+(a-1)x-a|=|(x-1)(x^2+x+a)|$에서

$|(x-1)(x^2+x+a)|$이 미분가능하지 않은 점의 개수가 $1$이기 위해서는

방정식 $x^2+x+a=0$가 $x=1$을 근으로 갖거나, 모든 실수 $x$에 대하여

$x^2+x+a \geq 0$이어야 한다.

즉, $a=-2$ 또는 $a \geq \dfrac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 경우는

$f(x)=x^3+ax-a\left(a \geq \dfrac{1}{4}\right)$인 경우이고 $f(5)=125+4a \geq 126$

$f(5)$의 최솟값은 $126$

# 21. 4

$g(x)=ax^2-\left(2a-\frac{1}{2}\right)x+1$에서 $g(0)=1$, $g(2)=2$이므로

조건에 의하여 $f(0)=0$, $f(2)=2$이고 두 방정식 $f(x)=0$, $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 1과 2이다.

또, 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근이 0, 2, $p$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-p)+x$라 둘 수 있다.

방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

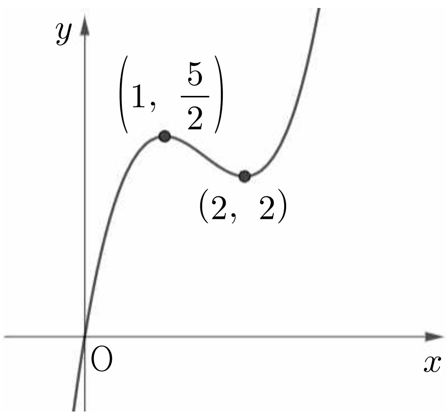
$f(x)=x(x-2)(x-p)+x=2$에서 $(x-2)\left(x^2-px+1\right)=0$에서

(i) 방정식 $x^2-px+1=0$의 실근이 2인 경우 $p=\frac{5}{2}$

(ii) 방정식 $x^2-px+1=0$이 중근을 갖는 경우 $p=-2$또는 $p=2$

(i), (ii)에서 $p>2$이므로 $p=\frac{5}{2}$이다. 즉, $f(x)=x(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)+x=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.




그림과 같이 방정식 $f(x)=\frac{5}{2}$의 실근의 개수가 2임을 알 수 있고,

$g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}a+\frac{9}{4}=2$에서 $a=-\frac{1}{5}$이다.

따라서 $\frac{1}{a^2\times p^2}=4$

참고 : $x(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)+x=\frac{5}{2}$에서 $(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$이므로 $g\left(\frac{5}{2}\right)=2$를 보일 수도 있다.

수2 문제지만 수2 내용을 쓰지 않아도 풀리는 안타까운 문제이다.

# 22. 10

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 $x$에서 불연속이다.

$f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ x+k & (-2<x<1) \end{cases}$ 에서 $f(-2)=f(1)=0$이므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=-2$, $x=1$에서 항상 불연속이다.

즉, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=-2$, $x=1$을 제외한 모든 실수 $x$에서 연속이어야 한다.

$f(x)=0$인 $x$도 $-2$와 $1$ 뿐이므로 $-2<x<1$에서 $f(x)\neq 0$이어야 한다.
$-2<x<1$에서 $f(x)>0$이려면 $k\ge 2$, $f(x)<0$이려면 $k\le -1$이므로
$k\ge 2$ 또는 $k\le -1$ $\cdots$ ㉠

$g(x)=\begin{cases} 2x^2+5x & (x\le k) \\ -4x+5 & (x>k) \end{cases}$ 에서

(i) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 연속인 경우
$2k^2+5k=-4k+5$에서 $k=-5$ 또는 $k=\dfrac{1}{2}$인데 ㉠에 의하여 $k=-5$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 경우
함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=-2$, $x=1$을 제외한 모든 실수 $x$에서 연속이어야 하므로
함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 불연속이거나 $x=1$에서 불연속이어야 한다.
즉, $k=-2$ 또는 $k=1$인데 ㉠에 의하여 $k=-2$

(i), (ii)에 의하여 $k=-5$, $k=-2$이고 모든 $k$의 값의 곱은 $10$

# 23. 25

$\{g(x)\}^2 \leq |f(x)g(x)| + 6g(x)$에서
$g(x) \geq 0$인 경우 $g(x) \leq |f(x)| + 6$, $g(x) \leq 0$인 경우 $g(x) \geq -|f(x)| + 6$,

따라서 $0 \leq g(x) \leq |f(x)| + 6$ 또는 $-|f(x)| + 6 \leq g(x) \leq 0$이다.

(i) $\int_0^3 g(x)dx$가 최대가 되는 경우는 구간 $[0,\ 3]$에서 $g(x) = |f(x)| + 6$인 경우이다.
구간 $[0,\ 3]$에서 $g(x) = |x^2 - 5x| + 6 = -x^2 + 5x + 6$이고,
$M = \int_0^3 (-x^2 + 5x + 6)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_0^3 = \frac{63}{2}$

(ii) $\int_0^3 g(x)dx$가 최소가 되는 경우는 구간 $[0,\ 3]$에서 $g(x) = 0$ 또는 $g(x) = -|f(x)| + 6$이다.
구간 $[0,\ 3]$에서 $-|f(x)| + 6 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$이므로
$\int_0^3 g(x)dx$가 최소가 되는 경우는 $g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2 - 5x + 6 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$인 경우이다.
$m = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 = -\frac{1}{6}$

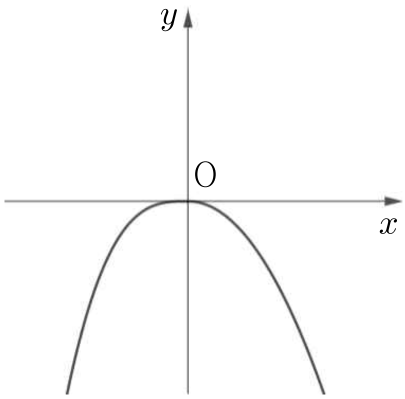
(i), (ii)에 의하여 $M = \frac{63}{2}$, $m = -\frac{1}{6}$, $M \times m = -\frac{21}{4} = -\frac{q}{p}$, $p + q = 25$

# 24. ②

$$h(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\le 0)\\ \displaystyle\int_0^x g(t)dt & (x>0)\end{cases}$$ 에서 $h'(x)=\begin{cases}f(x) & (x<0)\\ g(x) & (x>0)\end{cases}$ 이다.

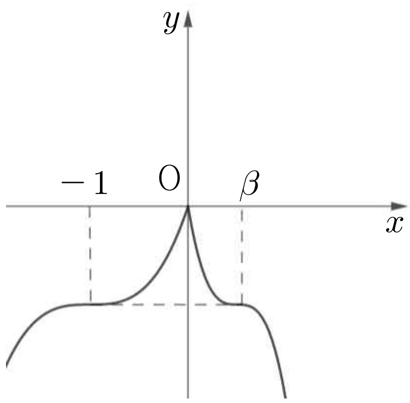
모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$, $g(x)\le 0$이므로 함수 $h(x)$는 $x<0$에서 증가, $x>0$에서 감소한다.

만약 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $f(0)=g(0)$이어야 하고,
모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$, $g(x)\le 0$이므로 $f(0)=g(0)=0$이어야 한다.
함수 $h(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




그림과 같이 함수 $|h(x)-h(k)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 1일 수 없다.
따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $|h(x)-h(k)|$도 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 즉, $k=-1$, $\alpha$, $\beta$일 때 함수 $|h(x)-h(k)|$는 $x=0$을 제외한 모든 실수 $x$에서 미분가능하다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



즉, $h'(-1)=f(-1)=0$, $h'(\beta)=g(\beta)=0$이고
$\alpha=0$이며 $h(-1)=h(\beta)$이다.
$h(\alpha)+h(\beta)=h(\beta)=-2$이므로 $h(-1)=-2$

$f(x)=p(x+1)^2$에서 $h(-1)=\int_0^{-1} p(x+1)^2 dx=p\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^{-1}=-\frac{p}{3}=-2$에서 $p=6$

따라서 $f(x)=6(x+1)^2$

$g(x)=q(x-\beta)^2$에서 $h(\beta)=\int_0^{\beta} q(x-\beta)^2 dx=q\left[\frac{1}{3}x^3-\beta x^2+\beta^2 x\right]_0^{\beta}=\frac{q}{3}\beta^3=-2$에서 $q=-\frac{6}{\beta^3}$

따라서 $g(x)=-\frac{6}{\beta^3}(x-\beta)^2$이다.

$h(2\beta)=\int_0^{2\beta} -\frac{6}{\beta^3}(x-\beta)^2 dx=-\frac{6}{\beta^3}\left[\frac{1}{3}x^3-\beta x^2+\beta^2 x\right]_0^{2\beta}=-4$이고,

$h(-4)=\int_0^{-4} 6(x+1)^2 dx=6\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^{-4}=-56$이므로

$(h \circ h)(2\beta)=-56$

<다른 풀이>

$f(x)=p(x+1)^2$에서 $h(-1)=\int_0^{-1} p(x+1)^2 dx=\int_1^{0} px^2 dx=-\frac{p}{3}=-2$에서 $p=6$이다.

따라서 $f(x)=6(x+1)^2$

$g(x)=q(x-\beta)^2$에서 $g(x)$는 $x=\beta$에서 대칭이므로

$\int_0^{\beta} q(x-\beta)^2 dx=\int_{\beta}^{2\beta} q(x-\beta)^2 dx=-2$이다.

즉, $h(2\beta)=\int_0^{2\beta} -\frac{6}{\beta^3}(x-\beta)^2 dx=\int_0^{\beta} -\frac{6}{\beta^3}(x-\beta)^2 dx+\int_{\beta}^{2\beta} -\frac{6}{\beta^3}(x-\beta)^2 dx=-4$

$h(-4)=\int_0^{-4} 6(x+1)^2 dx=\int_1^{-3} 6x^2 dx=-56$

$(h \circ h)(2\beta)=-56$

참고 : <다른 풀이>는 적분의 평행이동과 함수의 대칭성을 이용하여 계산을 최소화한 풀이이다.

# 25. 216

$g(x)=\begin{cases} |x|f(x) & (x<1) \\ x|f(x)| & (x \ge 1) \end{cases}$에서 $g(x)=\begin{cases} -xf(x) & (x<0) \\ xf(x) & (0 \le x < 1) \\ x|f(x)| & (1 \le x) \end{cases}$이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$f(1)=|f(1)|$에서 $f(1) \ge 0$이다.

(가), (나)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$x<1$에서

$g'(x)=\begin{cases} -f(x)-xf'(x) & (x<0) \\ f(x)+xf'(x) & (0<x<1) \end{cases}$인데

$f(0)>0$이면 $\lim\limits_{x \to 0-} g'(x)<0$, $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극대

$f(0)<0$이면 $\lim\limits_{x \to 0-} g'(x)>0$, $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x)<0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $f(0)=0$이고,

$f(x)=ax^2+bx$라 둘 수 있다.

만약 $b=0$이면 $f(1) \ge 0$에서 $a>0$이고 $g(x)=\begin{cases} -ax^3 & (x<0) \\ ax^3 & (x \ge 0) \end{cases}$이므로

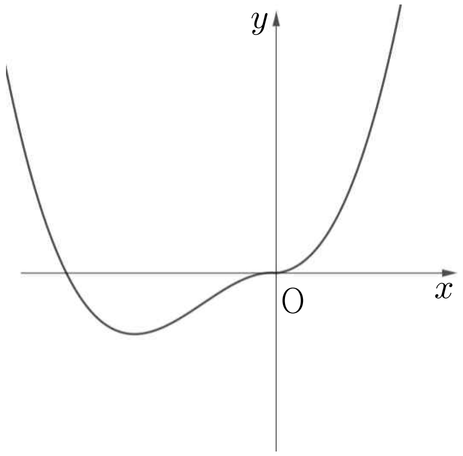
조건을 만족시킬 수 없다.

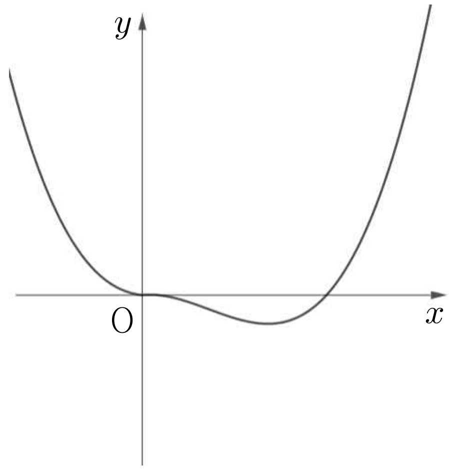
(i) $a>0$인 경우

$g(x)=\begin{cases} -x^2(ax+b) & (x<0) \\ x^2(ax+b) & (0 \le x < 1) \\ x|ax^2+bx| & (1 \le x) \end{cases}$에서 $f(1) \ge 0$이므로 $-\dfrac{b}{a} \le 1$이다.

즉, $1 \le x$에서 $x|ax^2+bx|=x^2(ax+b)$이고 $g(x)=\begin{cases} -x^2(ax+b) & (x<0) \\ x^2(ax+b) & (x \ge 0) \end{cases}$이다.

$-\dfrac{b}{a}<0$인 경우와 $0<-\dfrac{b}{a} \le 1$인 경우의 그래프를 그리면 각각 다음과 같다.



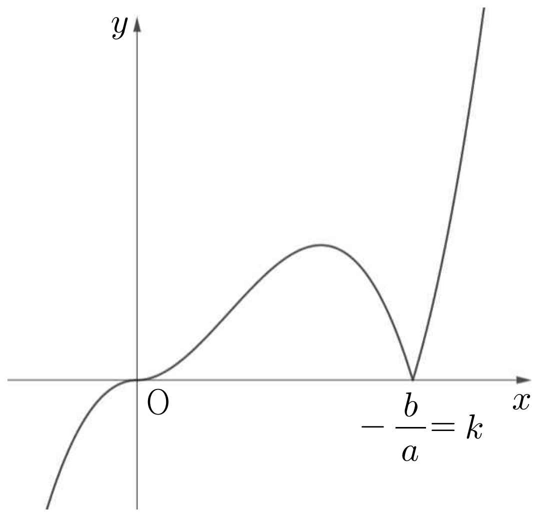




두 경우 모두 (가)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a<0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}-x^2(ax+b) & (x<0)\\ x^2(ax+b) & (0\le x<1)\\ x\left|ax^2+bx\right| & (1\le x)\end{cases}$$
에서 $f(1)\ge 0$이므로 $-\dfrac{b}{a}\ge 1$이다

따라서 $g(x)=\begin{cases}-x^2(ax+b) & \left(x<0 \text{ 또는 } x\ge -\dfrac{b}{a}\right)\\ x^2(ax+b) & \left(0\le x<-\dfrac{b}{a}\right)\end{cases}$ 이고, 그래프를 그리면 다음과 같다.




(가), (나) 모두 만족시킨다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이므로 $g'(2)=0$이다.

$g(x)=x^2(ax+b)$에서 $g'(2)=12a+4b=0$, $b=-3a$이다.

또, $g(2)=8$이므로 $g(2)=8a+4b=8$

따라서 $a=-2$, $b=6$이고 $f(x)=-2x^2+6x$이다.

$g(6)=6\times|f(6)|=216$

# 26. ④

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 f'(x)}{f(x) - x^{n-1}} = k \neq 0$에서

$n=1$인 경우

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 f'(x)}{f(x)} = k$이다. 극한값이 존재하므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-1)^2$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{2a(x-1)^3}{a(x-1)^2} = 0$이다. 그런데 $k \neq 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n=2$인 경우

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 f'(x)}{f(x) - x} = k$이다. 극한값이 존재하므로 $f(x) - x$는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-1)^2 + x$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2\{2(x-1)+1\}}{a(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{a} = k$이다.

따라서 $f(x) = \frac{1}{k}(x-1)^2 + x$

$n=3$인 경우

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 f'(x)}{f(x) - x} = k$이다. 극한값이 존재하므로 $f(x) - x^2$는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-1)^2 + x^2$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2\{2(x-1)+2x\}}{a(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{a} = k$이다.

따라서 $f(x) = \frac{2}{k}(x-1)^2 + x^2$

그런데 이차함수 $f(x)$의 개수가 1이고 $\frac{1}{k}(x-1)^2 + x$은 $k$가 어떤 값을 가지든 무조건 이차함수이므로 $\frac{2}{k}(x-1)^2 + x^2 = \left(\frac{2}{k}+1\right)x^2 - \frac{4}{k}x + \frac{2}{k}$가 이차함수가 아님을 알 수 있다.

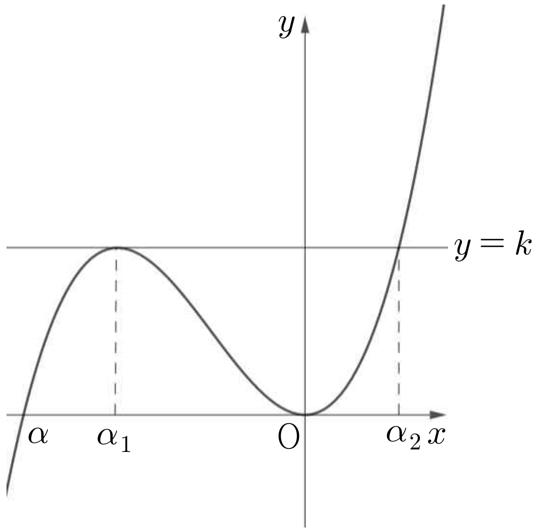
$\frac{2}{k} + 1 = 0$에서 $k = -2$

참고 : 이차함수 $f(x)$의 개수가 1이기 위한 경우는 위의 풀이와 같은 경우도 있지만 $\frac{1}{k}(x-1)^2 + x = \frac{2}{k}(x-1)^2 + x^2$인 경우도 있다. 하지만 이 경우를 만족시키는 $k$는 존재하지 않는다.

## 27. 12

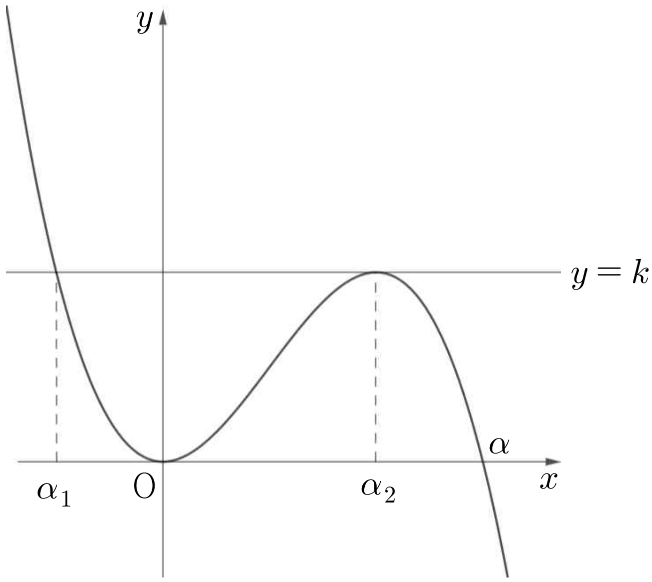
두 조건 (가), (나)에 의하여
함수 $f(x)$의 극댓값은 $k$, 극솟값은 $0$이고,
$f'(\alpha)=0$이면 (나)에 모순이므로 $f'(\alpha)\neq 0$이다.

(i) 최고차항의 계수가 양수인 경우




$f'(\alpha)>0$이므로 $\alpha_2=f'(\alpha)$이어야 하고, $\alpha_1=1$이어야 하는데 $\alpha_1<0$이므로 모순이다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수인 경우




$f'(\alpha)<0$이므로 $\alpha_1=f'(\alpha)$이어야 하고, $\alpha_2=1$이다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $0$, $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

$f(x) = px^2(x-\alpha) = px^3 - \alpha px^2$에서 $f'(1) = 0$이므로

$f'(1) = 3px^2 - 2\alpha px = 3p - 2\alpha p = 0$에서 $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}p$

$f\left(f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = f\left(\dfrac{9}{4}p\right) = f(1)$이므로

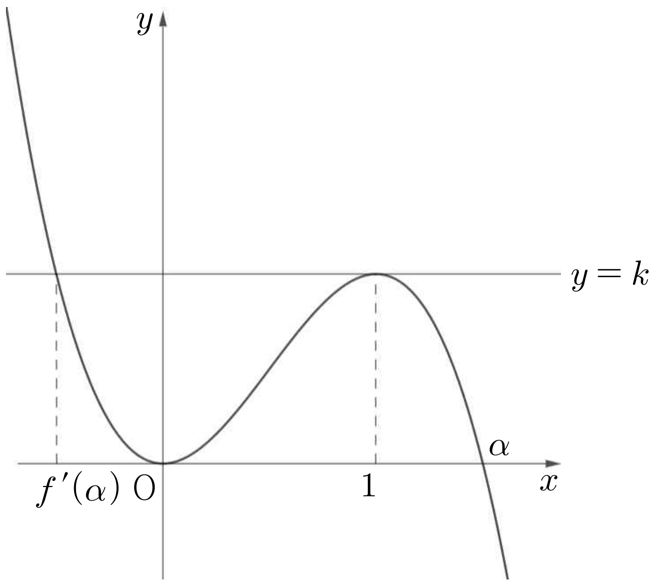
$p\left(\dfrac{9}{4}p\right)^3 - \dfrac{3}{2}p\left(\dfrac{9}{4}p\right)^2 = -\dfrac{1}{2}p$, $\left(\dfrac{9}{4}p\right)^3 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{9}{4}p\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 0$에서

$\dfrac{9}{4}p = q$라 두면 $q^3 - \dfrac{3}{2}q^2 + \dfrac{1}{2} = (q-1)^2(2q+1) = 0$에서 $q < 0$이므로 $q = -\dfrac{1}{2}$

따라서, $p = -\dfrac{2}{9}$, $f(x) = -\dfrac{2}{9}x^2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$이다.

$f(3) = -3$, $f'(3) = -4$에서 $f'(3) \times f(3) = 12$

<다른 풀이>




삼차함수의 비율관계에 의하여 $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$f(x) = px^2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$에서 $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$를 이용하면 $p = -\dfrac{2}{9}$이다.

참고 : <다른 풀이>는 삼차함수 비율관계를 이용해서 계산을 최소화한 풀이이다.

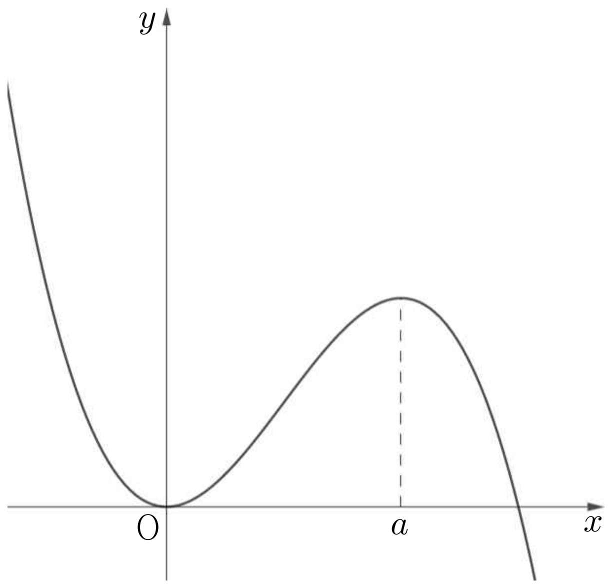
# 28. ②

최고차항의 계수가 $-1$이고 $f(0)=f'(0)=0$이므로 $f(x)=-x^2(x-k)$라 둘 수 있다.

$f'(x)=-3x^2+2kx$에서 $f'(a)=0$이므로 $k=\dfrac{3}{2}a$이다.

즉, $f(x)=-x^2\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)$

함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




모든 양수 $x$에 대하여 $f(x)\le f(a)$이고, $f(a)>0$이므로

$f(f(a))\le f(a)$이고, $f(a)\le f(f(a))$에서 $f(f(a))=f(a)$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=f(a)$에서 극대이고, $a=f(a)$이다.

$f(a)=-a^2\left(-\dfrac{1}{2}a\right)=a$에서 $a=\sqrt{2}$이고,

$a=f(a)$에서 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

참고 : 위의 풀이 말고 직접 대입해서 푸는 방법도 있다. 직접 대입해서 정리하면 $0\le\dfrac{3}{8}a^4-\dfrac{a^6}{8}-\dfrac{1}{2}$이고 이를 만족시키는 경우는 $a=\sqrt{2}$인 경우 뿐이다.

## 29. 8

$f(x)=2x-2+\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt$에서 $\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt=k$라 하면

$f(x)=2x-2+k$이다.

(i) $0 \le x \le 2$에서 $f(x)\ge 0$인 경우

$\int_0^2 |f(t)|dt=\int_0^2 f(t)dt$이므로 $\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt=k=0$이다.

즉, $f(x)=2x-2$인데 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)\ge 0$이 될 수 없다.

(ii) $0 \le x \le 2$에서 $f(x)\le 0$인 경우

$\int_0^2 |f(t)|dt=-\int_0^2 f(t)dt$이므로 $\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt=-2\int_0^2 f(t)dt=k$

$f(x)=2x-2+k$에서 $-2\int_0^2 f(t)dt=-2\int_0^2 (2x-2+k)dx=-2\left[x^2-2x+kx\right]_0^2=-4k=k$에서

$k=0$이다. 즉, $f(x)=2x-2$인데 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)\le 0$이 될 수 없다.

(iii) $0<\alpha<2$이고 $f(\alpha)=0$인 $\alpha$가 존재하는 경우

$\int_0^2 |f(t)|dt=-\int_0^\alpha f(t)dt+\int_\alpha^2 f(t)dt$이므로

$\int_0^2 |f(t)|dt-\int_0^2 f(t)dt=-2\int_0^\alpha f(t)dt=k$이다.

$f(\alpha)=0$에서 $2\alpha-2+k=0$, $k=-2\alpha+2$

$-2\int_0^\alpha f(t)dt=-2\left[x^2-2x+kx\right]_0^\alpha=-2\alpha^2+4\alpha-2k\alpha=k$

$k=-2\alpha+2$를 대입하면 $-2\alpha^2+4\alpha-2(-2\alpha+2)\alpha=-2\alpha+2$

$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$인데 $0<\alpha<2$이므로 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $k=-2\alpha+2=3-\sqrt{5}$

$f(x)=2x-2+k=2x+1-\sqrt{5}$

(i) ,(ii), (iii)에 의하여 $f(x)=2x+1-\sqrt{5}$이고 $f(4)=9-\sqrt{5}=p+q\sqrt{5}$, $p+q=8$

# 30. ⑤

(가)에서 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-3)f(x) \le 0$이므로 $x \le 3$이면
$f(x) \ge 0$, $x \ge 3$이면 $f(x) \le 0$이다. 따라서 $f(3)=0$이다.

$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)} = f(1)$에서 $f(1) \ne 0$이므로 극한값이 존재하려면
$f(-1)=0$이어야 한다.
(가)에서 $x \le 3$이면 $f(x) \ge 0$을 만족시키기 위해서는 $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가져야 한다.
즉, $f(x)=a(x+1)^2(x-3)$이다.

$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{f(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{f'(x)+k\}}{a(x+1)^2(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{f'(x)+k}{a(x+1)(x-3)} = f(1)$에서
$f(1) \ne 0$이므로 극한값이 존재하려면 $f'(-1)+k=0$이어야 한다.
$f(x)=a(x+1)^2(x-3)$에서 $k=0$이다.

$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{a(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{2a(x+1)(x-3)+a(x+1)^2}{a(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{2a(x-3)+a(x+1)}{a(x-3)} = 2 = f(1)$
이므로 $f(1)=a(1+1)^2(1-3)=-8a=2$에서 $a=-\frac{1}{4}$이다.

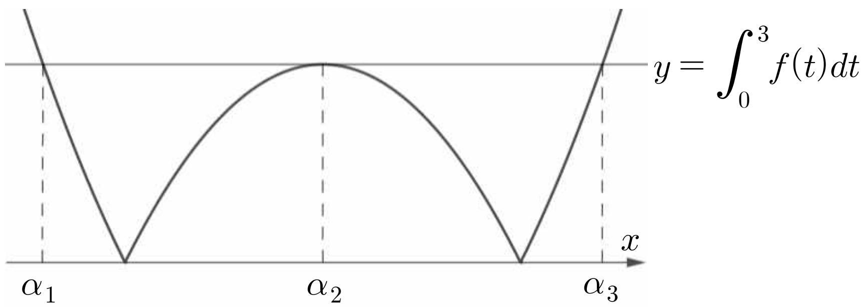
따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^2(x-3)$이고 $f'(k)=f'(0)=\frac{5}{4}$

## 31. ④

$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 \left| \frac{f(x)f(t)}{f(4)} \right| dt$에서 $\int_0^3 \left| \frac{f(x)f(t)}{f(4)} \right| dt = \left| \frac{f(x)}{f(4)} \right| \times \int_0^3 |f(t)| dt$이다.

$\int_0^3 f(t)dt = \left| \frac{f(x)}{f(4)} \right| \times \int_0^3 |f(t)| dt$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로

함수 $y = \left| \frac{f(x)}{f(4)} \right| \times \int_0^3 |f(t)| dt$의 그래프와 직선 $y = \int_0^3 f(t)dt$는 서로 세 점에서 만나야 한다.




즉, 함수 $y = \left| \frac{f(x)}{f(4)} \right| \times \int_0^3 |f(t)| dt$의 그래프가 직선 $x = \alpha_2$에 대칭이고,

$2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$이다. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_2 = 12$에서 $\alpha_2 = 4$이다.

$y = \left| \frac{f(x)}{f(4)} \right| \times \int_0^3 |f(t)| dt$가 $x = 4$에 대칭이고, 함수 $y = f(x)$도 $x = 4$에 대칭이다.

즉, $f(x) = (x-4)^2 + k$이다.

$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 \left| \frac{f(x)f(t)}{f(4)} \right| dt$의 실근 중 $\alpha_2 = 4$가 실근이므로 $x = 4$를 대입하면

$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 |f(x)| dt$이고, 이 식을 만족시키려면 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \geq 0$이어야 한다.

$f(x) = (x-4)^2 + k$는 구간 $[0,\ 3]$에서 $x = 3$일 때 최솟값 $k+1$을 가지므로 $k+1 \geq 0$,
$k \geq -1$이다.

$\int_0^1 f(x)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x + kx \right]_0^1 = \frac{37}{3} + k \geq \frac{37}{3} - 1 = \frac{34}{3}$에서

$\int_0^1 f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{34}{3}$

참고 : $\int_0^1 f(x)dx$의 계산을 평행이동을 이용하여 $\int_{-4}^{-3} (x^2+k)dx$로 계산하여 풀어도 된다.

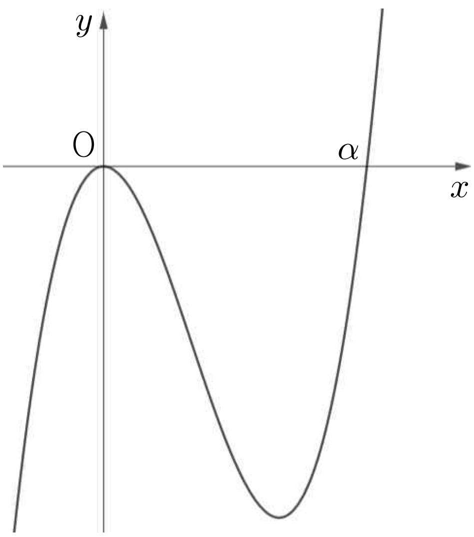
## 32. 52

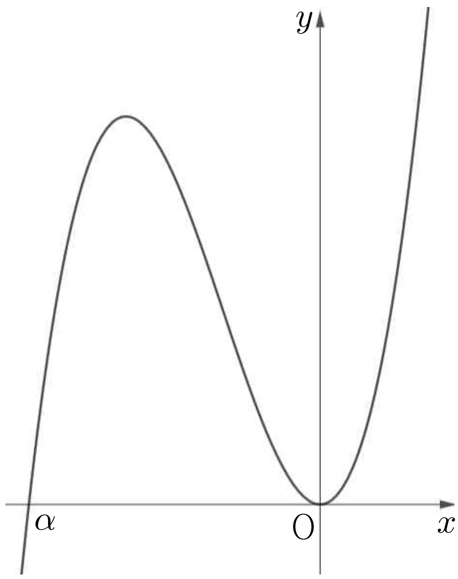
(i) $n$이 짝수인 경우

$x^n=81$의 실근은 $x=81^{\frac{1}{n}}$, $x=-81^{\frac{1}{n}}$이다.

$f(0)=f'(0)=f(\alpha)=0$에서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-\alpha)$이므로

$\alpha=81^{\frac{1}{n}}$, $\alpha=-81^{\frac{1}{n}}$인 경우 함수 $f(x)$의 그래프를 각각 그리면 다음과 같다.

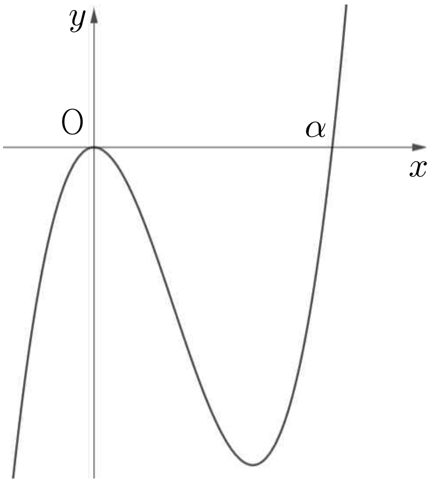



즉, $\alpha=-81^{\frac{1}{n}}$인 경우 극솟값이 0이므로 (나)를 만족시킨다.
따라서 $n$이 짝수이면 함수 $f(x)$가 무조건 존재한다.
$100$ 이하의 짝수의 개수는 $50$이다.

(ii) $n$이 홀수인 경우

$x^n=81$의 실근은 $x=81^{\frac{1}{n}}$이고, $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-\alpha)$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-\alpha)$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{2}x(x-\alpha)+\dfrac{1}{4}x^2=0$에서 $x=\dfrac{2}{3}\alpha$

함수 $f(x)$의 극솟값이 정수이므로 $f\left(\dfrac{2}{3}\alpha\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\alpha\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\alpha-\alpha\right)=-\dfrac{1}{27}\alpha^3$의 값이 정수이다.

$\alpha=81^{\frac{1}{n}}$이므로 $-\dfrac{1}{27}\alpha^3=-\dfrac{1}{3^3}\times 3^{\frac{12}{n}}=-3^{\frac{12}{n}-3}$이고 이 값이 정수이므로

$\dfrac{12}{n}-3$의 값이 정수이다. $n$이 홀수이므로 $n=1$ 또는 $n=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 $100$ 이하의 자연수 $n$의 개수는 $50+2=52$

# 33. 4

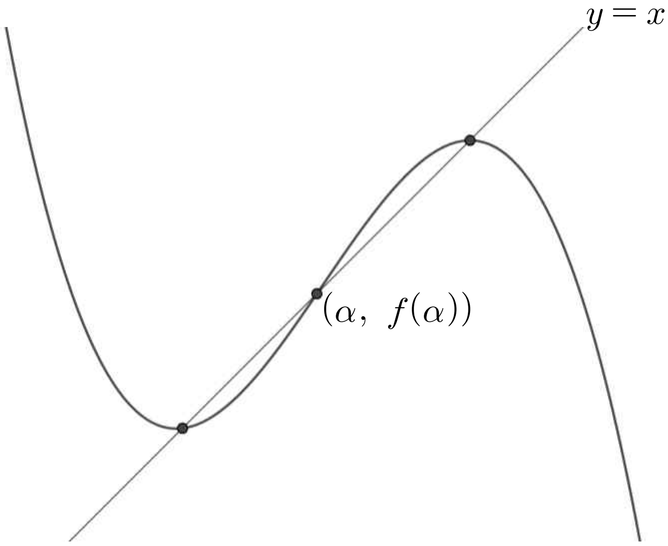
$\lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-f(t)} = 0$을 만족시키는 경우는 다음과 같다,

(i) $t \neq f(t)$인 경우는 무조건 $\lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-f(t)} = 0$이 성립한다.

(ii) $t = f(t)$인 경우는 $\lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-f(t)} = \lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'(t) = 0$이다.

즉, $t = f(t)$를 만족시키는 모든 실수 $t$에 대하여 $f'(t) = 0$이어야 한다.
$f(1) = 1$이므로 $f'(1) = 0$이다.

만약 $t = f(t)$, $t \neq 1$을 만족시키는 $t$가 존재한다고 하자.
$f'(t) = 0$이고 함수 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.




그림과 같이 $\alpha = f(\alpha)$이고 $f'(\alpha) \neq 0$인 $\alpha$가 존재하므로 조건을 만족시킬 수 없다.
따라서 $t = f(t)$을 만족시키는 $t$는 1 뿐이다.

$f(x) = -(x-k)(x-1)^2 + 1$라 두면 방정식 $x = -(x-k)(x-1)^2 + 1$의 실근은 1 뿐이다.
$x - 1 = -(x-k)(x-1)^2$에서 $1 = -(x-k)(x-1)$의 실근이 존재하지 않아야 한다.
$1 + (x-k)(x-1) = x^2 - (1+k)x + 1 + k = 0$의 판별식
$D = (1+k)^2 - 4(1+k) < 0$이고 $-1 < k < 3$이다.

$f(x) = -(x-k)(x-1)^2 + 1$에서 $f(0) = k + 1$이고 $-1 < k < 3$이므로 $0 < f(0) < 4$이고
$a + b = 4$

# 34. 53

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
이 직선의 $y$절편은 $g(t)=f(t)-tf'(t)$이다.

$$\int_{-1}^{3}g(t)dt=\int_{-1}^{3}f(t)dt-\int_{-1}^{3}tf'(t)dt$$

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(x-2)+1$이므로 $f(x+2)=f(x)+1$이다.

$$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x+2)dx=$$
$$\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)+1\}dx=2\int_{-1}^{1}f(x)dx+2=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{3}xf'(x)dx=\int_{0}^{4}(x-1)f'(x-1)dx=\int_{0}^{4}xf'(x-1)dx-\int_{0}^{4}f'(x-1)dx$$
$$=\frac{1}{4}-\int_{-1}^{3}f'(t)dt=\frac{1}{4}-f(3)+f(-1)$$

$f(x+2)=f(x)+1$에서 $f(3)=f(1)+1=f(-1)+2$이므로 $-f(3)+f(-1)=-2$

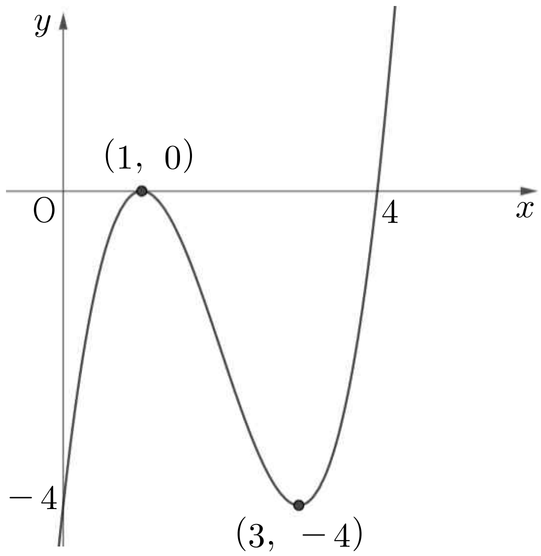
따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{3}xf'(x)dx=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$

$$\int_{-1}^{3}g(t)dt=\int_{-1}^{3}f(t)dt-\int_{-1}^{3}tf'(t)dt=\frac{8}{3}+\frac{7}{4}=\frac{53}{12}$$

$$12\int_{-1}^{3}g(t)dt=53$$

## 35. 1

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




(가), (나)에 의하여 $a=0$ 또는 $a=-4$이고, $-4<b<0$이다.

함수 $|f(x-b)|$는 $x=b+4$에서 미분가능하지 않고 $-4<b<0$에서 $0<b+4<4$이므로
함수 $g(x)$는 $x=b+4$에서 미분가능하지 않다.
즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 한다.

(i) $a=-4$
$x<0$에서 $g(x)=-4f(x)$이다.
$\lim_{x\to0-}g(x)=-4f(0)=16$, $\lim_{x\to0+}g(x)=|f(-b)|$인데
$-4<b<0$에서 $|f(-b)|\le 4$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $a=0$
$x<0$에서 $g(x)=0$이다.
$\lim_{x\to0-}g(x)=0$, $\lim_{x\to0+}g(x)=|f(-b)|$이고
$-4<b<0$에서 $|f(-b)|=0$을 만족시키려면 $b=-1$이어야 한다.
또, $b=-1$이면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능함을 알 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 $a=0$, $b=-1$이고 $a^2+b^2=1$

# 36. 23

$xf(x)g(x)=\left\{x-\int_0^2 f(t)dt\right\}\times\left\{x-\int_0^2 g(t)dt\right\}^2$에서 $x=0$을 대입하면

$0=-\int_0^2 f(t)dt\times\left\{\int_0^2 g(t)dt\right\}^2$이다.

$\int_0^2 f(t)dt=a$, $\int_0^2 g(t)dt=b$라 하자.

(i) $a=0$

$xf(x)g(x)=x(x-b)^2$에서 $f(x)g(x)=(x-b)^2$이므로

$f(x)=p(x-b)$, $g(x)=\frac{1}{p}(x-b)$이다,

$\int_0^2 f(t)dt=a=0$이므로 $\int_0^2 f(t)dt=\left[\frac{1}{2}px^2-bpx\right]_0^2=0$에서 $b=1$이다.

따라서 $f(x)=p(x-1)$, $g(x)=\frac{1}{p}(x-1)$

$\int_0^2 g(t)dt=b=1$인데 $\int_0^2 g(t)dt=\left[\frac{1}{2}px^2-2px\right]_0^2=0\neq 2$이므로 모순이다.

(ii) $b=0$

$xf(x)g(x)=x^2(x-a)$에서 $f(x)g(x)=x(x-a)$이므로

$f(x)=px$, $g(x)=\frac{1}{p}(x-a)$ 또는 $f(x)=p(x-a)$, $g(x)=\frac{1}{p}x$인데

$f(x)=p(x-a)$, $g(x)=\frac{1}{p}x$인 경우는 $b=0$을 만족시킬 수 없다.

따라서 $f(x)=px$, $g(x)=\frac{1}{p}(x-a)$

$\int_0^2 g(t)dt=b=0$이므로 $\int_0^2 g(t)dt=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_0^2=0$에서 $a=1$이다.

따라서 $f(x)=px$, $g(x)=\frac{1}{p}(x-1)$이고,

$a=1$에서 $p=\frac{1}{2}$이다.

(i), (ii)에서 $f(x)=\frac{1}{2}x$, $g(x)=2(x-1)$이고 $f(10)+g(10)=23$

## 37. ⑤

함수 $|f(x)|$가 $x=0$에서 극소이기 위한 조건은 다음 두 조건 중 하나이다.

(i) $f(0)=0$

(ii) $f(0)\geq 0$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이거나

$f(0)\leq 0$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대

즉, $f(0)=0$ 또는 $f'(0)=0$이다.

함수 $|f(x)-x-1|$가 $x=0$에서 극소이기 위한 조건은 다음 두 조건 중 하나이다.

(i) $f(0)=1$

(ii) $f(0)\geq 1$이고 함수 $f(x)-x-1$은 $x=0$에서 극소이거나

$f(0)\leq 1$이고 함수 $f(x)-x-1$은 $x=0$에서 극대

즉, $f(0)=1$ 또는 $f'(0)=1$이다.

$f(0)=0,\ f'(0)=1$ 또는 $f'(0)=0,\ f(0)=1$이므로

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+x$ 또는 $f(x)=x^3+ax^2+1$

$f(x)=x^3+ax^2+x$인 경우 $|f(x)|$는 무조건 $x=0$에서 극소이고

$|f(x)-x-1|$에서 $|f(0)|=0<1$이므로 함수 $f(x)-x-1$는 $x=0$에서 극대이다.

$f(x)-x-1=x^3+ax^2-1$가 $x=0$에서 극대이려면 $a<0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+1$인 경우 $|f(x)-x-1|$는 무조건 $x=0$에서 극소이고

$|f(x)|$에서 $f(0)=1>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

$f(x)=x^3+ax^2+1$가 $x=0$에서 극소이려면 $a>0$이어야 한다.

위 조건들을 모두 종합하면

(i) $f(x)=x^3+ax^2+x\ \ (a<0)$

(ii) $f(x)=x^3+ax^2+1\ \ (a>0)$

ㄱ. (참)

ㄴ. $f'(1)=2$에서

(i)인 경우 $f'(x)=3x^2+2ax+1$에서 $f'(1)=4+2a=2$에서 $a=-1$

(ii)인 경우 $f'(x)=3x^2+2ax$에서 $f'(1)=3+2a=2$에서 $a=-\frac{1}{2}$인데 $a>0$이므로 모순

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x$이고 $f(-2)=-14$. (참)

ㄷ. $0<f(1)<5$에서

(i)인 경우 $f(x)=x^3+ax^2+x\,(a<0)$에서 $0<f(1)<5$이므로 $-2<a<0$이다.

$f(x)=x^3+ax^2+x=x\left(x^2+ax+1\right)$에서

$-2<a<0$이므로 방정식 $x^2+ax+1=0$은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

(ii)인 경우 $f(x)=x^3+ax^2+1\,(a>0)$에서 $0<f(1)<5$이므로 $0<a<3$이다.

함수 $f(x)$는 극솟값 1을 가지므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 점에서만 만난다.

따라서 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

두 경우 모두 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다. (참)

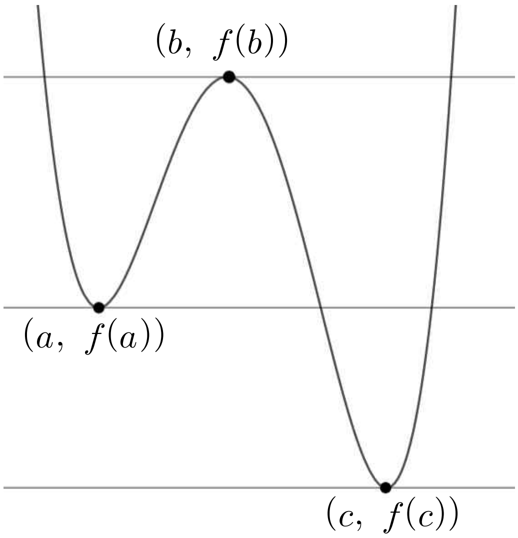
이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

## 38. 135

$B - A = \varnothing$에서 $B \subset A$이고, $A$의 원소이며 $B$의 원소가 아닌 것은 $0$ 뿐이다.

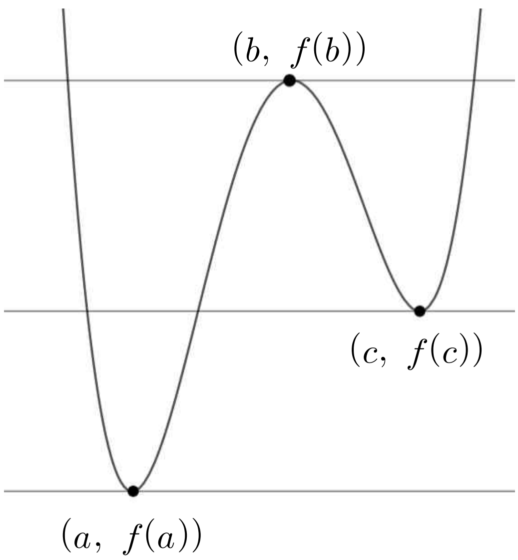
(i) 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하는 경우

(1)



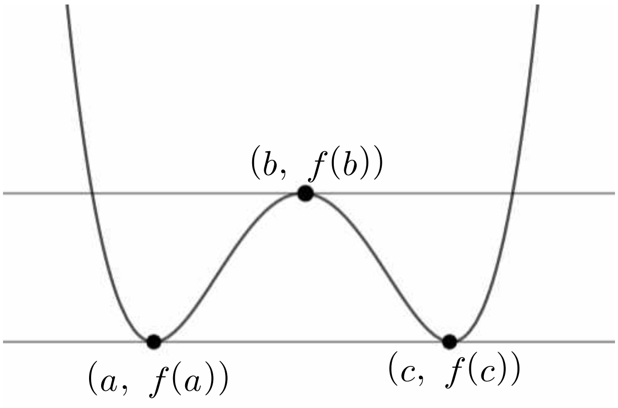

$A = \{t \mid t > f(b)$ 또는 $f(c) < t < f(a)\}$
$B = \{t \mid t > c$ 또는 $a < t < b\}$
이므로 집합 $A - B$의 원소의 개수가 $1$일 수 없다.

(2)




$A = \{t \mid t > f(b)$ 또는 $f(a) < t < f(c)\}$
$B = \{t \mid t > c$ 또는 $a < t < b\}$
이므로 집합 $A - B$의 원소의 개수가 $1$일 수 없다.

(3)



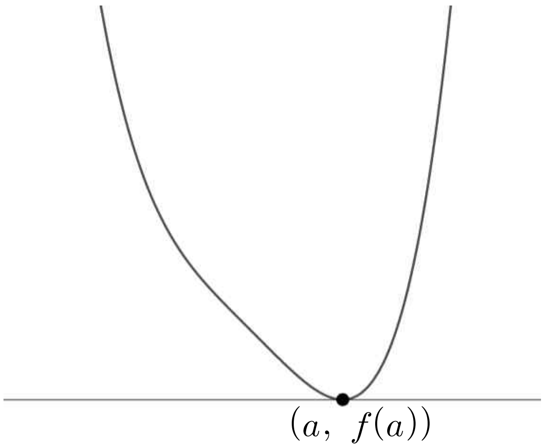

$A=\{t|t>f(b)$ 또는 $t=f(a)\}$

$B=\{t|t>c$ 또는 $a<t<b\}$

이므로 집합 $A-B$의 원소의 개수가 $1$일 수 없다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하지 않는 경우

(1)

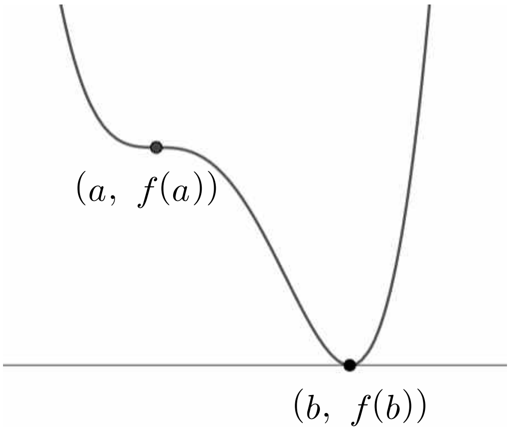



$A=\{t|t>f(a)\}$

$B=\{t|t>a\}$

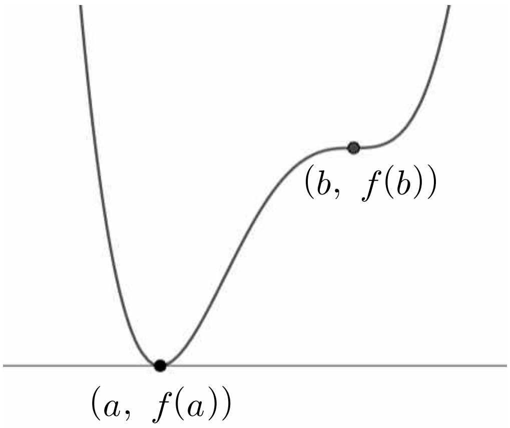
이므로 집합 $A-B$의 원소의 개수가 $1$일 수 없다.

(2)




$A=\{t|t>f(b)\}$
$B=\{t|t>b\}$
이므로 집합 $A-B$의 원소의 개수가 1일 수 없다.

(3)




$A=\{t|t>f(a)\}$
$B=\{t|t>a$ 이고 $t\neq b\}$
이므로 $B\subset A$이고 집합 $A-B$의 원소의 개수가 1이기 위해서는
$f(a)=a$이어야 한다. $A-B=\{0\}$에서 $b=0$이다.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=3x^3(x-p)$라 두면 $f'(a)=0$에서
$f'(a)=12a^3-9pa^2=0,\ \dfrac{4}{3}a=p$이고 $f(x)=3x^3\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)$
$f(a)=3a^3\left(a-\dfrac{4}{3}a\right)=a,\ a=-1,$
(i), (ii)에 의하여 $f(x)=3x^3\left(x+\dfrac{4}{3}\right)$이고 $f(-3)=135$

# 39. 1

$\dfrac{f'(x)}{6} = g(0)x^2 + g\left(-\dfrac{1}{8}\right)x + g\left(\dfrac{1}{8}\right)$에서 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 $12$이므로

$g(0) = 2$이다. 즉, 함수 $f(x)$가 극값을 가지고, 방정식

$g(0)x^2 + g\left(-\dfrac{1}{8}\right)x + g\left(\dfrac{1}{8}\right) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$이다.

이 방정식의 판별식 $D$에 대하여 $D = g\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2 - 4g(0)g\left(\dfrac{1}{8}\right) > 0$이어야 한다.

$g(0) = 2$이고 $g\left(\dfrac{1}{8}\right)$, $g\left(-\dfrac{1}{8}\right)$은 $3$ 이하의 자연수이므로

$g\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2 - 4g(0)g\left(\dfrac{1}{8}\right) > 0$에서 $g\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2 > 8g\left(\dfrac{1}{8}\right)$

이 부등식을 만족시키는 경우는 $g\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 3$, $g\left(\dfrac{1}{8}\right) = 1$인 경우 뿐이다.

$\dfrac{f'(x)}{6} = 2x^2 + 3x + 1$에서 $f'(x) = 12x^2 + 18x + 6$, $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + C$이다.

$g(0) = 2$이므로 함수 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + C$의 극값이 $0$이어야 하고,

$g\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 3$이므로 함수 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + C$의 극댓값이 $0$이어야 한다.

$f'(x) = 12x^2 + 18x + 6 = 12(x+1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$에서 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + C$는

$x = -1$에서 극대이므로 $f(-1) = -1 + C = 0$ 이고 $C = 1$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 1$이고 $f(0) = 1$

참고 : $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 1$의 극솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이므로 $g\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 3$을 만족시킨다.

# 40. 42

(가)에서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 $0$, $\alpha$이므로

$f'(0)=0$ 또는 $f'(\alpha)=0$이고, $f'(0)\neq f'(\alpha)$이다.

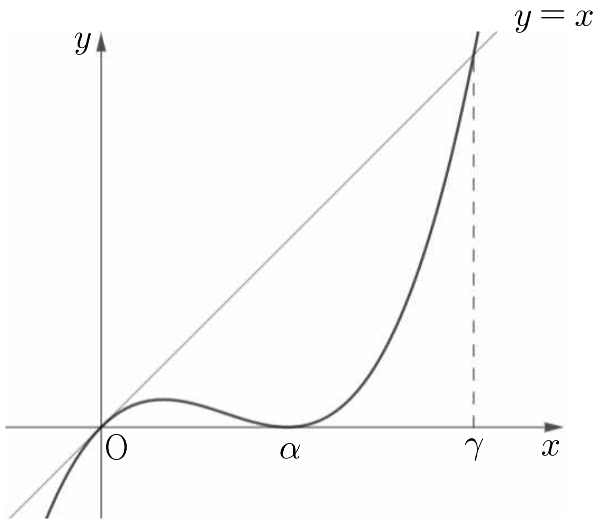
$(f\circ f')(0)=(f\circ f')(\alpha)=0$이므로 가능한 경우는 다음의 두 가지 경우이다.

(i) $f'(0)=\alpha$, $f'(\alpha)=0$

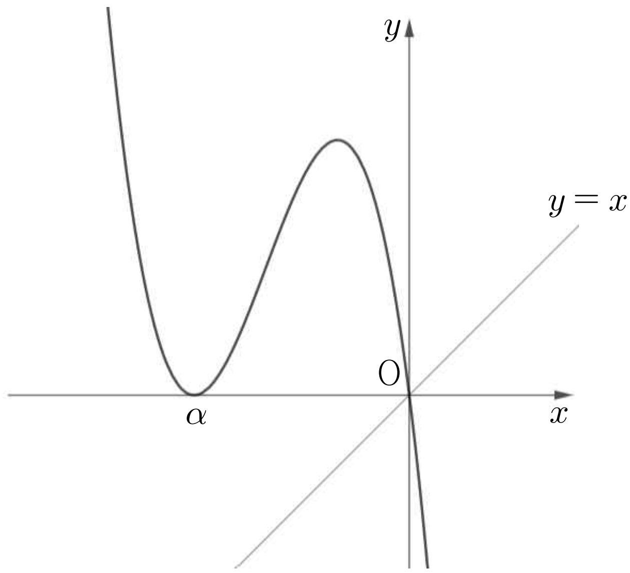
(ii) $f'(0)=0$, $f'(\alpha)=\alpha$

(i) $f'(0)=\alpha$, $f'(\alpha)=0$인 경우

$\alpha$와 $f'(0)$의 부호가 같으므로 가능한 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




$\alpha>0$



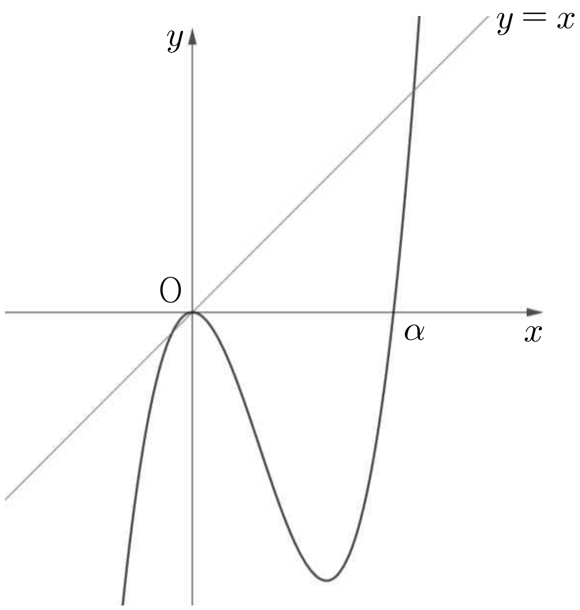

$\alpha<0$

$\alpha<0$인 경우는 (나)를 만족시키지 않는다.

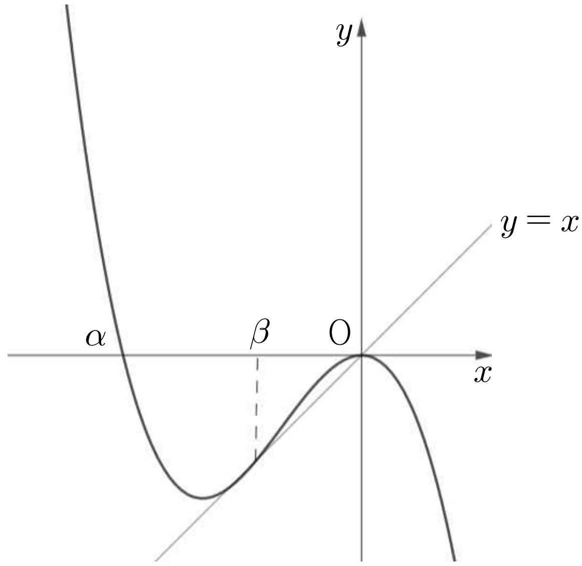
$\alpha>0$인 경우 $\beta=0$이고 $f'(\beta)=1$, $f'(\gamma)>1$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f'(0)=0$, $f'(\alpha)=\alpha$인 경우

$\alpha$와 $f'(\alpha)$의 부호가 같으므로 가능한 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




$\alpha>0$




$\alpha<0$

$\alpha>0$인 경우는 (나)를 만족시키지 않는다.

$\alpha<0$인 경우 $\gamma=0$이고 $f'(\gamma)=0$, $f'(\beta)=1$이므로 (나)를 만족시킨다.

$f(x)=kx(x-\beta)^2+x$라고 두면 $f'(0)=k(-\beta)^2+1=0$에서 $k=-\dfrac{1}{\beta^2}$이다.

$f(x)=-\dfrac{1}{\beta^2}x(x-\beta)^2+x=-\dfrac{1}{\beta^2}x^3+\dfrac{2}{\beta}x^2=0$에서 $\alpha=2\beta$

$f'(\alpha)=\alpha$에서 $f'(2\beta)=-\dfrac{3}{\beta^2}(2\beta)^2+\dfrac{4}{\beta}(2\beta)=2\beta$에서 $\beta=-2$이다.

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-x^2$

(i), (ii)에서 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-x^2$이고

$f(2)\times f'(2)=42$

# 41. 61

$g(x)+h(x)=2f(x)$, $g(x)\times|h(x)|=3\{f(x)\}^2$에서

$h(x)>0$인 경우

$g(x)+h(x)=2f(x)$, $g(x)\times h(x)=3\{f(x)\}^2$

$g(x)$, $h(x)$는 $t$에 대한 이차방정식 $t^2-2f(x)t+3\{f(t)\}^2=0$의 실근인데

이 방정식의 판별식 $D$에 대하여 $D=\{2f(x)\}^2-12\{f(x)\}^2=-8\{f(x)\}^2<0$이므로

실근을 가질 수 없다. 따라서 $h(x)<0$

$g(x)+h(x)=2f(x)$, $g(x)\times h(x)=-3\{f(x)\}^2=3f(x)\times\{-f(x)\}$에서

$g(x)=3f(x)$, $h(x)=-f(x)$ 또는 $g(x)=-f(x)$, $h(x)=3f(x)$이다.

이때, $h(x)<0$이므로 $h(x)=\begin{cases}3f(x) & (f(x)<0)\\ -f(x) & (f(x)\geq 0)\end{cases}$이고, $g(x)=\begin{cases}3f(x) & (f(x)\geq 0)\\ -f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$이다.

두 함수 $g(x)$, $h(x)$모두 $f(x)\neq 0$인 $x$에서 미분가능하므로

$f(x)=0$인 $x$에 대해서도 미분가능해야 한다. 따라서 $f(x)=0$인 모든 $x$에 대하여 $f'(x)=0$이고,

만족시키는 경우는 $f(x)=(x-a)^3$인 경우 뿐이다.

$h(x)=\begin{cases}3f(x) & (f(x)<0)\\ -f(x) & (f(x)\geq 0)\end{cases}=\begin{cases}3(x-a)^3 & (x<a)\\ -(x-a)^3 & (x\geq a)\end{cases}$ 이므로 $x=a$에서 최댓값을 갖고,

$a=1$이다.

즉, $g(x)=\begin{cases}3(x-1)^3 & (x\geq 1)\\ -(x-1)^3 & (x<1)\end{cases}$이고, $\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 -(x-1)^3dx+\int_1^4 3(x-1)^3dx=61$

참고 : 마지막 적분 처리 역시 평행이동으로 처리하면 간단하게 계산할 수 있다.

## 42. 100

(나)에서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.
(가)에 의하여 $f'(0)=0$이므로 $f'(x)=kx(x-p)$ $(k>0,\ p>0)$라 둘 수 있다.
방정식 $(f'\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로
$f(x)=0$ 또는 $f(x)=p$을 만족시키는 $x$의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$가 양수인 극댓값과 음수인 극솟값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 즉, 방정식 $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야 하고,
$p>0$이므로 $p$는 함수 $f(x)$의 극댓값인 2이다.

$f'(x)=kx(x-2)$에서 (나)에 의하여 $k=9$이다.
$f(x)=3x^3-9x^2+C$에서 (가)에 의하여 $f(0)=C=2$이다.

따라서 $f(x)=3x^3-9x^2+2$이고 이 함수의 극솟값은
$f(2)=-10=m,\ m^2=100$

# 43. 68

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}-\sqrt{|g(t)|}}{x-1}=tf(t)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}-\sqrt{|g(t)|}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}-\sqrt{|g(t)|})(\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}+\sqrt{|g(t)|})}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}+\sqrt{|g(t)|})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}+\sqrt{|g(t)|})}$$

이다.

방정식의 실근이 2이므로 $t=2$일 때 극한값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|+|g(2)|}+\sqrt{|g(2)|})}$의 값이 존재하므로

$f(1)=0$, $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$라 둘 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)(x^2+ax+b)|}{(x-1)(\sqrt{|f(x)|+|g(2)|}+\sqrt{|g(2)|})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)(x^2+ax+b)|}{(x-1)2\sqrt{|g(2)|}}$$

에서

$\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x^2+ax+b)|}{(x-1)2\sqrt{|g(2)|}}=\lim_{x\to1-}\frac{|(x-1)(x^2+ax+b)|}{(x-1)2\sqrt{|g(2)|}}$을 만족시켜야 하므로

$(x-1)(x^2+ax+b)=(x-1)^2(x-p)$이다. 이때,

$\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)^2(x-p)|}{(x-1)2\sqrt{|g(2)|}}=0$이므로 $f(2)=0$임을 알 수 있다.

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

$g(t)\neq0$일 때 $\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)^2(x-2)|}{(x-1)2\sqrt{|g(t)|}}=0$이므로 극한값은 무조건 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{|f(x)|+|g(t)|}-\sqrt{|g(t)|}}{x-1}=tf(t)$의 실근은

$tf(t)=0$의 실근과 같다. $t(t-1)^2(t-2)=0$에서 $t=0$, $t=1$, $t=2$인데

실근이 $t=2$뿐이므로 $g(0)=g(1)=0$이어야 한다. $g(x)=x(x-1)$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$, $g(x)=x(x-1)$이고 $f(5)+g(5)=68$

참고 : 사실 $g(t)=0$이어도 극한값이 존재할 수 있다. $f(x)=(x-1)^3$인 경우인데 이 경우는 조건을 만족시키지 않음을 쉽게 보일 수 있다.

# 44. 56

$f(x) = 2|f(x) - t|$에서

$f(x) \geq t$이면 $f(x) = 2f(x) - 2t$에서 $f(x) = 2t$

$f(x) < t$이면 $f(x) = -2f(x) + 2t$에서 $f(x) = \frac{2}{3}t$

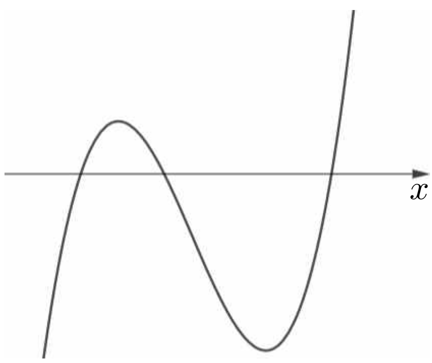
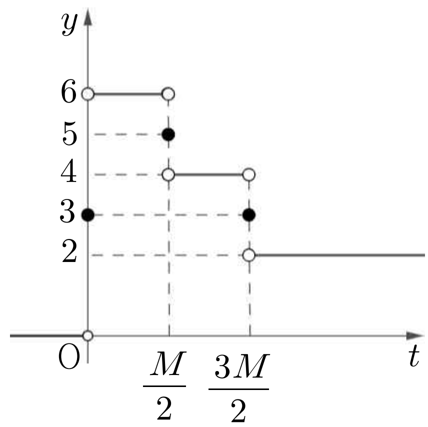
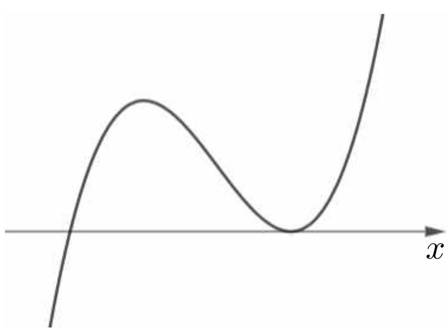
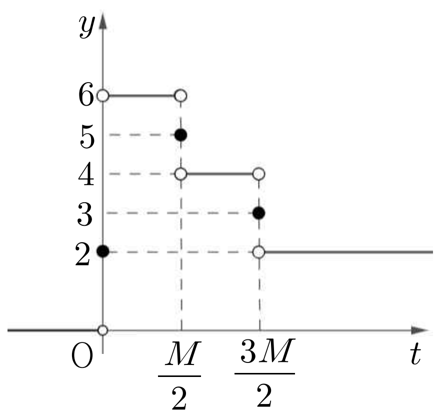
이때 $f(x) < 0$이면 실근이 존재하지 않으므로

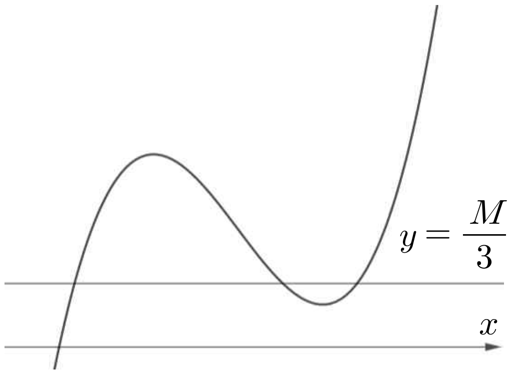
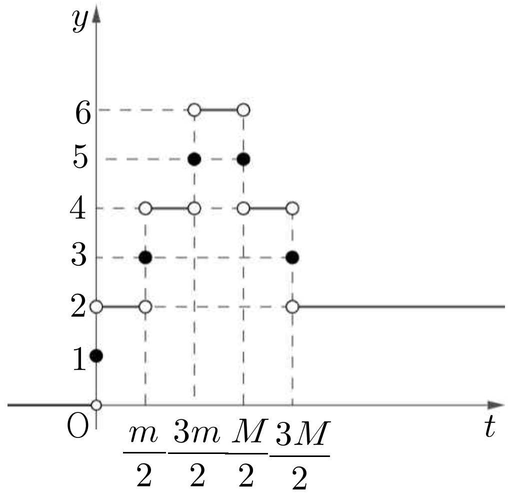
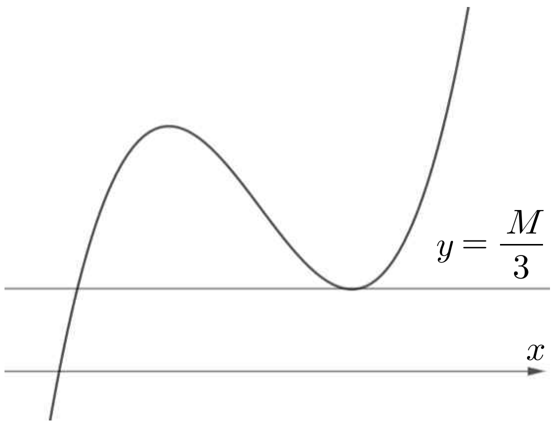
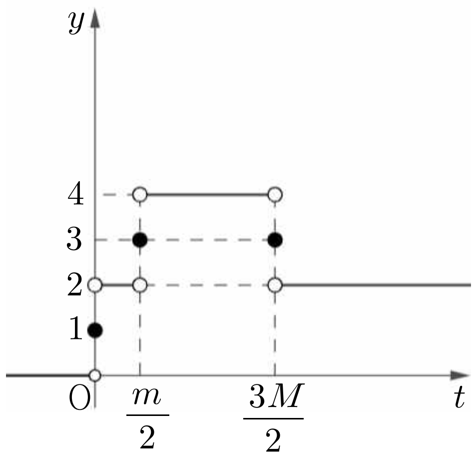
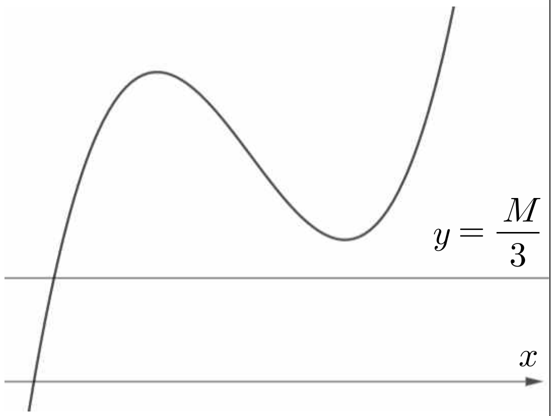
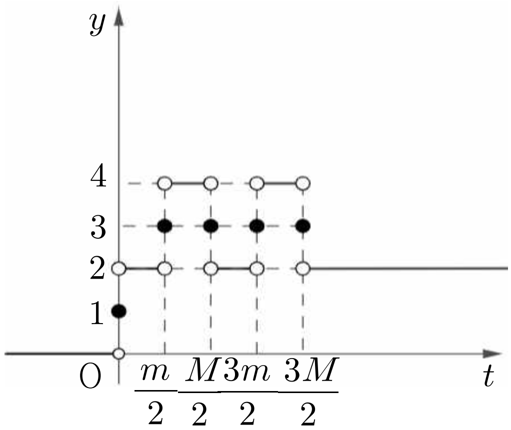
$g(t)$는 $t < 0$일 때 $g(t) = 0$, $t \geq 0$일 때 방정식 $\{f(x) - 2t\} \times \left\{f(x) - \frac{2}{3}t\right\} = 0$의 실근의 개수와 같고, 이는 곡선 $y = f(x)$와 두 직선 $y = 2t$, $y = \frac{2}{3}t$가 만나는 점의 개수와 같다.

함수 $f(x)$의 극댓값을 $M$, 극솟값을 $m$이라 하자.

$M < 0$이면 $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t = 0) \\ 2 & (t > 0) \end{cases}$이고 $M = 0$이면 $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t \geq 0) \end{cases}$이어서 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $M > 0$

이때 $m$의 범위에 따라서 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

| $m$ | $f(x)$ | $g(t)$ |
|---|---|---|
| $m < 0$ |   |   |
| $m = 0$ |   |   |

| | | |
|---|---|---|
| $0 < m < \dfrac{M}{3}$ |  |  |
| $m = \dfrac{M}{3}$ |  |  |
| $m > \dfrac{M}{3}$ |  |  |

$\lim_{t\to a+} g(t) < \lim_{t\to a-} g(t)$를 만족시키는 $a$가 하나 뿐이려면 $m = \dfrac{M}{3}$이어야 하고,

이때의 $a$의 값이 9이므로 $9 = \dfrac{3}{2}M$에서 $M = 6$, $m = 2$이다.

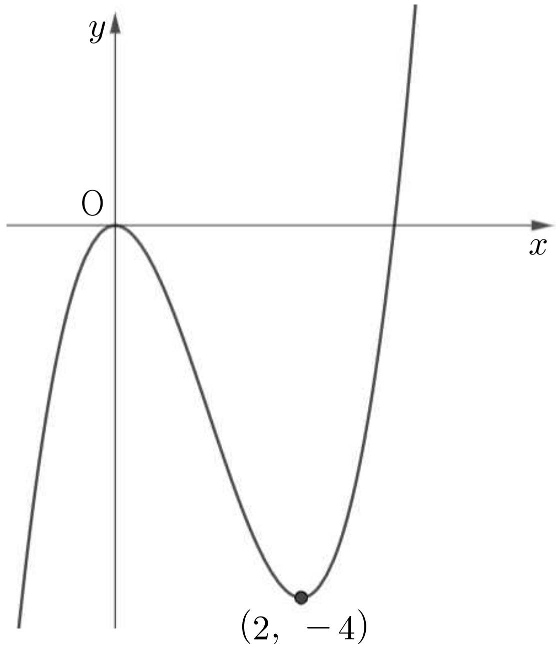
$f(x) = x^2(x-p) + q$라 두면 $M = 6$이므로 $f(x) = x^2(x-p) + 6$

$f'(x) = 2x(x-p) + x^2 = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \dfrac{2}{3}p$이므로 $x = \dfrac{2}{3}p$에서 극소이다.

$f\left(\dfrac{2}{3}p\right) = \left(\dfrac{2}{3}p\right)^2\left(\dfrac{2}{3}p - p\right) + 6 = 2$에서 $p = 3$, $f(x) = x^2(x-3) + 6$이고 $f(5) = 56$

# 45. ⑤

ㄱ 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다,




즉 구간 $(1,\ 4)$에서 $f(x) \geq -4$이다 (참)

ㄴ $g(x) = \int_1^x |f(t)| f(t)dt + x \times \int_1^x |f(t)| dt$에서 $g(1) = 0$

$g'(x) = |f(x)| f(x) + \int_1^x |f(t)| dt + x f|(x)|$에서 $g'(1) = |f(1)| f(1) + |f(1)| = -2$

이므로 $g'(1) < g(1)$이다 (참)

ㄷ ㄴ에서 $g'(1) < 0,\ g(1) = 0$ 이므로 구간 $(1,\ 4)$에서 $g(x) < 0$인 $x$가 존재한다.
이때의 $x$를 $\alpha$라 하자.

$g(4) = \int_1^4 |f(t)| f(t)dt + \int_1^4 4|f(t)| dt = \int_1^4 |f(t)| \{f(t) + 4\} dt$인데

$|f(x)| \geq 0$, ㄱ에서 구간 $(1,\ 4)$에서 $f(x) + 4 \geq 0$이므로 $g(4) > 0$이다.

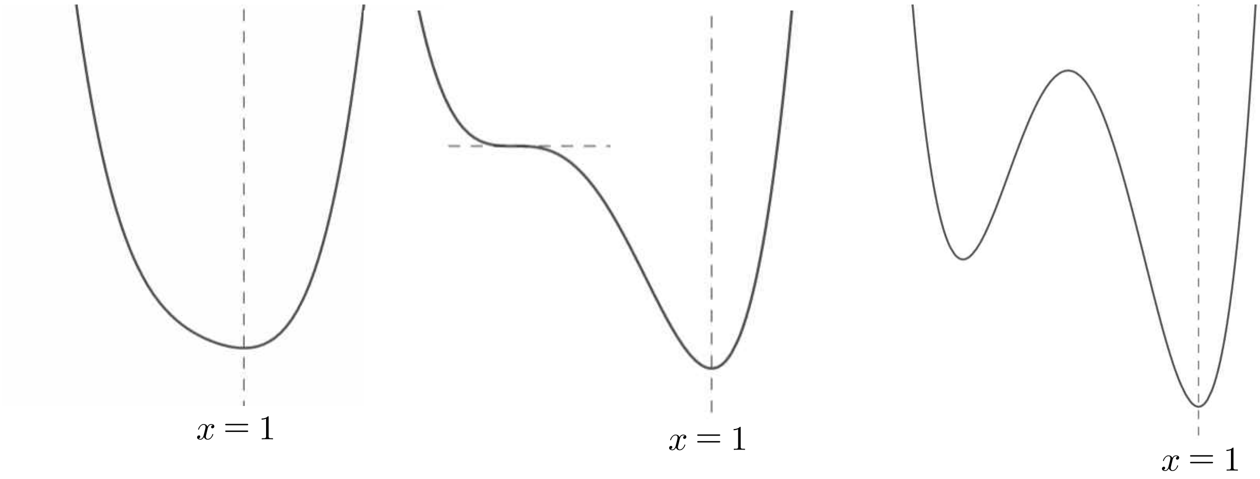
즉, $g(\alpha) < 0,\ g(4) > 0$이므로 구간 $(\alpha,\ 4)$에 $g(x) = 0$인 $x$가 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

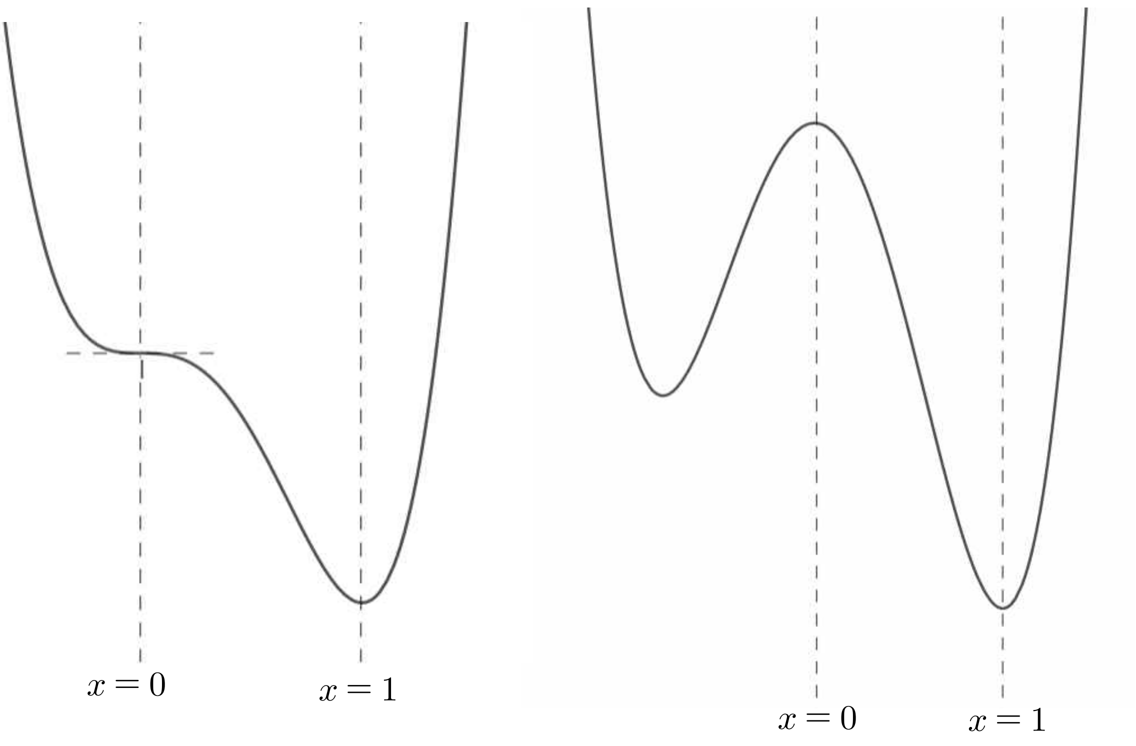
참고 : ㄷ에서 $g(4)$의 값을 직접 구하는 방법도 있다. 이때 $g(4) = 98.057143054....$이다.

# 46. 96

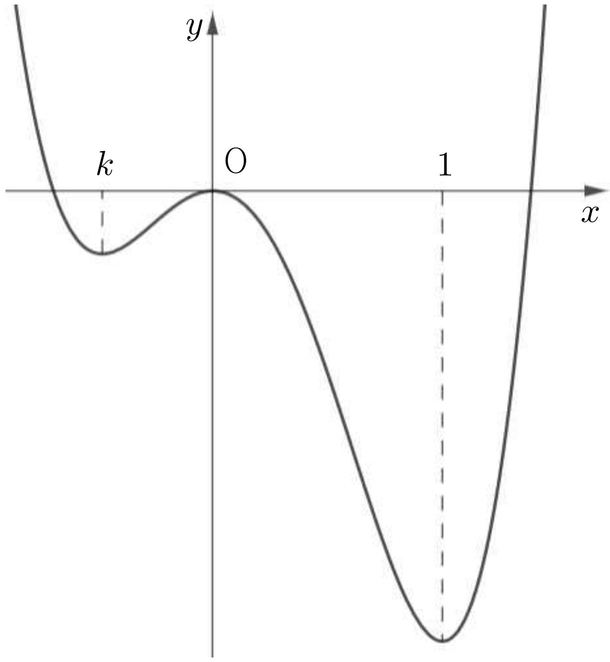
조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.




이때, $g(0)=1$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.




이때, $f(0)=0$이므로 $f(k)<0$, $g(k)=2$이고 $k<0$인 $k$가 존재하는 경우는 다음 경우 뿐이다.




즉, $x=k$, $x=1$에서 극소이고, $x=0$에서 극대이며 $f(k)>f(1)$이다.

$f'(x)=4x(x-k)(x-1)$에서 $f(x)=x^4-\frac{4k}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+2kx^2$이고

$f(k)=-\frac{1}{3}k^4+\frac{2}{3}k^3$, $f(1)=\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$에서 $f(k)>f(1)$이고

$\frac{1}{3}k^4-\frac{2}{3}k^3+\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(k-1)^3(k+1)<0$이므로 $-1<k<1$이다.

따라서 $-1<k<0$

$f(2)=-\frac{8}{3}k+\frac{16}{3}$에서 $-1<k<0$이므로 $\frac{16}{3}<f(2)<8$, $36(\beta-\alpha)=96$

# 47. 45

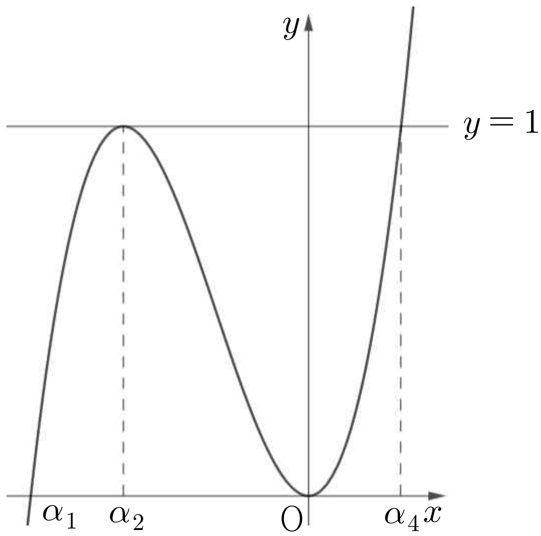
$k \times f(x) = \lim_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - f(x)}$에서

(i) $f(x) = 1$인 경우 $k \times f(x) = \lim_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(1)$

(ii) $f(x) \neq 1$ 경우 $k \times f(x) = \lim_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - f(x)} = 0$이므로 $f(x) = 0$

만약 $f'(1) \neq k$이면 $f(x) = 1$인 경우 근은 존재하지 않으므로
주어진 방정식은 $f(x) = 0$과 같다.
이 방정식의 실근의 개수는 최대 3이므로 조건을 만족시킬 수 없다.
따라서 $f'(1) = k$

$f'(1) = k$이므로 주어진 방정식의 근은 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$을 만족시키는 근이고
이 실근이 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $0$, $\alpha_4$이다.
이때 $f'(0) = 0$이므로 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$을 만족시키는 근의 개수가 4이기
위해서는 함수 $f(x)$의 극솟값이 0, 극댓값이 1이어야 한다.

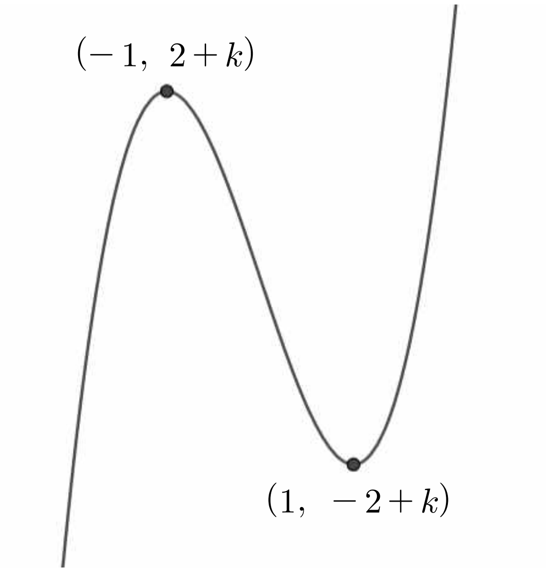



즉, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2(x - \alpha_1)$에서 $\alpha_2 = \dfrac{2}{3}\alpha_1$이므로 $f\left(\dfrac{2}{3}\alpha_1\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\alpha_1\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\alpha_1 - \alpha_1\right) = 1$에서

$\alpha_1 = -3$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2(x+3)$에서 $f'(1) = k = \dfrac{9}{4}$, $20k = 45$

# 48. 21

함수 $f(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.




(가)에서 $f'(x)g(x) = f'(x)f(x)$이므로
$x \neq -1,\ x \neq 1$인 모든 $x$에 대하여 $g(x) = f(x)$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차가 $4$이므로
두 직선 $y=1,\ y=6$이 각각 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만날 수 없다.
즉 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $g(-1) = g(1) = 1$일 때,
직선 $y=1$와 함수 $y=g(x)$는 무조건 서로 다른 세 점에서 만나므로
직선 $y=6$이 함수 $y=g(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y=6$이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
즉, $-2+k < 6 < 2+k$에서 $k=5,\ 6,\ 7$

(i) $g(-1) = g(1) = 6$일 때,
직선 $y=6$와 함수 $y=g(x)$는 무조건 서로 다른 세 점에서 만나므로
직선 $y=1$이 함수 $y=g(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y=1$이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
즉, $-2+k < 1 < 2+k$에서 $k=1,\ 2$

(i), (ii)에서 $k=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7$이고 모든 $k$의 값의 합은 $21$

# 49. 22

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 조건 (가), (나)에 의하여

$\{1-f(a)\}g(a)=a^3-a$, $f(a)g(a)=a^2-9$이다.

$g(a)=-8$이므로 $-8\{1-f(a)\}=a^3-a$, $-8f(a)=a^2-9$

즉, $f(a)=1$이고 $a=-1$ 또는 $a=1$이다.

(i) $a=-1$

(가)에 의하여 $x<-1$에서 $g(x)=\dfrac{1-x^2}{1-f(x)}$이고

$x<-1$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\neq 1$이어야 한다. ⋯ ㉠

$g(-1)=-8$이므로 $\lim\limits_{x\to -1-}g(x)=\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{1-x^2}{1-f(x)}=-8$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{1-x^2}{1-f(x)}=\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{x+1}{f(-1)-f(x)}\times(1-x)=\dfrac{2}{-f'(-1)}=-8$이므로

$f'(-1)=\dfrac{1}{4}$이다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이고 $f(-1)=1$, $f'(-1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\alpha<-1$이고 $f(\alpha)=1$인 $\alpha$가 존재하고, ㉠에 모순이다.

(ii) $a=1$

(가)에 의하여 $x<1$에서 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{1-f(x)}$이다.

$g(-1)=-8$이므로 $\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{1-f(x)}=-8$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{1-f(x)}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x-1}{f(1)-f(x)}\times(x+1)=\dfrac{2}{-f'(1)}=-8$이므로

$f'(1)=\dfrac{1}{4}$이다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이고 $f(1)=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\alpha<1$이고 $f(\alpha)=1$인 $\alpha$가 존재하고, (가)에 의하여 $\alpha=-1$이다.

또, $\beta>1$이고 $f(\beta)=0$인 $\beta$가 존재하고, (나)에 의하여 $\beta=3$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(1)=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{4}$, $f(-1)=1$, $f(3)=0$이다.

$f(x)=p(x-1)(x+1)(x-q)+1$이라 두면 $f'(1)=\dfrac{1}{4}$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{8}(x-1)(x+1)(x-2)+1$이고, $f(-5)=22$

# 50. 33

$\lim_{x\to 0}\frac{t\times x-f(1)}{f(x)-f(t)}$에서

또, $t=2$일 때 극한값이 존재하지 않으므로

$f(0)=f(2)$이어야 한다.

또, $t=0$일 때 극한값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 0}\frac{-f(1)}{f(x)-f(0)}$의 극한값이 존재해야 하려면 $f(1)=0$이어야 한다.

$t=2$일 때 극한값이 존재하지 않으므로

$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)-f(2)}$의 극한값이 존재하지 않아야 한다.

즉, $f(x)-f(2)$는 $x^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=x^2(x-a)+b$에서 $f(0)=f(2)$이므로 $f(x)=x^2(x-2)+b$이고

$f(1)=0$에서 $f(x)=x^2(x-2)+1$이다. $f(4)=33$

# 51. 220

$f(0)=0$이므로 최고차항의 계수가 $4$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(x)=xg(x)$라 둘 수 있다. $g(1)=1$이고 $|f'(0)|>1$에서 $|g(0)|>1$이다.

$f(x)-x=0$, $f(x)+x=0$에서 $x\{g(x)-1\}=0$, $x\{g(x)+1\}=0$인데
$|g(0)|>1$에서 $|g(0)|\neq 1$이므로 조건을 만족시키려면 두 방정식
$g(x)-1=0$, $g(x)+1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 $2$이어야 한다.
즉, 함수 $g(x)$의 극댓값은 $1$, 극솟값은 $-1$이다.
$g(1)=1$에서

(i) $g'(1)\neq 0$인 경우
$g(x)=4(x-a)^2(x-1)+1$이다. $g'(x)=8(x-a)(x-1)+4(x-a)^2=0$에서
$x=a$에서 극대, $x=\dfrac{a+2}{3}$에서 극소이다.
$g\left(\dfrac{a+2}{3}\right)=4\left(\dfrac{a+2}{3}-a\right)^2\left(\dfrac{a+2}{3}-1\right)+1=-1$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$이다.
이때 $g(x)=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(x-1)+1$에서 $g(0)=0$이므로 $|g(0)|>1$에 모순이다.

(ii) $g'(1)=0$인 경우
$g(x)=4(x-a)(x-1)^2+1$이다. $g'(x)=8(x-a)(x-1)+4(x-1)^2=0$에서
$x=1$에서 극대, $x=\dfrac{2a+1}{3}$에서 극소이다.
$g\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)=4\left(\dfrac{2a+1}{3}-a\right)\left(\dfrac{2a+1}{3}-1\right)^2+1=-1$에서 $a=\dfrac{5}{2}$이다.
이때 $g(x)=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x-1)^2+1$에서 $g(0)=-9$이므로 $|g(0)|>1$을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $g(x)=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x-1)^2+1$이고 $f(x)=4x\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x-1)^2+x$이므로
$f(4)=220$

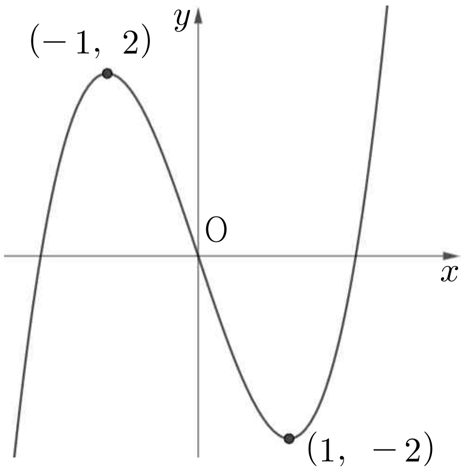
# 52. 34

이차함수 $f(x)$는 $x=a$에서 대칭이다 즉, $f(p)=f(q)$를 만족시키려면

$p=q$ 또는 $\dfrac{p+q}{2}=a$에서 $p=2a-q$이다.

즉, $f\left(\int_0^x g(t)dt\right)=f(x^3-3x)$에서 $\int_0^x g(t)dt=x^3-3x$ 또는 $\int_0^x g(t)dt=2a-x^3+3x$이다.

함수 $y=x^3-3x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



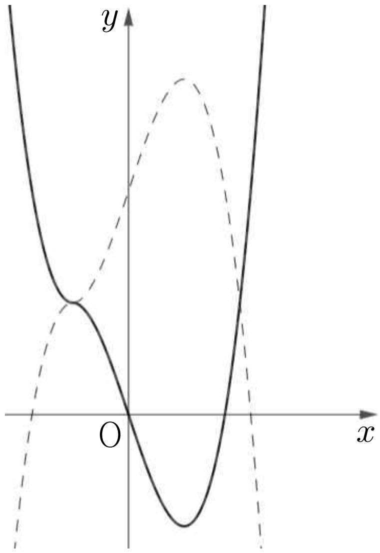

모든 실수 $x$에 대하여 $\int_0^x g(t)dt=x^3-3x$이면 $g(x)=3x^2-3$이므로

$x=k(k>0)$에서 극값을 가질 수 없다.

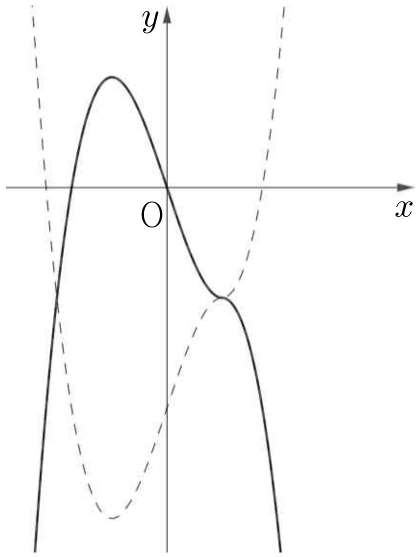
같은 이유로 모든 실수 $x$에 대하여 $\int_0^x g(t)dt=2a-x^3+3x$일 수 없다.

함수 $g(x)$는 연속이므로 함수 $\int_0^x g(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

즉, 함수 $\int_0^x g(t)dt$가 미분가능하기 위해서는 다음과 같은 두 가지 경우만 가능하다.

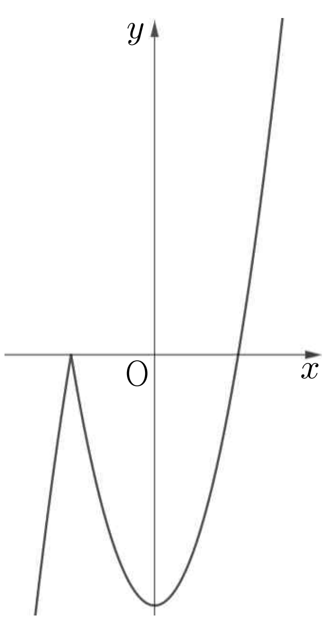


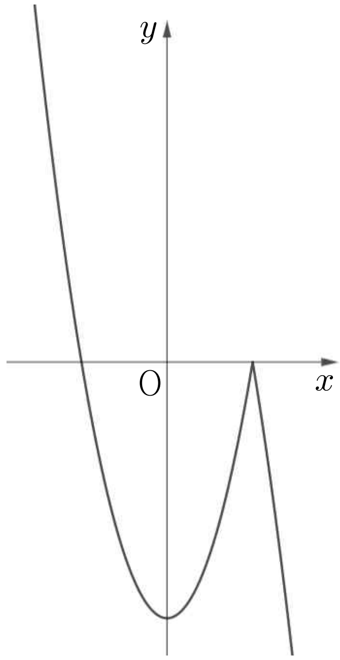

$a = 2$




$a =- 2$

이 경우 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




즉, $x = k(k > 0)$에서 극값을 가지는 경우는 $a =- 2$인 경우이다.

$$f(x)= (x+2)^2 + b,\ \ g(x)= \begin{cases} 3x^2 - 3 & (x < 1) \\ -3x^2 + 3 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$f'(3) - g(3) = 34$

# 53. 8

$f(x)=ax^2+bx$라 두자

$g(x)=y$라 두면 (가)에서 $f(y)+f(y-x)=f(x)$

$ay^2+by+a(y-x)^2+b(y-x)=ax^2+bx$

$(y-x)(2ay+2b)=0$에서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-\dfrac{b}{a}$이다.

$g(x)$가 연속이고 (나)에서 $g(x)$의 최솟값이 $-3$이 되려면 $-3=-\dfrac{b}{a}$에서 $b=3a$이다.

만약 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)=-3$이면 (다)를 만족시킬 수 없으므로

$g(x)=\begin{cases}-3 & (x<-3) \\ x & (x\geq -3)\end{cases}$ 이다.

$g(f(x))=\begin{cases}-3 & (f(x)<-3) \\ f(x) & (f(x)\geq -3)\end{cases}$에서 (다)를 만족시키려면 $f(x)$의 최솟값이 $-1$이어야 한다.

$f(x)=ax^2+3ax$가 $x=-\dfrac{3}{2}$에서 최소이므로

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$에서 $a=\dfrac{4}{9}$이므로 $f(x)=\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x$, $f(3)=8$

# 54. ②

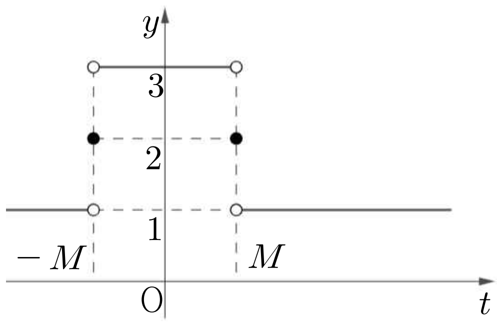
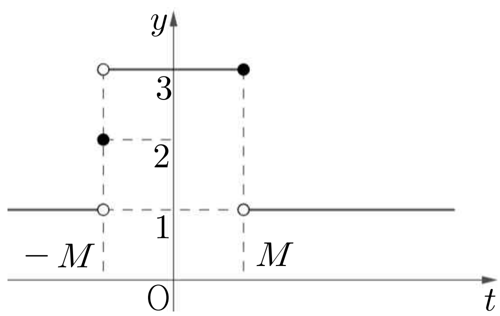
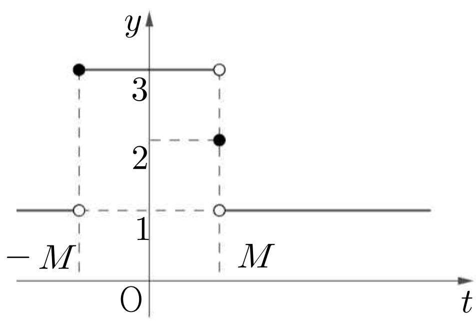
$g(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 또는 점 $(0,\ a)$가 직선 $y=t$와 만나는 점의 개수이다.
(나)에 의하여 함수 $g(t)$의 불연속점이 존재한다.

만약 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 $g(t)=\begin{cases} 2 & (t=a) \\ 1 & (t \neq a) \end{cases}$ 이고

(가)를 만족시키려면 $a=0$이어야 한다. 그런데 $a=0$이면 $g(-3)<g(4)$를 만족시킬 수 없다.
즉, 함수 $f(x)$의 극값이 존재한다.
함수 $g(t)$가 불연속이 되는 경우는 $t$가 함수 $f(x)$의 극대, 극소 또는 $t=a$인 경우이다.
즉, 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 $2$ 또는 $3$이다.

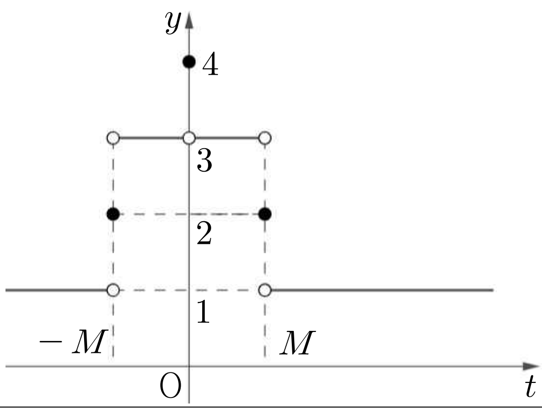
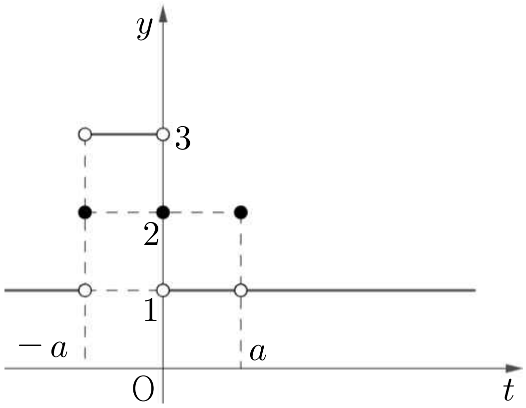
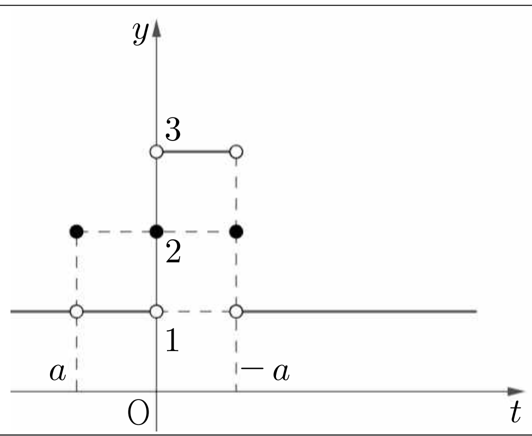
(i) 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수가 $2$인 경우
함수 $g(t)$는 $t$가 함수 $f(x)$의 극대, 극소일 때 무조건 불연속이므로
$f(0)=a$이거나 $a$가 함수 $f(x)$의 극대 또는 극소이어야 한다.
또, (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$의 극댓값이 $M$ 이면 극솟값이 $-M$이어야 한다.

각 경우 함수 $g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>$f(0)=a$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(0)\neq a$<br>$a=M$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(0)\neq a$<br>$a=m$</td><td></td></tr>
</table>

위의 세 경우 모두 (나)를 만족시킬 수 없다.

(ii) 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수가 $3$인 경우
(가)를 만족시키려면 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 불연속이어야 하고,
(1) $a=0$, $f(0)\neq 0$이고 $f(x)$의 극댓값이 $M$ 과 극솟값이 $-M$을 갖는 경우
(2) $a>0$, $f(0)\neq a$이고 $f(x)$의 극댓값이 $0$, 극솟값이 $-a$인 경우
(3) $a<0$, $f(0)\neq a$이고 $f(x)$의 극솟값이 $0$, 극댓값이 $-a$인 경우
중 하나를 만족시켜야 한다.
각 경우 함수 $g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

| | |
|---|---|
| (1) |   |
| (2) |   |
| (3) |   |

(나)를 만족시킬 수 있는 경우는 (3) 뿐이다.

(i), (ii)에서 $a<0$, $f(0)\neq a$이고 $f(x)$의 극솟값이 $0$이며

$g(-3)<g(4)$를 만족시키려면 $4\leq -a$, 즉, 극댓값이 $4$ 이상이다.

(a) $f(x)$가 $x=0$에서 극소인 경우

$f(x)=x^2(x-k)$라 두면 $f'(x)=x(3x-2k)=0$에서 $x=\frac{2}{3}k$에서 극대

$f\left(\frac{2}{3}k\right)=-\frac{4}{27}k^3\geq 4$에서 $k\leq -3$

$f(1)=1-k$는 $k=-3$일 때 최솟값 $4$를 갖는다.

(b) $f(x)$가 $x=0$에서 극대인 경우

$f(x)=x^2(x-k)+p$라 두면 $p\geq 4$이다.

$f'(x)=x(3x-2k)=0$에서 $x=\frac{2}{3}k$에서 극소이고

$f\left(\frac{2}{3}k\right)=-\frac{4}{27}k^3+p=0$에서 $p=\frac{4}{27}k^3$이고, $p\geq 4$에서 $k\geq 3$이다.

$f(1)=\frac{4}{27}k^3-k+1=h(k)$라 두면 $h'(k)=\frac{4}{9}k^2-1$이므로 $k\geq 3$에서 $h(k)$는 증가한다.

따라서 $f(1)=\frac{4}{27}k^3-k+1$은 $k=3$일 때 최솟값 $2$를 갖는다,

(a), (b)에 의하여 $f(1)$의 최솟값은 $2$

# 55. 351

(가)에 의하여 함수 $f(x)$는 원점 대칭이고 ⋯ ㉠

(나)에 의하여 실수 전체의 집합에 두 부분집합

$\{t|(f \circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 $7\}$, $\{t|k<t<1\}$은 서로 같다.

방정식 $f(x)=t$이 오직 하나의 실근을 가지면 방정식 $(f \circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 최대 3이다.

방정식 $f(x)=t$이 오직 두 개의 실근을 가지면 방정식 $(f \circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 최대 6이다.

즉, $k<t<1$에 있는 모든 $t$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고,

함수 $f(x)$의 극댓값은 1 이상이고 ㉠에 의하여

함수 $f(x)$의 극솟값은 $-1$ 이하이다. 즉, $(f \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수도 7이다.

$f(x)=a(x-p)x(x+p)\,(p>0)$라 하자.

(i) 함수 $f(x)$의 극댓값이 1보다 큰 경우

방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 $-p$, 0, $p$이므로

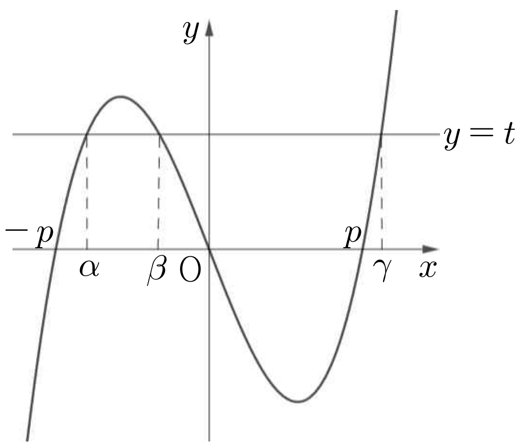
$f(x)=p$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=-p$를 만족시키는 $x$의 개수가 7이어야 하고,

$f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 ㉠에 의하여

$f(x)=p$와 $f(x)=-p$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

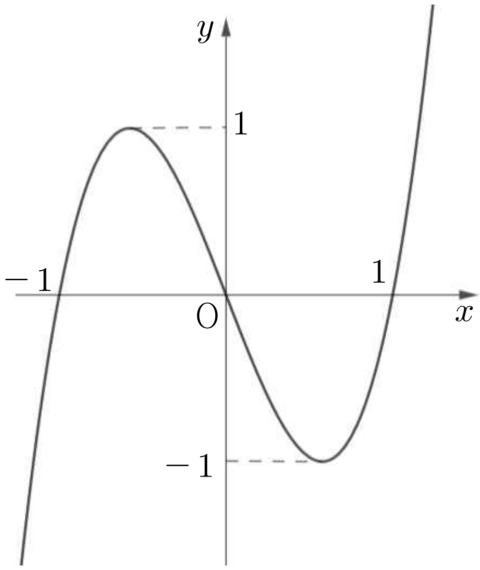
즉, $f(x)$의 극댓값이 $p$이고, $p>1$이다.

이때, (나)를 만족시키려면 $1 \le t < p$일 때 방정식 $(f \circ f)(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 7이 아니어야 한다. ⋯ ㉡



$1 \leq t < p$일 때 방정식 $f(x) = t$는 서로 다른 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 갖고
$-p < \alpha < \beta < p < \gamma$이다.
$-p < \alpha < \beta < p$이므로 방정식 $f(x) = \alpha$, $f(x) = \beta$는 각각 서로 다른 세 실근을 갖고,
$p < \gamma$이므로 방정식 $f(x) = \gamma$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
즉, 방정식 $(f \circ f)(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극댓값이 1인 경우
$f(x) = p$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = -p$를 만족시키는 $x$의 개수가 7이어야 하고,
$f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 ㉠에 의하여
$f(x) = p$와 $f(x) = -p$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.
즉, $f(x)$의 극댓값이 $p$이고, $p = 1$이다.




(1) $t \geq 1$이면 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 6 이하이다.
(2) $0 < t < 1$이면 방정식 $f(x) = t$가 서로 다른 세 실근 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 갖고
$-1 < \alpha < \beta < 1 < \gamma$이므로 방정식 $(f \circ f)(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.
(3) $(f \circ f)(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.
(4) $-1 < t < 0$이면 (2)와 같은 방법으로 방정식 $(f \circ f)(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.
(5) $t \leq -1$이면 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이므로 방정식
$(f \circ f)(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수는 6 이하이다.
즉, 조건을 만족시킨다.

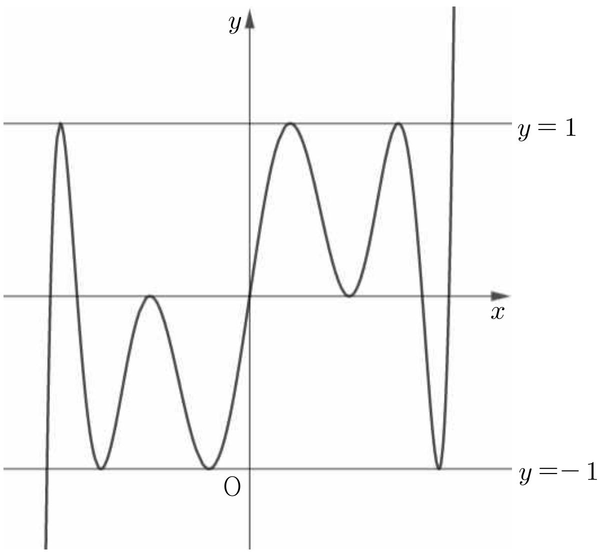
(i), (ii)에 의하여 $p = 1$이고 함수 $f(x) = a(x-p)x(x+p)$은 극댓값 1을 갖는다.

$f(x) = a(x-1)x(x+1) = ax^3 - ax,\ f'(x) = a(3x^2-1) = 0$에서

함수 $f(x)$는 $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이므로 $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1$에서 $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $f(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$이고 $f(3\sqrt{3}) = 351$

참고 : $k = -1$이고, 함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



# 56. 729

$f(x)g(x)=|f(x)|$에서

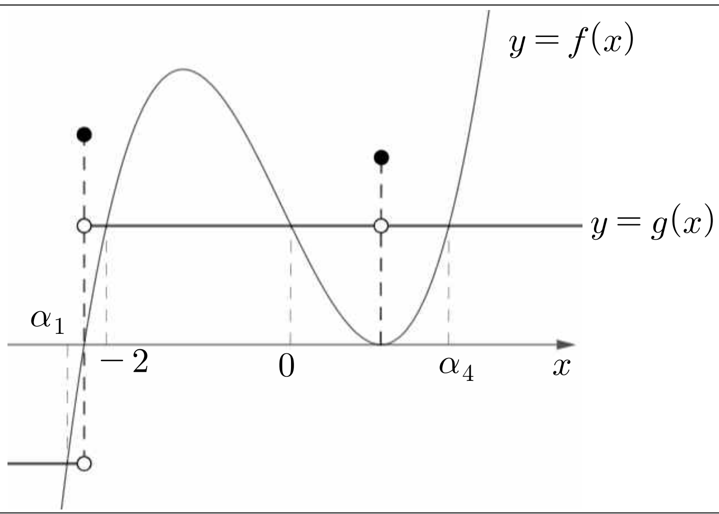
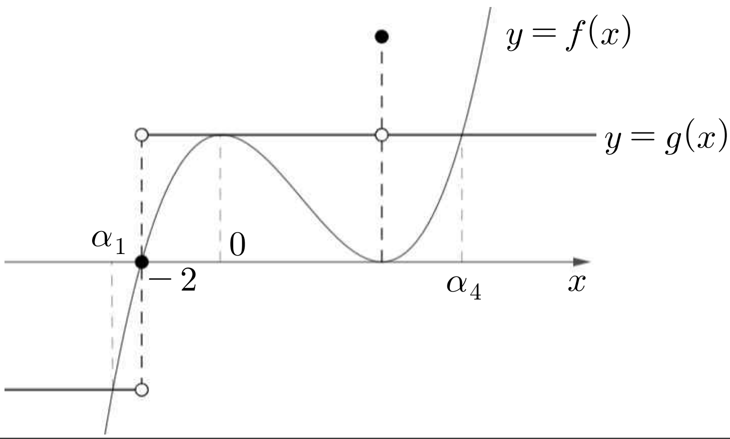
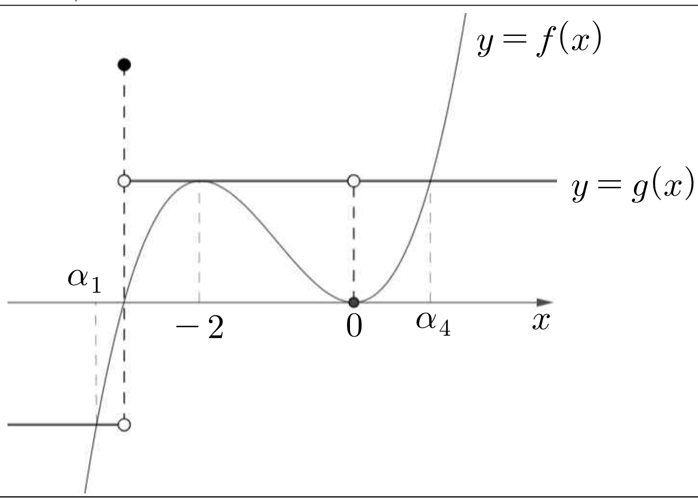
$f(x)>0$이면 $g(x)=1$, $f(x)<0$이면 $g(x)=-1$이다.

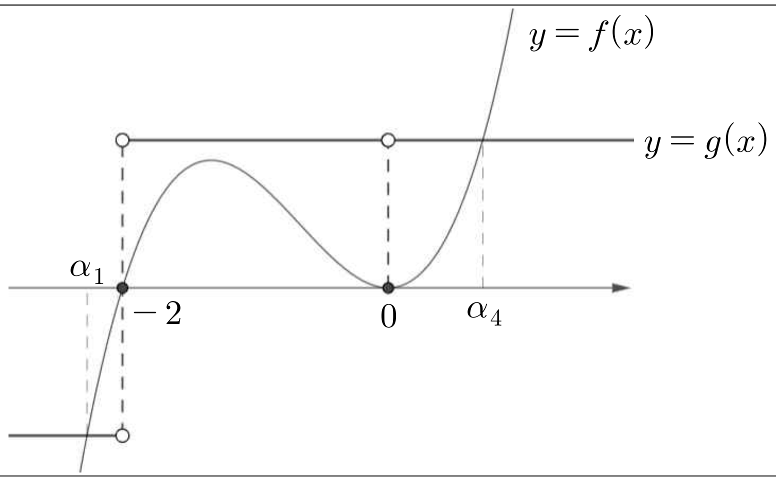
방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 다른 네 점에서 만난다. … ㉠

(i) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

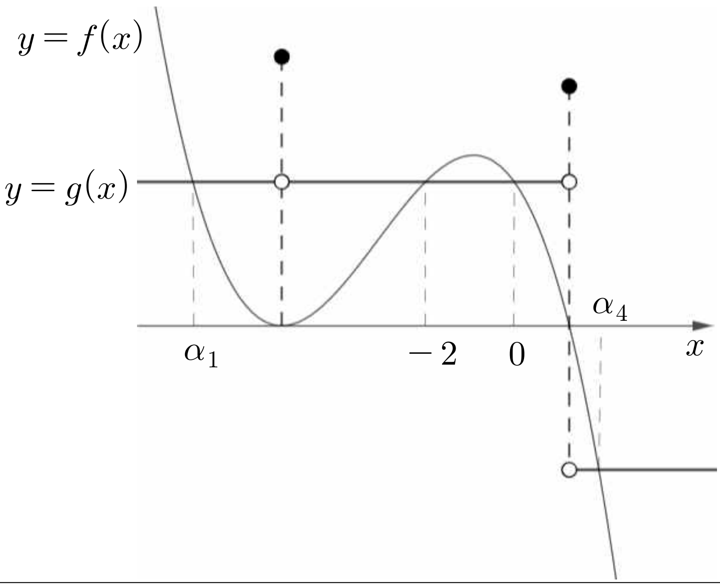
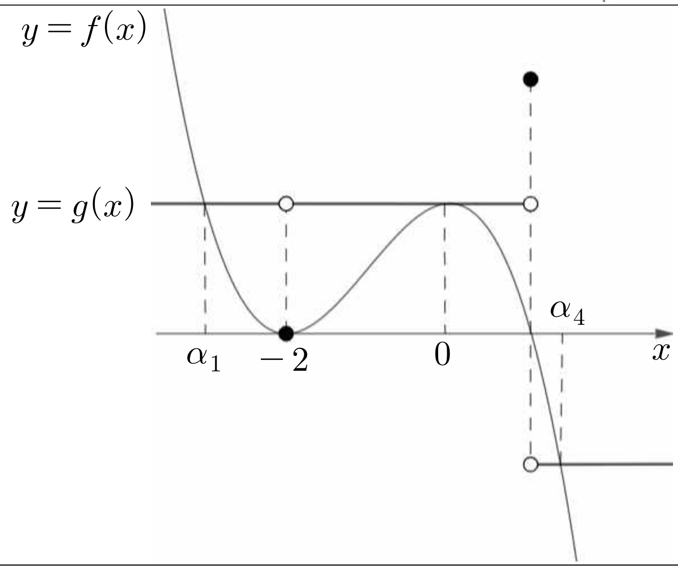
함수 $f(x)$의 극댓값을 $M$이라 할 때, $M$의 범위에 따라 ㉠을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

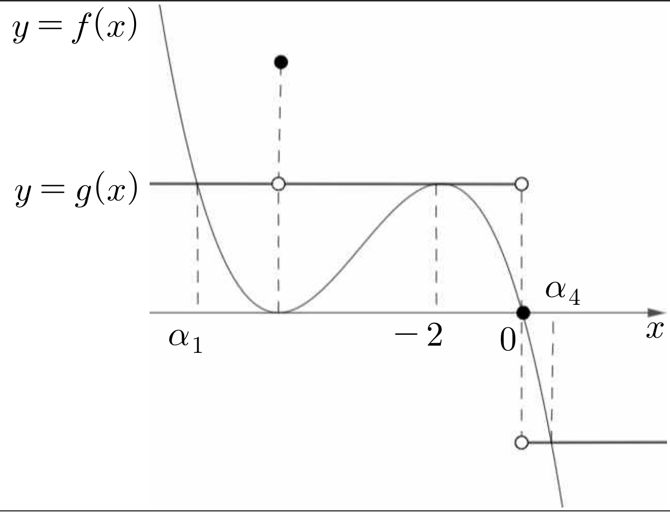
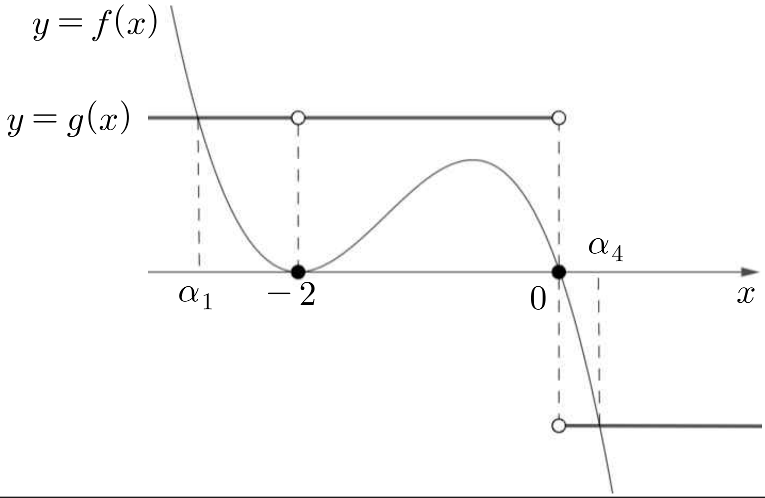
| | |
|---|---|
| $M>1$ |   |
| $M=1$ |   |
| $M=1$ |   |

| | |
|---|---|
| $0 < M < 1$ |  |

위의 네 경우 모두 $f(-2)\times f'(0) \neq f'(0)$를 만족시키지 못한다.

(ii) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우
함수 $f(x)$의 극댓값을 $M$이라 할 때, $M$의 범위에 따라 ㉠을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

| | |
|---|---|
| $M > 1$ |  |
| $M = 1$ |  |

| | |
|---|---|
| $M=1$ |  |
| $0<M<1$ |  |

위의 네 경우 중 $0<M<1$인 경우만 $f(-2)\times f'(0)\neq f'(0)$을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=kx(x+2)^2$라 둘 수 있다.

$f'(x)=k(x+2)^2+2kx(x+2)=0$에서 $x=-\dfrac{2}{3}$에서 극대이므로

$0<f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=kx(x+2)^2<1$에서 $-\dfrac{27}{32}<k<0$이다.

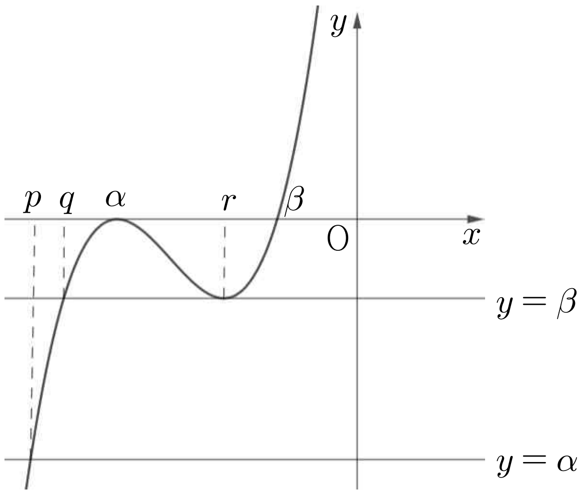
$-27<f(2)=32k<0$이므로 $a=-27$이고 $a^2=729$

## 57. 50

(가)에서 함수 $f(x)$의 극값은 $0$이다.

(i) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때,

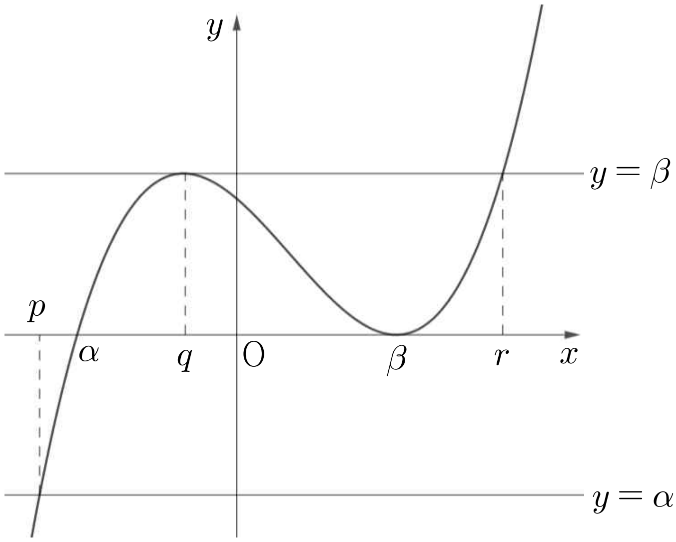
(1) $f'(\alpha)=0$인 경우 $f(0)=3$이므로 $\alpha<\beta<0$이므로 (나)를 만족시키려면
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수가 $1$이고,
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$가 되어야 한다.




즉, 방정식 $f(f(x))=0$의 모든 실근은 $p$, $q$, $r$이고 $p<q<\alpha<\gamma<\beta$이므로
세 방정식 $f(x)=p$, $f(x)=q$, $f(x)=r$의 실근의 개수는 각각 $1$이다.
즉, 방정식 $f(f(f(x)))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $3$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(2) $f'(\beta)=0$인 경우 $f(0)=3$이므로

(a) $\alpha<0<\beta$인 경우 (나)를 만족시키려면
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수가 $1$이고,
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$가 되어야 한다.




즉, 방정식 $f(f(x))=0$의 모든 실근은 $p,\ q,\ r$이고 $p<\alpha<q<0<\beta<\gamma$이므로
세 방정식 $f(x)=p,\ f(x)=q,\ f(x)=r$의 실근의 개수는 각각 $1$이다.
즉, 방정식 $f(f(f(x)))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $3$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

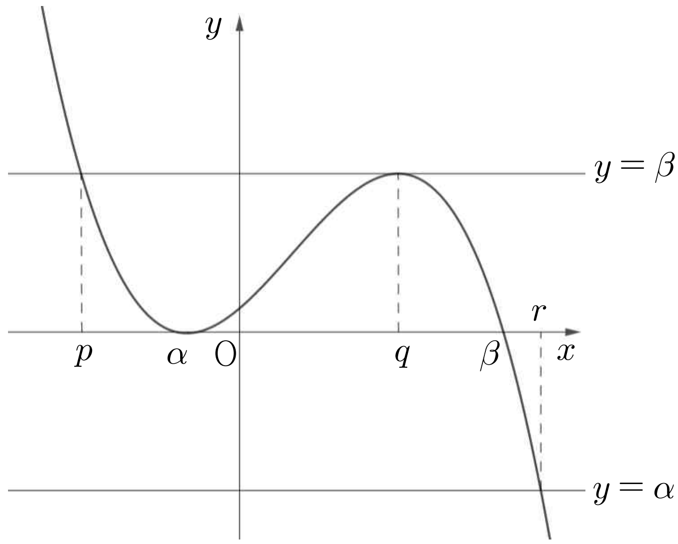
(b) $\alpha<\beta<0$인 경우
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수가 $1$이고,
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수는 $1$이므로
(나)를 만족시키지 못한다.

(ii) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때,

(1) $f'(\beta)=0$인 경우 $f(0)=3$이므로 $0<\alpha<\beta$이므로
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수가 $1$이고,
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수는 $1$이므로
(나)를 만족시키지 못한다.

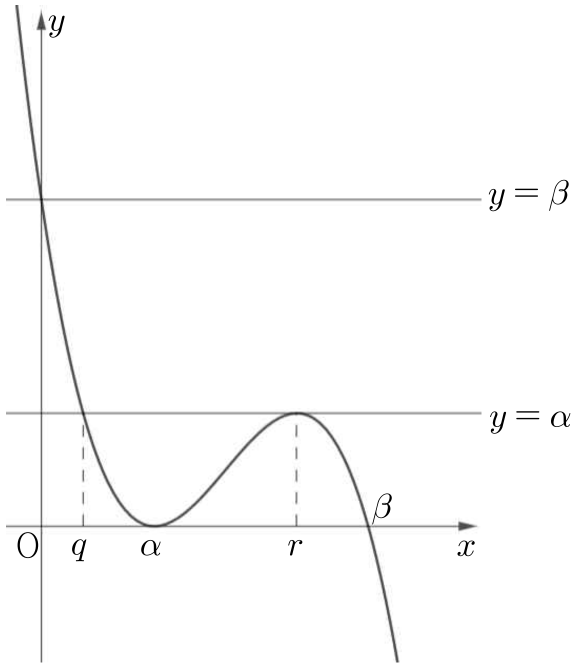
(2) $f'(\alpha)=0$인 경우 $f'(\beta)=0$이므로

(a) $\alpha<0<\beta$인 경우 (나)를 만족시키려면
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수가 $1$이고,
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수는 $2$가 되어야 한다.




즉, 방정식 $f(f(x))=0$의 모든 실근은 $p$, $q$, $r$이고 $p<\alpha<0<q<\beta<\gamma$이므로
세 방정식 $f(x)=p$, $f(x)=q$, $f(x)=r$의 실근의 개수는 각각 1, 3, 1이다.
즉, 방정식 $f(f(f(x)))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(b) $0<\alpha<\beta$인 경우 (나)를 만족시키려면
방정식 $f(x)=\beta$의 서로 다른 실근의 개수가 1이고,
방정식 $f(x)=\alpha$의 서로 다른 실근의 개수는 2가 되어야 한다.




즉, 방정식 $f(f(x))=0$의 모든 실근은 $p$, $q$, $r$이고 $p<q<\alpha<\gamma<\beta$이므로
방정식 $f(x)=r$의 서로 다른 실근의 개수는 1이고
$f(x)=q$의 서로 다른 실근의 개수는 3, $f(x)=p$의 서로 다른 실근의 개수는 2이어야 한다.
즉, $p<\alpha$이므로 $p=0$이고, $\beta=3$임을 알 수 있다.

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-3)$라 두면 $f(0)=3$에서 $f(x)=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)^2(x-3)$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $\alpha$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\alpha}{3}+2$에서 극대이므로

$f\left(\dfrac{\alpha}{3}+2\right)=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)^2(x-3)=-\dfrac{2}{\alpha^2}\left(2-\dfrac{2\alpha}{3}\right)^3=\alpha$

$\left(2-\dfrac{2\alpha}{3}\right)^3=-\dfrac{\alpha^3}{2}$, $2-\dfrac{2\alpha}{3}=\dfrac{\alpha}{-\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)^2(x-3)$, $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$이고

$60(p+q)=50$

# 여담

사실....해설 배포할 생각은 없었습니다.
재탕한 문제들이라 많은 관심을 못 받을 줄 알았는데,
생각보다 너무 많은 관심을 주신 덕분에 이렇게 해설까지 쓰게 되었습니다.
모의고사 배포할 때 앞으로 큼지막한 자료 배포는 없다고 했었는데
어쩌다 보니 이러고 있네요.

해설 쓰면서 몇 가지 깨달은 점이 있는데
1. 해설 감당 가능한 문제만 만들자 (57번 같은)
2. 그래프 필요 없는 문제만 만들자 (56번 같은)
3. 그냥 공모를 해서 돈을 좀 벌자
입니다. 암튼, 정말 좋은 경험이었습니다.

추가 TMI
1. 28번, 42번, 55번 문제가 N제 문제 중에서 가장 나이가 많습니다. (만든 지 5년 넘음)
2. 57번은 군대에 있었을 때 만들었습니다. 군대가 사람 미치게 만든다는 것을 가장 잘 보여주는 문제가 아닌가 싶네요.
3. N제 문제 중에서 위치, 속도, 가속도 문제는 단 한 문제도 없습니다.
4. 앞으로로 큼지막한 자료 배포는 없습니다. 진짜로

풀어주신 모든 분들 및 해설 봐주신 모든 분들 진심으로 감사드립니다.
앞으로의 수능도 대박나시길 기원합니다!

# 감사합니다!