지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1}\,(n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A = \{a_1,\, a_{2,}\, a_3,\, a_4,\, a_5\}, \quad B = \{b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4,\, b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? 〔2024학년도 6월 12〕

① 30　② 34　③ 38　④ 42　⑤ 46

1. 정답 ⑤ 〔2024학년도 6월 12〕

1) 등차수열은 $a_n = a+(n-1)d$로 놓기, 문제해석

일단 $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다고 하네요. 그럼 $a_n = a+(n-1)d$ $(d \neq 0)$로 설정하죠. $a_2 = -4$이니까 $a+d = -4$이고 $a_n = -4+(n-2)d$이네요.

이때 $b_n = a_n + a_{n+1}$ $(n \geq 1)$이라고 하네요. 바로 식을 설정하면 $b_n = -8+(2n-3)d$ $(n \geq 1)$입니다.

그리고 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$일 때 $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열의 a_{20}의 합을 구하라고 합니다.

먼저 집합 A, B에 대하여 $n(A \cap B) = 3$이라는 건 겹치는 원소가 3개 있어야 한다는 거죠? 이때 우리가 설정한 등차수열을 각각 집어넣어보면

$$A = \{-4-d,\ -4,\ -4+d,\ -4+2d,\ -4+3d\},$$
$$B = \{-8-d,\ -8+d,\ -8+3d,\ -8+5d,\ -8+7d\}$$

이렇게 되네요. 결국 각각의 집합에 대하여 서로 겹치는 게 3개여야 합니다.

일단 여기서 주목해야 할 점은 $\{a_n\}$은 공차가 d이고, $\{b_n\}$은 공차가 $2d$라는 점입니다. 그 말은 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 어느 하나의 항이라도 겹치는 부분이 있다면, 예를 들어 $a_n = b_n$이라면 $b_{n+1} = a_{n+2}$, $b_{n+2} = a_{n+4}$, $b_{n+3} = a_{n+6} \cdots$의 관계가 성립하게 된다는 거죠. $\{b_n\}$은 값이 증가하는(혹은 감소하는) 속도가 $\{a_n\}$보다 두 배 빠르므로(공차가 두 배이므로) $\{a_n\}$이 두 항만큼 값이 변화할 때 $\{b_n\}$은 하나의 항만큼만 값이 변화하면 같아집니다.

그런데 이때 A와 B는 겹치는 게 3개여야 하잖아요? 방금 말했듯이 $a_n = b_n$일 때 $b_{n+1} = a_{n+2}$, $b_{n+2} = a_{n+4}$, $b_{n+3} = a_{n+6} \cdots$ 이어야 하는데 A의 원소의 개수는 5개입니다. 여기서 한 항을 건너 뛰어 B의 원소 3개와 같아지기 위해서는 무조건 a_1, a_3, a_5가 B의 원소 3개와 같아야 하겠네요.

이제 B의 원소 3개를 무엇을 고르느냐가 문제가 됩니다. 연속해서 뽑아야 하죠? 가능한 경우는 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(b_2,\ b_3,\ b_4)$, $(b_3,\ b_4,\ b_5)$ 이렇게 3개입니다.

2) 케이스 분류

2-1) $(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

이러면 $a_1 = b_1$이어야 합니다. $-4-d=-8-d$이므로 $d=0$인데 아까 $d \neq 0$이어야 한다고 했잖아요? 안 되겠네요.

2-2) $(b_2,\ b_3,\ b_4)$일 때

$a_1 = b_2$이어야 합니다. $-4-d=-8+d$이고 $d=2$이네요.

$A=\{-6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2\}$, $\quad B=\{-10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6\}$이니까 겹치는 것도 딱 3개구요. 맞습니다!

$a_n = -4+2(n-2)$이니까 $a_{20}=32$이네요.

2-3) $(b_3,\ b_4,\ b_5)$일 때

$a_1 = b_3$이어야 합니다. $-4-d=-8+3d$이고 $d=1$이네요.

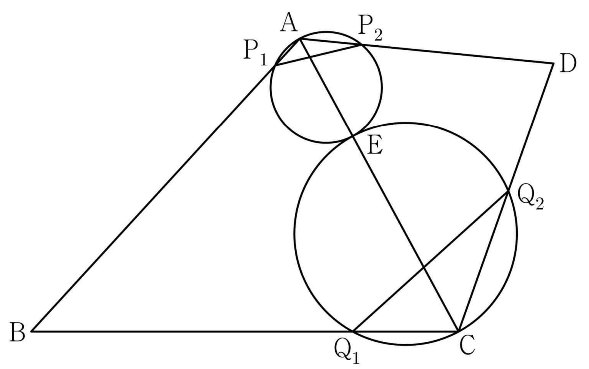
$A=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1\}$, $\quad B=\{-9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1\}$이니까 맞네요. $a_n = n-6$이고 $a_{20}=14$입니다.

따라서 모든 a_{20}의 합은 $32+14=46$입니다. 답은 ⑤번이네요.

2. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \overline{\mathrm{CD}}=2,\ \cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자.
$\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$) 〔2024학년도 6월 13〕



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

2. 정답 ① 〔2024학년도 6월 13〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 삼각형은 정해져 있다 - 내부 : 두 변의 길이와 한 각

일단 그림이 있고 $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle \mathrm{BCD})=-\dfrac{1}{3}$, $\angle \mathrm{DAB}>\dfrac{\pi}{2}$라고 합니다. 그림에다 다 표시해두구요. 이후에 뭐 어쩌구저쩌구하는데 이미 그림에 다 표시되어 있습니다.

먼저 삼각형 BCD의 경우 두 변의 길이와 한 각이 정해졌습니다. 바로 $\overline{\mathrm{BD}}$를 구해보죠.

$\cos C=-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3^2+2^2-\overline{\mathrm{BD}}^2}{2\times3\times2}$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{17}$입니다.

점 E는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점입니다. $\overline{\mathrm{AE}}=2r$, $\overline{\mathrm{CE}}=4r$이라고 할게요. 그리고 이후에는 P_1, P_2, Q_1, Q_2를 설명하고, $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$라고 합니다. 여기서 잘 생각해보세요. 일단 문제에서 중요하게 다뤄지는 건 AE를 지름으로 하는 원과 CE를 지름으로 하는 원입니다. 거기에 $\overline{\mathrm{AE}}=2r$, $\overline{\mathrm{CE}}=4r$로 서로의 반지름에 관한 관계식도 있어요. CE가 AE의 두 배죠. 그런데 심지어 새로운 관계식 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$도 있네요? 그리고 각 원에는 삼각형이 내접하고 있어요. 길이의 비에 관한 공식을 생각해보세요.

$\dfrac{A}{\sin A}=2R$을 사용할 수 있을 것 같지 않나요? 심지어 반지름도 연관되어 있어 식을 연결할 수도 있을 것 같아요. 가보죠.

먼저 $\angle \mathrm{ABD}=\mathrm{A}$, $\angle \mathrm{BCD}=\mathrm{B}$라 하면 삼각형 $A\mathrm{P_1P_2}$에 대하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin A}=2r$이고, $C\mathrm{Q_1Q_2}$에 대하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin C}=4r$입니다. 그러면 $\dfrac{2\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin A}=\dfrac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin C}=4r$가 되겠군요. 이때 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\overline{\mathrm{P_1P_2}}$이므로 넣어서 정리하면 $\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin C}=4r$가 됩니다.

이때 $\cos C=-\dfrac{1}{3}$이네요? 그러면 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$을 이용해서 $\sin C$를 구해봅시다. 넣고 정리하면 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$가 나오네요. $\dfrac{6}{\sin A}\equiv\dfrac{15}{2}=4r$이고 $\sin A=\dfrac{4}{5}$, $r=\dfrac{15}{8}$입니다. 이때 $\angle \mathrm{DAB}>\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$를 이용하면 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$이네요.

이후에 삼각형 ABD의 넓이가 2라는 것과 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값을 구하라고 합니다. 일단 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$는 삼각형 ABD의 두 변의 길이이죠? 그리고 ABD의 넓이는 2이구요. 우리는 나머지 한 변의 길이인 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{17}$와 한 각인 $\cos A=-\frac{3}{5}$를 알죠. 다 나왔네요?

먼저 편의상 $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$이라고 할게요. 코사인법칙에 의하여 $\cos A=-\frac{3}{5}=\frac{a^2+b^2-17}{2\times a\times b}$이고 정리하면 $a^2+b^2+\frac{6}{5}ab=17$입니다.

그리고 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times b\times a\times \sin A=2$이고 $\sin A=\frac{4}{5}$이므로 $ab=5$이네요. $a^2+b^2+\frac{6}{5}ab=17$에 넣으면 $a^2+b^2=11$입니다. 우리는 $a+b$를 구해야 하잖아요? 제곱의 형태로 만들고 루트 씌우죠.

$a^2+b^2=11$의 양변에 $2ab=10$를 더하면 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=21$가 되구요, 길이가 음수가 될 리 없으니 $a+b=\sqrt{21}$입니다. 답은 ①번이네요.

3. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? 〔2024학년도 6월 14〕

① $\frac{1}{5}$　　② $\frac{7}{30}$　　③ $\frac{4}{15}$　　④ $\frac{3}{10}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

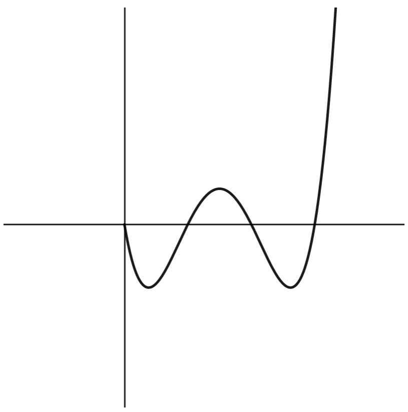
3. 정답 ③ 〔2024학년도 6월 14〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$인데 출발한 후에 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여 $t=0$부터 $t=2$까지 위치의 변화량의 최댓값을 구하랍니다.

일단 운동 방향을 한 번만 바꾼다는 건 어떤 의미인가요? 도함수가 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 뜻이죠. 지금 위치의 함수의 도함수는 속도의 함수 $v(t)$잖아요? 다시 말하면 $v(t)$의 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 말이 됩니다.

그런데 지금 $v(t)$를 잘 보세요. 사차함수입니다. 만약에 a 혹은 $2a$가 0과 1이 아닌 다른 값이라면 $v(t)$는



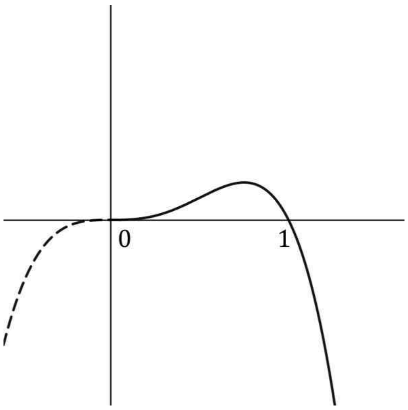
이런 함수가 되겠죠? 이러면 부호의 변화가 3번이나 일어나게 됩니다. 조건에 맞지 않잖아요?

결국 a 혹은 $2a$가 0과 1가 되어 겹치는 부분이 있어야 하겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a=0$일 때

$a=0$이라면 $v(t) = -t^3(t-1)$입니다. 그래프를 그려보면

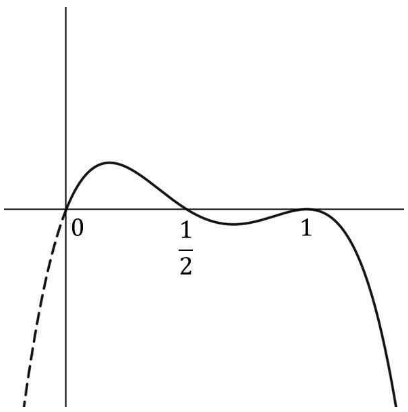


이렇게 됩니다. 부호의 변화가 단 한 번만 일어나죠? 맞네요!

$t=0$부터 $t=2$까지의 위치의 변화량을 구해봅시다. $\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right]_0^2=-\frac{12}{5}$입니다.

2-2) $a=\frac{1}{2}$일 때

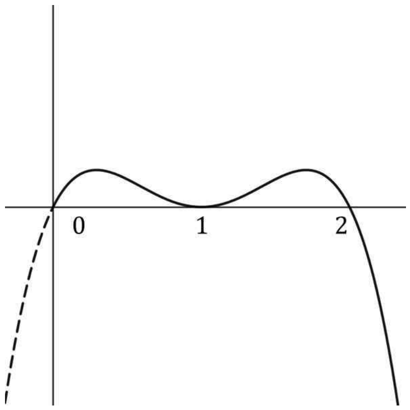
정확히 말하면 $2a=1$일 때입니다. 이러면 $v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$이고 그래프로 그려보면



이렇게 됩니다. $t=\frac{1}{2}$일 때 부호변화가 일어난 후 다시 일어나지 않네요. 조건을 만족시킵니다. 위치의 변화량을 구해보면 $\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2=-\frac{11}{15}$이네요.

2-3) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이고 그래프는



이렇게 됩니다. $t=2$에서만 부호변화가 일어나네요. 조건을 만족합니다. 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2=\frac{4}{15}$$ 입니다.

위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이네요. 답은 ③번입니다.

4. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?
〔2024학년도 6월 15〕

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

4. 정답 ② 〔2024학년도 6월 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

k가 자연수인데 $a_1 = k$이고 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$이라고 합니다. 이때 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하라네요.

일단 곱해서 음수가 나온다는 건 a_3, a_4, a_5, a_6 중에서 음수가 1개이거나 3개여야 한다는 거죠?

먼저 $a_1 = k > 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 - k = -2$입니다. 이러면 $a_2 = -2 \le 0$이므로 $a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$이죠. 여기서부터 시작하네요. $2-k$는 0보다 작거나 같을까요 아니면 클까요?

2) 케이스 분류

2-1) $a_3 = 2 - k > 0$일 때

$k < 2$이면 $k < 2$인 자연수는 $k = 1$ 하나밖에 없죠. $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - 1 & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - 1 & (a_n > 0) \end{cases}$입니다. $a_3 = 1$이고, $a_4 = a_3 - 7 = -6$입니다. $a_5 = a_4 + 7 = 1$입니다. $a_6 = a_5 - 11 = -10$입니다. 이러면 a_3, a_4, a_5, a_6 중에서 음수가 총 2개가 되므로 곱해서 음수가 나올 수 없습니다.

2-2) $a_3 = 2 - k \le 0$일 때

$k \ge 2$이면 $a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$입니다. 이때 역시 마찬가지로 $8 - 2k$가 0보다 작거나 같은 경우와 큰 경우로 나뉘네요.

2-2-1) $a_4 = 8 - 2k > 0$일 때

$k < 4$이면 $2 \le k < 4$인 자연수는 $k = 2$, 3이네요.
$k = 2$라면 $a_3 = 0$, $a_4 = 4$, $a_5 = -6$, $a_6 = 2$로 음수가 총 1개입니다. 다만 문제는 0이 있어서 곱하면 0이 되겠네요. 조건에 맞지 않습니다.

$k = 3$이라면 $a_3 = -1$, $a_4 = 2$, $a_5 = -9$, $a_6 = -2$로 음수가 총 3개입니다. 되네요!

2-2-2) $a_4 = 8-2k \le 0$일 때

일단 지금 현재 a_3, a_4 모두 0보다 작거나 같습니다.

$a_4 \le 0$이므로 $a_5 = 16-3k$입니다. 또 나뉘겠죠?

2-2-2-1) $a_5 = 16-3k > 0$일 때

$4 \le k < \frac{16}{3}$인 자연수는 $k=4$, 5입니다.

$k=4$이면 $a_4 = 0$이 됩니다. 하나라도 0이 되면 안 되죠?

$k=5$이면 $a_3 = -3$, $a_4 = -2$, $a_5 = 1$, $a_6 = -14$로 음수가 3개입니다. 되네요!

2-2-2-2) $a_5 = 16-3k \le 0$일 때

이러면 a_3, a_4, a_5 모두 0보다 작게 됩니다. 0이 되는 케이스는 다 지워버렸으니까 고려하지 않아도 됩니다. 그러면 $a_6 > 0$이 되는지만 확인하면 되겠네요.

$a_5 \le 0$이기 때문에 $a_6 = 26-4k$입니다. $a_6 > 0$이 되려면 $26-4k > 0$이고 $k < \frac{13}{2}$이어야 하네요.

$\frac{16}{3} \le k < \frac{13}{2}$인 자연수 k는 $k=6$만 존재합니다.

결국 $k=3$, 5, 6일 때 조건을 만족시킬 수 있습니다. 따라서 모든 k의 합은 $3+5+6=14$입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.
〔2024학년도 6월 20〕

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\vert g(x)\vert \geq \vert g(3)\vert$이다.

5. 정답 39 〔2024학년도 6월 20〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$랍니다. 그럼 $g(0)=0$이고 $g'(x)=f(x)$이죠?

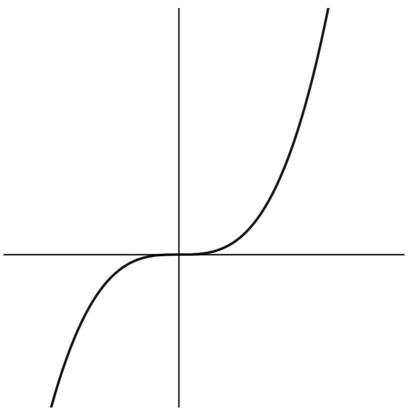
그리고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수입니다.

이때 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$라고 하네요.

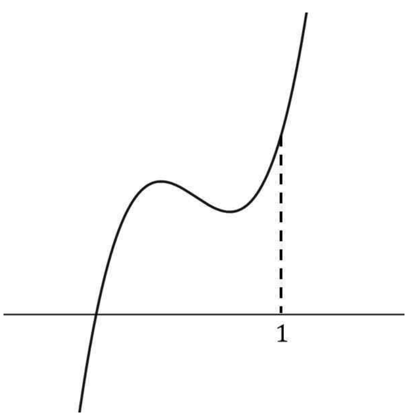
먼저 $g(x) \geq g(4)$라는 건 $x \geq 1$에서 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 갖게 된다는 거죠? 그리고
$|g(x)| \geq |g(3)|$이므로 절댓값을 씌웠을 때는 $x=3$에서 최솟값을 갖게 된다는 거구요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 먼저 개형부터 살펴볼게요. 감소하는 부분 없이 계속 증가하는 개형을 생각해보죠.

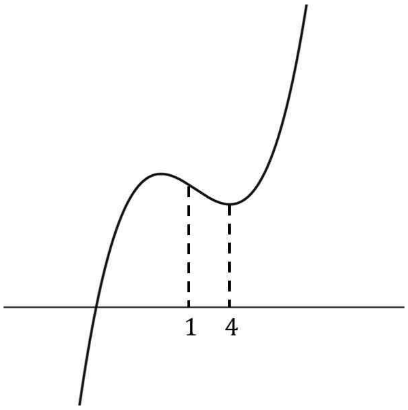


어느 곳에 $x=1$을 설정하더라도 $x \geq 1$에서 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지게 됩니다. 따라서 이 개형은 불가능합니다. 따라서

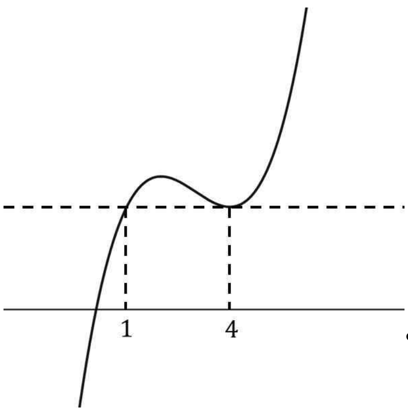


이런 개형이 됩니다. 이제 문제는 $x=1$을 어디에 설정해야 하냐는 거에요. 그림과 같이 설정하면 $x \geq 1$에서

$g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지게 됩니다. 안 되죠?

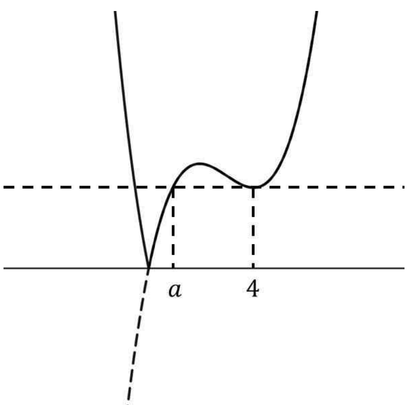


이런 식으로 설정하면 $x \geq 1$일 때 $g(x)$는 $x=4$에서 최소가 되어야 하므로 극소가 되는 x좌표는 4가 됩니다. 언제까지일까요?



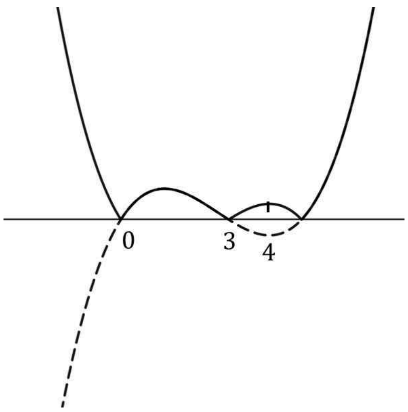
이때가 마지막이겠네요. 왜냐하면 이거보다 더 왼쪽으로 가면 최소가 되는 지점이 $x=1$이 되거든요.

이제 $|g(x)| \geq |g(3)|$를 확인해보죠. 이거는 $x \geq 1$일 때 $g(x)$에 절댓값을 씌운 $|g(x)|$는 $x=3$에서 최솟값을 갖게 된다는 의미입니다. 우리가 방금 찾은 개형을 위아래로 움직이면서 확인해볼게요.



이렇게 설정하면 최솟값은 $x=3$이 불가능합니다. $x=1$은 a와 4 사이에 있는데 최솟값은 a보다 작은 곳에 있잖아요.

지금 보니까 최소가 되는 지점은 x축과 만나는 지점이네요. 절댓값 함수는 무조건 0보다 크거나 같으니까 최소는 0이 되는 지점이죠. 그러니까 다시 말하면 $g(3)=0$이 되도록 해야 하겠네요. 설정해보면



이렇게 되겠네요.

결국 정리해보면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 $g(0)=g(3)=0$이고 $g'(4)=0$인 삼차함수입니다. 함수를 구해볼게요.

3) 함수 구하기 - 인수정리

먼저 $g(0)=g(3)=0$이므로 인수정리에 의해 $g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-a)$라 할 수 있습니다. $g'(4)=0$이므로 미분하고 값을 넣어보면 $g'(x)=x^2-\frac{2(a+3)}{3}x+a$이고 $g'(4)=8-\frac{5a}{3}=0$이고 $a=\frac{24}{5}$입니다.

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)\left(x-\frac{24}{5}\right)$이고 $g'(x)=f(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$입니다. $f(9)=39$이네요.

6. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
〈보기〉의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오.(단, $A+B+C \neq 0$)
〔2024학년도 6월 21〕

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$ 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

6. 정답 110 〔2024학년도 6월 21〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

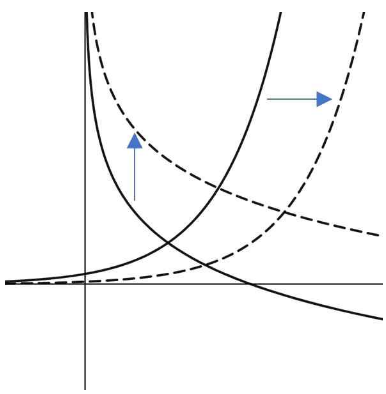
$y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라고 할 때 $A+B+C$의 값을 구하랍니다. 규칙은 바로 아래에 있구요.

ㄱ에서 $f(1)=1$이고 $f(2)=2$냐고 물어보네요. 일단 $f(1)$은 $1-\log_2 x$와 $y=2^{x-1}$이 만나는 점의 x좌표죠? 그게 1이냐고 묻는 거구요. $x=1$을 넣으면 둘 모두 1이 나옵니다. $f(1)=1$ 맞네요.

$f(2)$도 해보죠. $2-\log_2 x$와 $y=2^{x-2}$인데 둘 다 $x=2$를 넣으면 1이 나옵니다. $f(2)=2$도 맞네요.
$A=100$입니다.

ㄴ에서 t값이 증가할 때 $f(t)$의 값도 증가하냐고 물어보네요. 일단 그래프부터 살펴보죠.
$y=t-\log_2 x$는 $y=\log_2 x$를 부호를 반대로 해서 뒤집은 후에 t만큼 위로 올린 함수이고,
$(1,\ t)$, $(2,\ t-1)$를 지나는 함수입니다.

$y=2^{x-t}$는 $y=2^x$를 t만큼 오른쪽으로 평행이동한 함수이고 $(t,\ 1)$을 지나는 함수입니다. 그래프로 그려보면



이렇게 되죠. 두 함수 중 어느 하나를 고정시킨 후에 나머지 함수를 움직여도 만나는 점의 x좌표가 증가하는데, 심지어 두 함수 모두 증가하면? 당연히 만나는 점의 x좌표는 증가하겠죠? ㄴ도 맞고 $B=10$입니다.

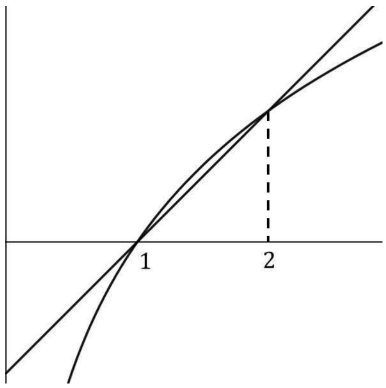
ㄷ에서 $t>0$일 때 $f(t)\geq t$이냐고 물어보네요. 일단 생각을 좀 해볼게요.

$y=2^{x-t}$의 경우 무조건 $(t,\ 1)$ 좌표를 지나게 됩니다. 그러니까 $f(t)\geq t$가 되려면 $y=t-\log_2 x$에 $x=t$를 넣은 값은 1보다는 크거나 같아야 합니다. 그래야 감소하는 $y=t-\log_2 x$가 증가하는 $y=2^{x-t}$과 만나게 되고, 그 점의 x좌표는 t보다 크거나 같게 될 테니까요. 따라서 $t-\log_2 t\geq 1$이고 $t-1\geq \log_2 t$이어야

합니다.

이걸 그래프 상에서 표현하자면 $t>0$일 때 $y=t-1$의 그래프는 $y=\log_2 t$보다는 무조건 위에 있어야 합니다.

하지만 $y=\log_2 t$는 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$을 지나고, $y=t-1$ 역시 그러하죠. 이걸 그래프로 그려보면



$y=\log_2 t$가 $y=t-1$보다 커지는 부분이 존재하네요? ㄷ은 맞지 않습니다. $C=0$입니다.

따라서 $A+B+C=110$입니다.

7. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.
〔2024학년도 6월 22〕

함수 $f(x)$에 대하여 $\left\{\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right\} \times \left\{\dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}\right\} < 0$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k + \dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

7. 정답 380 〔2024학년도 6월 22〕

1) 문제해석

0이 아닌 정수 a가 있는데 $f(x)=x^3-2ax^2$이라고 합니다. $f(x)=x^2(x-2a)$이니까 $x=0$에서 x축에 접하고 $x=2a$에서 지나가는 지렁이같은 삼차함수죠? $x=\dfrac{4a}{3}$, $x=0$에서 극값을 갖구요.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하라네요. 일단 조건을 볼까요?

$\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$을 만족시키는 x_1, x_2, x_3이 $k<x<k+\dfrac{3}{2}$의 범위에 존재한다고 합니다.

그러니까 이걸 다시 표현하면 우리는 $k<x<k+\dfrac{3}{2}$이라는 범위를 설정할건데, 그 범위 안에서는 $\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$가 성립해야 한다는 거죠? 그리고 이게 성립하는 모든 k의 값의 곱이 -12가 되어야 한다는 거구요. 대충 소인수분해 해보면 $-2^2\times 3$인데 경우의 수가 너무 많아서 찍을 수는 없겠네요.

$\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 형태를 잘 관찰해보세요. 점과 점 사이의 기울기의 식이죠? 왼쪽의 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$는 점 $(x_1,\ f(x_1))$과 점 $(x_2,\ f(x_2))$을 이은 직선의 기울기이고, 오른쪽의 $\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$는 점 $(x_2,\ f(x_2))$과 점 $(x_3,\ f(x_3))$을 이은 직선의 기울기이네요. 여기서 x_1, x_2, x_3는 존재성만을 말해줬으니까 단 하나의 케이스만 존재하더라도 조건이 성립합니다. 아무튼 두 값을 곱했을 때 음수가 나와야 한다는 거네요. 둘 중 하나는 음수가 되어야 한다는 거예요.

그런데 생각해보면 계속 증가하는 부분, 혹은 계속 감소하는 부분만 존재할 때 함수 위의 점 세 개를 정해서 기울기를 곱했을 때 음수가 나올까요? $k<x<k+\dfrac{3}{2}$의 범위에서 계속 증가하는 부분만 존재한다면 기울기는 양수×양수가 되어 양수가 될 거고, 계속 감소하는 부분만 존재한다면 기울기는 음수×음수가 되어 양수가 될

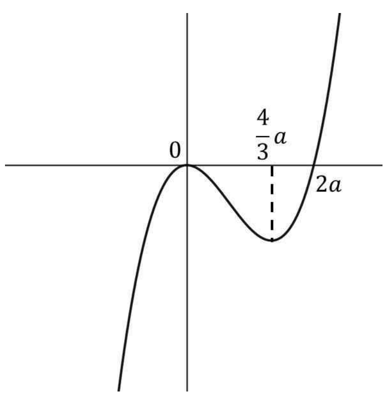
거에요. 그러니까 기울기의 곱이 음수가 된다는 말은 **$k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재해야 한다는 거죠.**

다시 정리해봅시다. $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하는 k를 찾아낸 다음,
그 찾아낸 k의 곱이 -12가 되도록 하는 a를 구한 후,
$f'(10)$의 값이 계산해라. 이거네요.

일단 $f(x)=x^2(x-2a)$이므로 a가 양수냐 음수냐에 따라 개형이 두 가지가 가능합니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 케이스 분류

2-1) $a>0$일 때



이런 함수네요.
일단 $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위 안에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하게 하는 최솟값은 $k+\frac{3}{2}=0$이 될 때이고, 최댓값은 $k=\frac{4}{3}a$일 때이죠. 그러니까 $-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$가 조건을 만족시키는 k의 범위입니다.

그런데 여기서 조심해야 할 점은 $0<x<\frac{4}{3}a$의 범위보다 $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위가 작을 경우, $k<x<k+\frac{3}{2}$에서는 감소만 할 가능성이 존재한다는 거에요. 이 경우는 $-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$에서 제거해야 합니다.

먼저 k의 곱이 음수가 나와야 하기 때문에 $-\frac{3}{2}< k < \frac{4}{3}a$의 범위 안에 존재하는 정수인 -1은 무조건 필요합니다. 그러니까 $-1 < x < \frac{1}{2}$의 범위에서는 무조건 증가와 감소가 둘 다 있어야 해요. 그런데 그건 가능할 거 같네요. $-1 < x < 0$의 범위에서 증가하고, $x > 0$일 때는 감소하는 부분이 무조건 존재하니까 가능합니다.

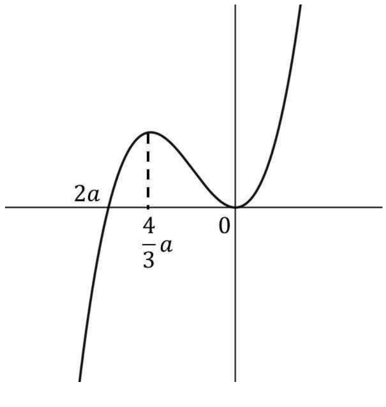
그리고 $k=0$은 포함되어서는 안 됩니다. 그러면 곱이 0이 되겠죠? 따라서 0을 제외하기 위해서 $0 < x < \frac{3}{2}$의 범위는 무조건 감소만 해야 합니다. 따라서 범위의 오른쪽 끝인 $\frac{3}{2}$보다 감소하는 범위의 끝점인 극소점의 x좌표 $\frac{4}{3}a$이 커야 하므로 $\frac{3}{2}< \frac{4}{3}a$이고 $a > \frac{9}{8}$입니다.

이후에 곱이 -12가 되려면 $k=3$, 4가 포함되어야 하겠죠? $k=1$은 있든 없든 상관없구요.
먼저 $k=3$의 경우 $3 < x < \frac{9}{2}$의 범위 사이에 극소점의 x좌표인 $x=\frac{4}{3}a$가 포함되어 있어야 합니다.
$3 < \frac{4}{3}a < \frac{9}{2}$이고 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$입니다.

$k=4$도 마찬가지입니다. $4 < \frac{4}{3}a < \frac{11}{2}$이고 $3 < a < \frac{33}{8}$입니다.

그런데 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$와 $3 < a < \frac{33}{8}$를 동시에 만족시키는 정수 a가 존재하나요? $3 < a < \frac{33}{8}$를 만족시키는 건 $a=4$인데 이러면 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$를 만족시킬 수 없네요. 아예 조건을 만족시킬 수 없는 경우입니다.

2-2) $a < 0$일 때



여기도 마찬가지로 확인해보면 되겠죠? 그런데 음수일 때는 조심해야 할 점이 더 있어요.

먼저 $k \geq 0$일 때는 아예 불가능합니다. 계속 증가하는 부분이잖아요? 따라서 k는 무조건 음의 정수여야 합니다. k가 음의 정수라면 곱했을 때 부호도 신경써야 해요. 음의 정수가 짝수 개면 -12가 아니라 12가 나오겠죠?

여기서 경우의 수를 한 번 생각해볼게요. 1×12, 2×6, 3×4가 가능합니다. 다만 1×12는 불가능합니다. 왜냐하면 무조건 음의 정수라서 $-1\times-12=12$가 되거든요. 그러면 2×6, 3×4는 왜 가능하냐고 물으실 수 있지만 얘네 둘은 -1을 중간에 끼워넣는 게 가능합니다. $-1\times-2\times-6=-12$이고, $-1\times-3\times-4=-12$이니까요. 따라서 가능한 k는 $(-1,\ -2,\ -6)$ 이거나 $(-1,\ -3,\ -4)$입니다.

일단 최초로 달성하는 범위는 $k+\frac{3}{2}=\frac{4}{3}a$을 넘을 때부터 $k=0$일 때까지입니다. $\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<0$의 범위 안에 있는 거죠. 다만 $a>0$때와 마찬가지로 감소만 하는 구간에 $k<x<k+\frac{3}{2}$가 있다면 그건 범위에서 제외해줘야 합니다.

$(-1,\ -2,\ -6)$의 경우 각각의 $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 여기서는 $-3,\ -4,\ -5$가 제외되었으니 이 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k=-6$일 때의 범위에는 극대점이 포함되고, $k=-1,\ -2$일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. 그런데 $k=-2$일 때는 $-2<x<-\frac{1}{2}$로 극소점의 x좌표인 $x=0$가 포함되어 있지 않은데요? 이 경우는 불가능하겠네요.

$(-1,\ -3,\ -4)$의 경우 역시 각각의 $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 다만 여기서는 -2가 제외되었으니 $k=-2$인 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k=-3,\ -4$일 때의 범위에는 극대점이 포함되고, $k=-1$일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. $k=-1$일 때는 $-1<0<\frac{1}{2}$로 당연하게 되고, $k=-3,\ -4$일 때는 $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{3}{2}$이고 $-4<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$이네요. 정리하면 $-\frac{9}{4}<a<-\frac{9}{8}$이고 $-3<a<-\frac{15}{8}$입니다. 이를 모두 만족시키는 음의 정수는 $a=-2$이네요.

$f(x)=x^2(x+4)$이고 $f'(x)=3x^2+8x$이니까 $f'(10)=380$이네요.