제 3 교 시

2016학년도 해군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

B형

성명		수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 **문제지**에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ **답안지**에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

해 군 사 관 학 교

공　　란

1. ${}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+{}_3\mathrm{H}_3$의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $(A+B)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$이고 행렬 A의 모든 성분의 합이 2일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 있다. 행렬 AB로 나타내어지는 일차변환에 의하여 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$이 각각 두 점 $(0,\ 2)$, $(-2,\ 0)$으로 옮겨질 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

5. 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점 $(2,\ b)$에서의 접선이 점 $(0,\ -5)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=e^x+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $e-1$ ② $e+1$ ③ $2e-1$ ④ $2e$ ⑤ $2e+1$

7. 어느 과수원에서 생산되는 사과의 무게는 평균이 350 g이고 표준편차가 30 g인 정규분포를 따르고, 배의 무게는 평균이 490 g이고 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 총합을 X(g)이라 하고, 이 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 총합을 Y(g)이라 하자. $X \geq 3240$이고 $Y \geq 2008$일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 사과의 무게와 배의 무게는 서로 독립이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.16
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34

① 0.0432 ② 0.0482 ③ 0.0544 ④ 0.0567 ⑤ 0.0614

8. 어느 액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압 P(mmHg) 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

이 액체의 끓는 온도가 0℃일 때와 50℃일 때의 증기압을 각각 P_1(mmHg), P_2(mmHg)라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은? [3점]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

9. 주머니에 흰 공 1개, 파란 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 꺼낸 공과 같은 색의 공을 1개 추가하여 꺼낸 공과 함께 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 두 번 반복하여 두 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공도 검은 공이었을 확률은? (단, 공의 크기와 모양은 모두 같다.) [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{11}{21}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

10. $0 \le x \le \pi$에서 함수 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x$는 $x=\theta$일 때 최댓값을 갖는다. $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[11~12] 좌표평면에서 매개변수 θ로 나타내어진 곡선

$$x=2\cos\theta+\cos 2\theta,\ y=2\sin\theta+\sin 2\theta$$

에 대하여 **11**번과 **12**번의 두 물음에 답하시오. (단, θ는 실수이다.)

11. $\theta=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. $0\le\theta\le\pi$일 때, 이 곡선의 길이는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 이차함수 $f(x)=x^2+2kx+2k^2+k$가 있다. x에 대한 방정식

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}}-\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$$

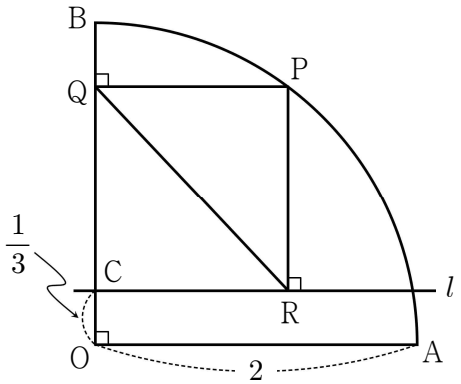
이 서로 다른 두 개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\dfrac{3k}{n}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$ ④ $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\dfrac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{OC}=\frac{1}{3}$인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은? [4점]



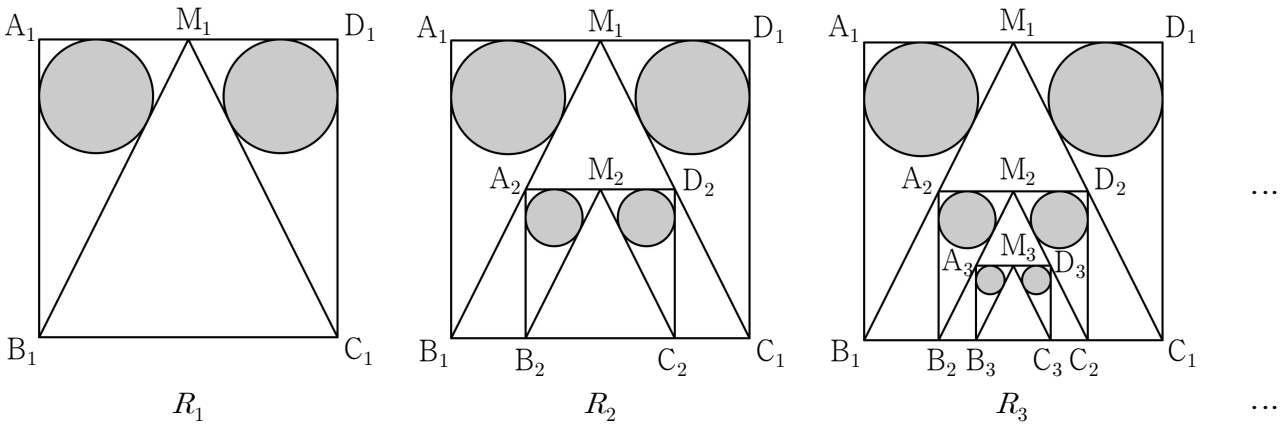
① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1의 중점을 M_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 변 A_2D_2의 중점을 M_2라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$와 $M_2C_2D_2$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그린 후 변 A_3D_3의 중점을 M_3이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$과 $M_3C_3D_3$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ② $\frac{4(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ③ $\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$

④ $\frac{5(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5(9-4\sqrt{5})}{3}\pi$

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1} = -\frac{3a_n + 2}{a_n} \quad (n \geq 1) \quad \cdots\cdots \ (*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> (*)에서
>
> $$a_{n+1} + 2 = -\frac{a_n + \boxed{\text{(가)}}}{a_n} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다. 여기서
>
> $$b_n = \frac{1}{a_n + 2} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이라 하면 $b_1 = 3$이고
>
> $$b_{n+1} = 2b_n - \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$b_n = \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이므로
>
> $$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} - 2 \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p \times q \times f(5)$의 값은? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin x & (x \le 0) \\ -1+\sin x & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x)f(-x) = -1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 연속이다.

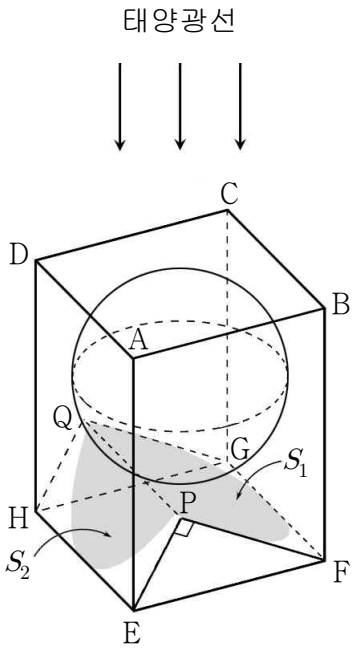
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표공간에서 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$와 xy평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하자. 점 P에서 이 구와 접하고 점 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ -4)$를 지나는 평면을 α라 할 때, 원점과 평면 α 사이의 거리는? [4점]

① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

20. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$ 인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle EPF=90°$인 삼각기둥 EFP$-$HGQ가 놓여있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 S_1, $S_2\,(S_1>S_2)$라 하자. $S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2$의 값은? [4점]



① $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $8\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{28\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

21. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1 < x < 10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값은? (단, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.) [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(나) $\sum_{k=1}^{3} f(kx) = 3f(x)$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

22. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n\ \ (n \geq 1)$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$이다. 합성변환 $f \circ f$에 의하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(-3,\ 4)$, $\mathrm{D}(-3,\ -3)$이 옮겨진 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 S라 할 때, $81S$의 값을 구하시오. [3점]

24. 타원 $2x^2+y^2=16$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E는 단위행렬이다.)

(가) $A-E$의 역행렬은 $A-3E$이다. (나) $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

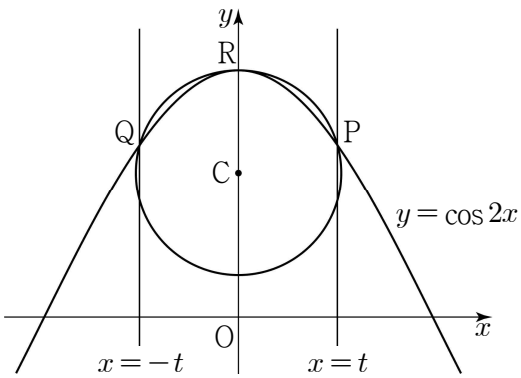
$A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)$가

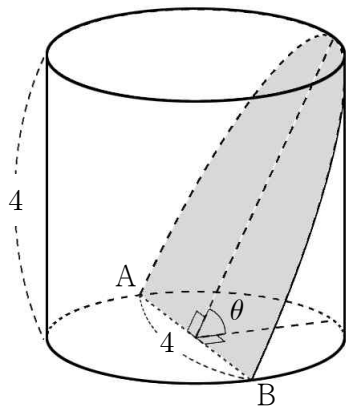
$$f(1)=2,\ f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}+\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ f(t))$라 할 때, $\lim_{t\to+0} f(t)=\alpha$이다. 100α의 값을 구하시오. [4점]

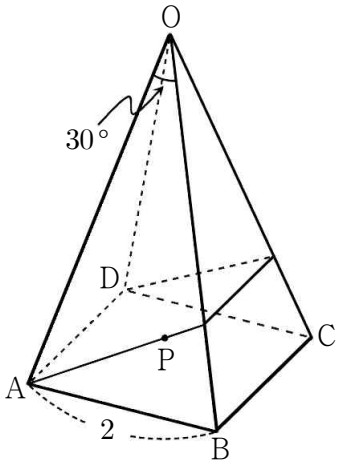


28. 그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 모두 4인 원기둥이 있다. 밑면의 지름 AB를 포함하는 평면으로 이 원기둥을 잘랐을 때 생기는 단면이 원기둥의 밑면과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta = 2$이다. 이 단면을 직선 AB를 회전축으로 하여 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 할 때, $\frac{3V}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



29. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률을 p라 할 때, $125p$의 값을 구하시오. (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점]

30. 그림과 같이 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형이고 밑면은 한 변의 길이가 2인 정사각형인 사각뿔 O－ABCD에서 $\angle AOB = 30°$이다. 점 A에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OB 위의 한 점과 모서리 OC 위의 한 점을 거쳐 점 D에 도착하는 최단경로를 l이라 하자. l 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$의 최댓값을 $a\sqrt{3}+b$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



공　　란