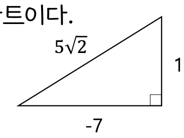
2024 06 KICE analysis

공통 과목, 미적분 과목

UR dokzon

6. $\cos\theta < 0$ 이고 $\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

θ가 어느 사분면에 있는지를 묻는 문항으로 학생들이 가끔 실수하기 좋은 파트이다.
사소한 tip은 삼각형의 변의 길이에 부호와 함께 표시하면 된다는 것이다.
→ 코사인과 탄젠트가 모두 음수이므로 공통 요소인 밑변을 음수로 쓰자.



9. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

수열의 합이 나올 때 가장 먼저 해야 하는 사고는 내가 계산할 수 있는지의 여부이다.
현재 주어진 식의 우변이 $n^2 + 2n$ 이므로 우리가 계산할 줄 아는 등차수열의 합임을 알 수 있다.
n^2의 계수는 공차의 절반이므로, 공차는 2이고 초항이 3이므로 $\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1$임을 알 수 있다.

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \rightarrow \sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$로 풀리는 것이다.

항상 수열 풀이의 처음엔 '내가 직접 계산할 수 있는 수열인지 아닌지를 판단해야 함'을 배워가면 된다.
→ 등차 or 등비인지, 쭉 소거되는 망원급수인지, 만약 그것도 아니면 계산 불가능하므로 변형이 필요하다.

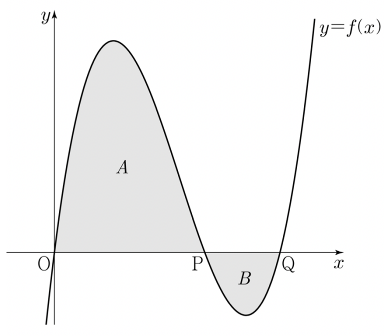
10. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 원점 O와 두 점 P, Q ($\overline{\mathrm{OP}} < \overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다.
곡선 $y = f(x)$ 와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B 라 하자.

$$(A\text{의 넓이}) - (B\text{의 넓이}) = 3$$

일 때, k 의 값은?



발문에서 묻고자 하는 것을 어떻게 구할 지에 대한 고민을 꼭 먼저 해야 한다.
k를 물어보고 있는데, 문자가 k 하나이기에 식도 하나만 필요하다는 것이다. 그림으로 인해 많은 사람들이 나도 모르는 새에 A, B를 구하게 되는데 어차피 식이 하나만 필요하므로 $\int_0^3 = 3$이라는 풀이가 가능하다.

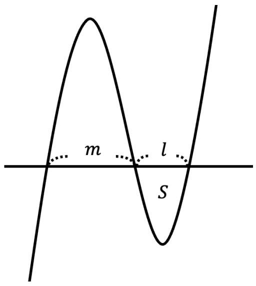
이때 $\int_0^3 = 3$을 구하는 방법도 여러 가지가 있다.

1) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라고 두고 $F(3)$을 구하는 방법

$\rightarrow\ f(x) = kx^3 - 5kx^2 + 6kx\ \rightarrow\ F(x) = \frac{1}{4}kx^4 - \frac{5}{3}kx^3 + 3kx^2\ \rightarrow\ F(3) = \left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right)k$

분수 계산 시에 대분수로 풀면 오히려 수월하다. $20 + \frac{1}{4} - 18\ \rightarrow\ \frac{9}{4}k = 3\ \rightarrow\ k = \frac{4}{3}$ (답)

2) '삼차함수 넓이 공식 : $\frac{|a|}{12}l^3(l+2m)$ (a는 최고차항의 계수)'을 이용하는 방법



$\rightarrow\ \frac{k}{12}(8\times(2+2) - 1\times(1+4)) = \frac{9}{4}k = 3\ \rightarrow\ k = \frac{4}{3}$ (답)

넓이 공식 두 번을 써서 둘의 차이가 3임을 이용했다.

3) 적분 구간을 바탕으로 대칭성을 이용하는 방법
→ 적분 구간이 하필 0부터 3인데, 이 숫자들은 모두 $f(x)$의 근이다.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ 임을 이용하자. (구간의 평균인 $x = \frac{a+b}{2}$에 대칭해도 넓이 동일)

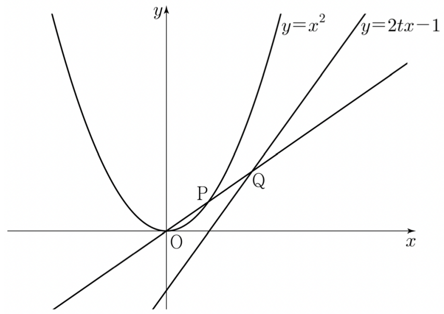
어차피 $x(x-3)$은 $x = \frac{3}{2}$에 대칭해도 그대로이지만, 다른 한 근인 $(x-2)$는 $(1-x)$가 된다.

$\int_0^3 f(x)\,dx + \int_0^3 f(3-x)\,dx = \int_0^3 kx(x-3)((x-2)+(1-x))\,dx = \frac{k}{6}\times 3^3 = 6\ \rightarrow\ k = \frac{4}{3}$ (답)

10번 문항인데 뭐 이렇게 많이 연구하느냐고 묻겠지만, 사실 어려운 문항에서 시간 단축하는 것보다 쉬운 문항들에서 시간 단축을 하는 것이 훨씬 쉽기 때문에 수험생 입장에서 이런 고민은 필수적이다.

또한 쉬워보이더라도 부정적분 $F(x)$를 설정하는 것이나, 넓이만 구하면 되니까 평행 이동을 하여 식을 간단하게 만드는 것(넓이 공식), 대칭성을 이용해 적분 대상을 쉽게 변형하는 것은 어려운 문항에서도 매우 자주 쓰이기 때문에 지금 푼 세 가지 풀이를 익히는 것은 절대 시간 낭비가 아닐 것이다.

11. 그림과 같이 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



문제에서 원하는 것은 결국 $(1-t)$가 약분되는 것이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$로부터 $(1-t)$를 뽑아내야겠다고 먼저 생각하고 접근을 해야 한다. 더불어 점과 점 사이의 거리를 써서 선분의 길이를 구할 것이라면, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$으로부터 $(1-t)^2$을 만들면 될 거다.

$y=2tx-1$과의 거리가 최소일려면 $y=x^2$와 기울기가 같은 점이어야 하므로 $\mathrm{P}\left(t,\ t^2\right)$이다.
$y=tx$와의 교점을 구하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$이다. $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+(1-t^2)^2$
의식적으로 $(1-t)^2$을 뽑아내자. $\frac{1}{t^2}(1-t^2)^2+(1-t^2)^2=\left(\frac{1}{t^2}+1\right)(1-t)^2(1+t)^2$ 으로 변형 가능하다.
$\rightarrow$ $(1-t)^2$을 제외한 나머지에 $t=1$을 대입해도 된다. $(1+1)\times(1+1)^2=8$
마지막으로 제곱을 구했으니, 루트를 씌우면 $2\sqrt{2}$가 답이다. 극한에서 원하는 꼴을 targeting하고 추적하는 것을 배워가자.

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\ (n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은?

수열 문제에서의 가장 첫 시작점은 언제나 아는 수열인지 모르는 수열인지 구분하는 것이다.
a_n이 등차수열이므로 우리가 굉장히 잘 아는 익숙한 수열이다. 따라서 합도 자유자재로 계산 가능하다.
b_n은 새로 정의된 수열인데, 역시나 아는 수열이라고 판단해야 한다. 어차피 1차식이므로 등차수열이며, 1차항의 계수가 a_n의 두 배가 되므로 공차 역시 두 배이다.

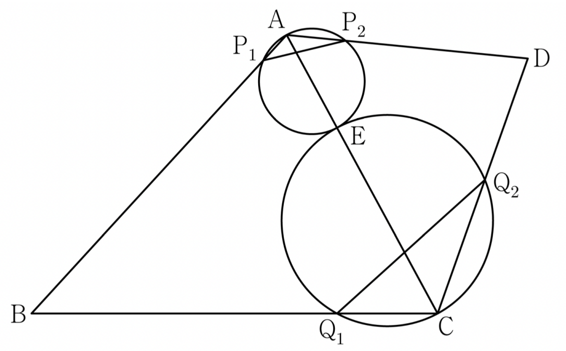
A에는 항이 다섯 개 있는데, B가 A와 겹치려면, 공차가 두 배이므로 한 칸 걸러서 만나야 한다.
5개 중 한 칸식 걸러서 세 개와 만나려면 $a_1,\ a_3,\ a_5$일 수밖에 없다. 이에 대응되는 B의 조합으로는 $1,\ 2,\ 3$이나 $2,\ 3,\ 4$이나 $3,\ 4,\ 5$여야 한다. 따라서 가운데 항만 비교하면 $a_3=b_2,\ b_3,\ b_4$의 경우의 수가 가능할 것이다. $-4+d=\begin{cases}-8+d\\-8+3d\\-8+5d\end{cases}$ $\rightarrow$ $d=1,\ 2$만이 가능하다. a_{20}의 합$=2a_2+18\times(1+2)=46$ (답)

등차수열이 공비를 기울기로 갖는 직선이라는 관점이 최근 수능판에서는 매우 중요하다.
그런데 사실 이 문제에서는 '일정한 보폭으로 발자국을 남기는 수열'이 등차수열이라고 생각하는 것이 좋다. 원래 이 정의가 더 보편적인 관점인데 요즘에는 많이 퇴색된 경향이 있어 언급을 했다. 이 관점에 따르면, b_n은 보폭이 2배인 셈이다. 이미 a_n이 5개의 발자국을 남겼는데 그 발자국 중 세 개가 겹치도록 보폭을 2배로 넓혀 걷는다고 생각하면 쉬이 문제를 풀 수 있을 것이다.

13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각 삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$라 하자. $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$)



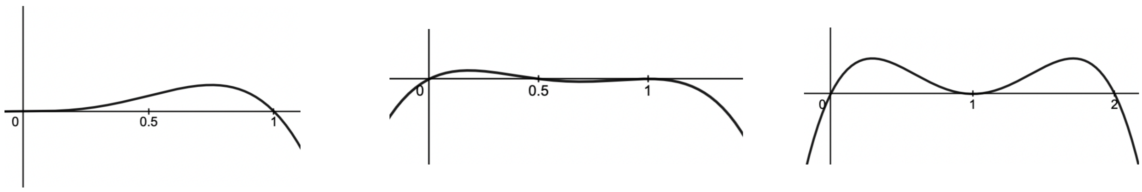
도형 문제를 풀 때, 조건이 어떤 요소인지 즉, 각인지 변인지 찾는 것이 풀이의 길을 열어줍니다.
현재 $\overline{\mathrm{BC}}$와 사잇각을 주었으므로 삼각형 BCD는 완전히 우리가 알고 있습니다. $\cdots\ \overline{\mathrm{BD}}^2=13+2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$
두 원의 반지름의 비율과 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$를 주었으므로 sin법칙을 써야 합니다.
$\frac{3}{\sin A}:\frac{5\sqrt{2}}{\sin\angle\mathrm{BCD}}=1:2\ \rightarrow\ \sin A=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}\ \rightarrow\ \cos A=-\frac{3}{5}$
$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$라고 하면, $\cos A$를 알고 있으므로 $a^2+b^2-2ab\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$
한편, 삼각형 ABD 넓이 $\frac{1}{2}ab\sin A=2$로부터 $ab=5\ \rightarrow\ a^2+b^2=11\ \rightarrow\ (a+b)^2=21\ \rightarrow\ \sqrt{21}$ (답)
sin, cos법칙을 꼭 해야 하는 기본적인 상황이 출제되었고, 이 문항을 못 풀었다면 필시 복습이 필요합니다.

14. 실수 $a\,(a \geqq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geqq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

운동 방향을 한 번만 바꾸라는 얘기는 $v(t)$가 한 번만 부호가 달라져야 한다는 것임을 알 수 있다.
따라서 $a=0,\ 2a=1,\ a=1$ 이 세 가지가 가능하다.



$a=0$　　　　$a=\frac{1}{2}$　　　　$a=1$

첫 두 그림은 양수인 부분과 음수인 부분이 섞여 있는데 $x \geqq 1$에서의 기울기가 훨씬 가파르므로 $0 \sim 1$에서의 넓이보다 $1 \sim 2$의 넓이가 큼을 알 수 있는데 후자의 부호가 음수이므로 둘다 적분값이 음수가 나온다고 생각할 수 있다. 반면, $a=1$일 때는 양수이므로 이때가 최대임을 바로 알 수 있다. $\therefore\ a=1$

$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)\,dt$ 계산 방법

1) 단순 계산 (전개를 그나마 쉽게 하는 법)

$-(t^2-2t)(t^2-2t+1) = -(t^2-2t)^2-(t^2-2t)\ \rightarrow\ -t^4+4t^3-5t^2+2t$ 로 전개하고 적분하기

$\rightarrow\ -\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4 = 1-\frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ (답)

2) 평행 이동하고 대칭성을 이용하여 쉽게 적분하기

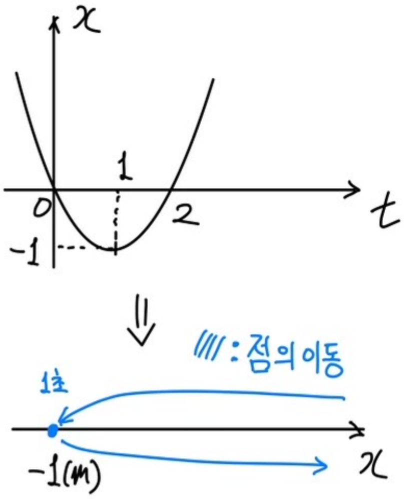
$\rightarrow\ 2\int_0^1 -x^2(x^2-1)\,dx = -\frac{2}{5}+\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

무작정 다 계산할 필요 없이 구간의 길이를 동일하게 $0 \sim 1,\ 1 \sim 2$로 나눈 후 기울기를 확인하여 대략적으로 넓이의 부호를 파악하는 것을 배울 수 있는 문항이다. 계산에 들어가기 전 잠시만 더 생각해보는 태도를 꼭 가지자.

Question. 위치의 변화‘량’인데 왜 절댓값을 씌워서 크기 비교를 하지 않고 부호를 살리나요...?
변위는 벡터이므로 방향성이 있는데 어떻게 직접 비교가 가능하죠?

Answer.
수학 교과 내에서 위치 함수인 $x(t)$는 t(시간)에 따라 ‘x축’위를 움직이는 점의 위치 함수입니다.
즉, x축을 좌우로 움직이는 것을 함수로 나타낸 것이죠.

문제에 있는 사차함수 모양이 곧이 곧대로 위치 함수가 되는 것이 아니라, 사차함수의 치역이 $x(t)$가 되는 것이기 때문입니다. 한 예로 아래와 같은 그림이 있다고 합시다. (합성함수 칼럼 내용 발췌)



실질적인 점의 이동은 아래의 파란 선입니다.
즉, 이차함수의 기울기는 점이 움직이는 속도로 바뀌고 위치는 이차함수의 치역대로 현재 그림에서 점이 움직이고 있습니다.

따라서 교과 내에서 묻는 위치의 변화량이라 함은 ‘x 방향’에 대해 위치 변화량을 묻는 것입니다. 따라서, 부호를 살려서 비교가 가능합니다. 위치나 속도는 모두 상대적인 물리량이라서 그렇습니다.

만약 2차원 평면상에서 철수는 동경 45°로 4만큼, 영희는 동경 120°로 4만큼 움직였다고 합시다. 이 상태에서 변위를 비교하라고 하면, 불가능합니다. 하지만 ‘x 방향’이라는 기준이 제시되면 가능합니다. x 방향 변위를 비교하라고 문제가 바뀌면, 철수는 $4\times\cos45^\circ$, 영희는 $4\times\cos120^\circ$가 되며 각각 $2\sqrt{2}$, -2가 됩니다. 따라서 철수가 더 위치의 변화량 즉, 변위가 큼을 알 수 있습니다.

정말 헷갈리다면, 물리학과 별개로 수능 수학에서는 아래처럼 생각하시면 까먹을 일은 없으실 겁니다.
만약 변위가 절댓값이 씌워진 양 그 자체라면, 변위의 크기라는 말은 없어야겠죠...? 하지만 변위의 크기라는 개념이 존재한다고 눈에 익히신다면 시험장에서도 순간 헷갈리지 않고, ‘아, 변위의 크기가 아니라 변위를 묻고 있으므로 부호를 살려야겠다!’고 생각하면 될 것입니다!

다음 문항으로 넘어가겠습니다.

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

이처럼 귀납적으로 정의된 수열이 나오면, 그래프를 그려보려는 시도를 해야 한다.
또한, a_n의 값에 따라 a_{n+1}이 결정되는 상황에서는 a_n의 추이를 a_n의 경계에 따라 그래프로 그려보는 것이 좋다. 이 문항에서는 $a_n = 0$이 기준이므로 처음으로 양에서 음으로 넘어갈 때를 살펴보는 것이 중요하다.

a_{n+1}을 보면서 a_n은 값에 상관없이 우선 k만큼 감소하고 그 후에는 $2n$만큼 값에 따라 증가나 감소할 것이다. a_n이 양수에서 음수로 처음 넘어간 n을 m이라 하자 $(a_{m-1} > 0, a_m < 0)$. $a_m = a_{m-1} - 2m + 2 - k$
$a_{m+1} = a_{m-1} + 2 - 2k$ $\rightarrow$ k가 1보다만 크면 a_{m+1}은 음수일 것이다. $\rightarrow$ $a_{m+2} = a_{m-1} + 2m + 4 - 3k$
문제에서 요구하는 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$은 네 항만 보면 되므로 더 이상 다음 항까지 구할 필요는 없다
($\because$ $m-1 \sim m+2$). a_3부터 시작되므로 계산을 통해 찾아보자. $a_1 = k$ $\rightarrow$ $a_2 = -2$ $\rightarrow$ $a_3 = 2 - k$
우선 가장 간단한 $k = 1$을 살피자. $a_3 = 1$ $\rightarrow$ $a_4 = -6$ $\rightarrow$ $a_5 = 1$ $\rightarrow$ $a_6 = -10$ $\rightarrow$ 모순
$a_3 = 2 - k$라고 했으니 $k = 2$이면 $a_3 = 0$ 되므로 모순이다.
$k \geq 3$부터는 $a_3 < 0$이며, $m = 3$이 된다. $a_4 = 8 - 2k$ $\rightarrow$ 0이 되면 안 되므로 $k \neq 4$
$k = 3$이면 $a_4 = 2$ $\rightarrow$ $a_5 = -9$ $\rightarrow$ $a_6 = -2$ $\rightarrow$ 만족한다! $\cdots$ $k = 3$
$k > 4$이면 $a_4 = 8 - 2k < 0$ $\rightarrow$ $a_5 = 16 - 3k$ $\rightarrow$ 이번엔 $k = 5$가 경계가 됨
$k = 5$이면 $a_5 = 1$ $\rightarrow$ $a_6 = -14$ $\rightarrow$ 만족한다! $\cdots$ $k = 5$
$k > 5$이면 $a_5 = 16 - 3k < 0$ $\rightarrow$ $a_6 = 26 - 4k$ $\rightarrow$ $a_3 \sim a_5$의 부호가 $-, -, -$이므로 $26 - 4k > 0$ 이어야 조건을 만족한다. $\therefore$ $k = 6$만 가능
$\therefore$ $k = 3, 5, 6$ $\rightarrow$ 14 (답)

차근차근 부호에 따라 케이스를 나누다 보면 답이 되도록 문제가 항상 짜이기 때문에 걸리는 시간에 상관없이 10분을 들이면 무조건 풀 수 있어야 하는 유형이다. 중요한 것은 경계가 되는 곳을 미리 m을 잡아 살피면, 이후의 상황에 대해 적응력이 생겨 문제를 푸는 과정이 더욱 수월해진다는 것이다. 미리 해봄으로써 $k > 1$이면 $a_3 < 0$을 포함해 k에 따라 그림이 어떻게 갈라지는지를 알 수 있었다.

예쁘게 수형도를 그리면 다음과 같다.

$$k \to -2 \to 2-k \to \begin{cases} -8 & (k=1) \to -1 \to -8 \\ 8-2k & (k \neq 1) \to \begin{cases} (k=3)\text{일 때 } -3k \to 10-4k \\ (k \geq 4)\text{일 때 } 16-3k \to \begin{cases} 26-4k & (k \geq 6) \\ 6-4k & (k=4,\ 5) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

글로 보면 어렵지만, 수형도로 차분히 쪼개면 그리 어렵지 않았을 것이다.

2022년 교육청 3월

20. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오.

$a_1 = k$라 하자.

$$k \to k-2 \to -2k+4 \to -2k+2 \to 4k-4 \to 4k-6 \to \begin{cases} 4k-8 & (k \geq \frac{3}{2}) \\ -8k+12 & (k < \frac{3}{2}) \end{cases}$$

범위에 의해 $k = \dfrac{7}{4}$로 확정됨. $\to$ 70 (답)

k 범위를 너무 잘 주는 바람에 부호가 마지막에만 갈리면서 답이 나왔다.
이번 15번은 대신에 조금 더 케이스를 열어두어서 수형도의 갈림길이 더 많게 되었던 것이다.
개인적으로 해설지가 아닌, 시험장에서 풀 때는 지금 한 것처럼 수형도를 그리는 게 가장 빠를 것이라 생각하기에 깔끔하게 범위에 따라 케이스를 나누는 연습을 꼭 하길 바란다.

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

단순히 계산하면 되긴 하지만, $f(x)$가 $(0, a)$ 대칭이라는 것을 알면 조금 수월하다. $x=1$에서 극소를 가지므로 $x=-1$에서 극대를 가지며, 극댓값은 $2a+2$임을 대칭을 통해 알 수 있다.
$\rightarrow f'(x)=3a(x^2-1) \rightarrow f(x)=ax^3-3ax+a \rightarrow f(1)=-a=-2 \rightarrow 2a+2=6$ (답)

연립 방정식으로 해도 번호가 쉬워서 시간 차는 크지 않으나, 보다 어려운 문제에서는 당연히 갖춰야 할 대칭성에 대한 관점을 제시했다. 난도에 상관없이 항상 취해야 할 태도이므로 쉬웠다고 해서 피드백을 안 할 것이 아니라 이렇게 풀지 않았다면 반성이 필요한 부분이다.

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다. (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\sin bx$를 주기가 $\frac{2\pi}{b}$라고 보지 말고, $0\sim 2\pi$에 b개의 주기가 있다고 보는 것이 삼각함수 그래프 문제를 풀 때는 훨씬 좋다. $\frac{2\pi}{b}\times b=2\pi$를 이용한 관점이다. 이런 관점을 해당 문제에서도 취해보자.
(가) : $8-2a\sim 8$을 치역으로 가지는 $f(x)$가 0이상으로 제시됐으므로 $8-2a\geq 0$이다.
(나) : 실근이 존재하므로 $8-2a\leq 0$이다. 따라서 (가)와 조합해보면 $a=4$이며, 한 주기당 하나의 근을 가진다. 이때 $0\leq x<2\pi$에 b개의 주기가 있으므로 $b=4$임을 바로 알 수 있다. $\rightarrow$ 8 (답)

문제가 쉽기 때문에 단순히 그림을 그려서 접할 때가 답이라고 해도 좋지만, 부등식에 대한 이해를 생각해볼 만한 문항이다. 함수와 부등식이 제시되면, 함수로 풀 이유가 없고 최솟값이나 최댓값만 부등식에 쓰면 된다.

e.g. $\int_0^x f(t)\,dt\geq 0$ 이라는 식이 제시되어 있다고 해보자.

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \rightarrow F(x)$의 최소를 m이라 하면 $m\geq 0$이다. $F(0)=0$인데, m이 F의 최소이므로 일개 함숫값인 0에 대해 $0\geq m$임을 알 수 있다. $\therefore\ 0\leq m\leq 0$이므로 $m=0$이다. $\rightarrow F'(0)=f(0)=0$

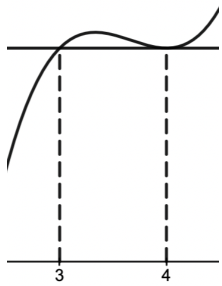
20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

$x \geqq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geqq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert \geqq \lvert g(3)\rvert$이다.

19번과 데자뷰가 느껴진다.
함수와 부등식이 제시되어 있다. 주어진 범위에서 $g(x) \geqq g(4)$이므로 $g(4)$는 $g(x)$의 최소인 m이라 하자.
→ $f(4)=0$이며 g는 $x=4$에서 극소를 가진다.
$\lvert g(x)\rvert$의 최소를 이번에는 생각해보자. 절댓값 자체가 0이상이므로 $\lvert g(3)\rvert$는 0이상이다. g가 근을 하나라도 가지면 바로 $\lvert g(x)\rvert$의 최소가 그 근에서 생길 것이다.



만약 g가 근을 주어진 범위에서 안 가진다 생각해보자. 그러면, $g(4)>0$이 되어 삼차함수인 $g(x)$가 붕 떠야 한다. → $\lvert g(x)\rvert \geqq \lvert g(3)\rvert$가 되려면 $g(3)$이 g의 극소 이하여야 하는데 g가 현재 붕 뜬 그림이므로 3보다 왼쪽으로 가면 바로 $g(3)$보다 함숫값이 감소해 더 작은 함숫값이 나온다. 따라서 불가능하다.

→ g가 근을 가져야 하며, $g(3)=0$임을 알 수 있다. (시험장이면 이것부터 하는 게 일반적일 것이다.)

$$f(x)=(x-k)(x-4) \ \rightarrow \ \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(k+4)x^2+4kx\right]_0^3=\frac{15}{2}k-9=g(3)=0 \ \rightarrow \ k=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \ f(9)=(9-4)\times\left(9-\frac{6}{5}\right)=39 \text{ (답)}$$

앞서서 봤던 부등식이 조금 더 어렵게 절댓값과 결합되어 나온 문항이다. 만약 $x \geqq 1$로 범위가 정해져 있지 않았으면 g가 삼차함수인 것만으로도 g의 치역이 실수 전체이기 때문에 반드시 근 하나를 가진다는 점으로부터 $\lvert g(x)\rvert$의 최소는 저절로 0이 됨을 알 수 있었을 것이다. 또한 식을 구할 때 g 삼차함수로도 풀 수 있다. 그러나 계수가 $\frac{1}{3}$이라 식이 조금 귀찮을 수 있어 이차로 풀었다.

관련해서 기출 한 문제를 더 보자. 예비시행 문항이다.

22. 함수

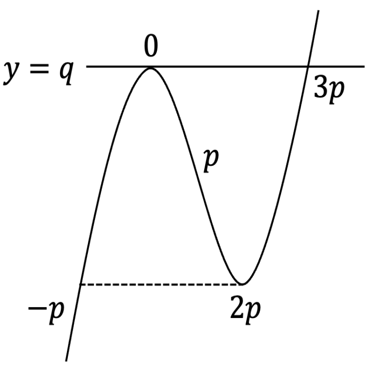
$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

(가)부터 해석해보자. $f(x)$의 원래 극점은 절댓값을 씌워도 극점이다. 근데 $|f(x)|$의 극점이 5개가 되려면 원래 극점과 별개로 3개의 극점이 더 추가되어야 하는데, 절댓값을 씌워서 극점이 늘어나려면 $f(x)$의 근이 첨점이 되는 수밖에 없으므로 $f(x)$의 근이 3개라는 것을 시사하고 있다.
$f(x)=x^2(x-3p)+q$의 극댓값과 극솟값은 각각 q, $-4p^3+q$이며 $-4p^3+q<0<q$ 이다.

(나)



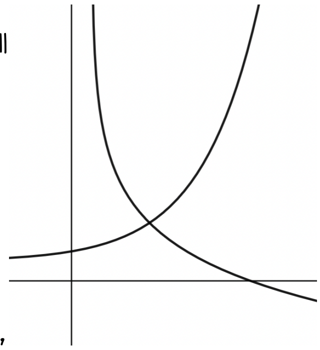
0으로부터 출발하면 음수 쪽으로 가는 편이, 양수 쪽으로 가는 편보다 기울기가 훨씬 가파르므로 함숫값도 팍팍 감소할 것이다.
(14번의 냄새가 물씬 나네요.) 따라서 $|f(x)|$의 최대를 살필 때는 양수 쪽이 아닌 음수 쪽만 보면 될 것이다.

닫힌구간 $[-1, 1]$, $[-2, 2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 같다는 것은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서의 최대가 함숫값이 아닌 극값이라는 얘기이다. 만약 $f(-1)$이 $-q$보다 작으면 $|f(x)|$의 최댓값이 $f(-1)$이 될 텐데 그렇게 되면 닫힌구간 $[-2, 2]$에서는 최댓값이 $f(-2)$가 되며 최댓값이 달라진다. 따라서 극값이 해당 함수의 최댓값이라는 것이다.
결국에 $|f(-2)| \leqq f(0)=q$ → 이때, $|f(-2)|>f(0)$가 되어 발문에서 요구하는 상황이 충족되지 않으려면, $f(-2)=-12p+q-8<-q$ 여야 한다. → 충족되려면, $-12p+q-8 \geqq -q$ → $q \geqq 6p+4$
$\therefore\ 6p+4 \leqq q < 4p^3$ → $(2, 16 \sim 25), (3, 22 \sim 25)$ → 14 (답)

이번에는 절댓값 함수의 최대를 물어보는 문항이다. 부호에 상관없이 절댓값이 커지는 것이 핵심이므로, 여기서는 기준이 되는 $\pm q$와 $f(-2)$를 살폈다. 다음 문항으로 넘어가자.

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 옳은 것만을 고르시오.

> ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
> ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
> ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.



t가 양수라고 생각하고 우선 그림을 간단히 그리자. 두 함수는 90° 회전 관계임을 알아챌 수 있다. $y=2^{x-t}$는 $(t, 1)$을 지난다는 것까지 확인 가능하다.

Sol 1)

ㄱ. $1-\log_2 x=2^{x-1} \rightarrow x=1$일 때 성립함

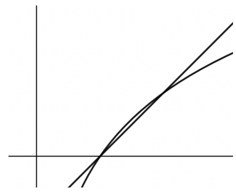
$2-\log_2 x=2^{x-2} \rightarrow x=2$일 때 성립함 $\rightarrow$ (O)

ㄴ. $t-\log_2 x$의 정의역이 $x>0$이므로 당연히 $f(t)>0$이다.

t가 작아질수록 $-\log_2 x$를 위로 더 올리고, $y=2^x$를 왼쪽으로 더 옮기면, 만나는 교점의 y좌표가 점점 높아짐을 알 수 있다. 이에 따라 $f(t)$는 계속 0으로 다가갈 것이다. $\therefore$ (O)

ㄷ. $f(t) \geq t$라면, $(t, 1)$보다 $f(t)$가 오른쪽에 위치한다. 따라서 $x=t$를 대입하면 $t-\log_2 t > 2^{t-t}=1$

$\rightarrow t>1+\log_2 t \rightarrow y=x-1$, $y=\log_2 x$를 그려보면, 오른쪽처럼 나오므로 모든 양의 실수 t에 대해 성립하지 않음을 알 수 있다.



ㄷ에 나온 발상은 지수로그 합답형 문제에서 항상 ㄱ의 논리로 출제되던 발상이다. $f(x)$와 $g(x)$가 주어지고 $f=g$ 교점 왼쪽에서는 f, 오른쪽에서는 g가 함숫값이 더 큰 상황에서 교점의 x좌표가 a보다 큼을 확인하려면 $f(a)>g(a)$를 보이면 되는 발상이다. 따라서 기존에 매우 쉽게 하던 발상임에도 함수가 고정되어 있지 않고 ㄷ에 해당 발상이 나오면서 수험생들이 어려움을 겪은 문항이라 할 수 있다. 그렇다면 함수가 고정된다면 어떨까?

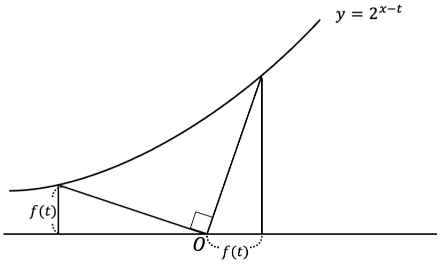
Sol 2)

$y=-\log_2 x$라 하면, $y=2^{x-t}-t$와의 교점을 살피면 된다. $y=2^{x-t}-t$는 $(t, 1-t)$를 지나므로 t에 따라 $y=1-x$ 위를 sliding하며 움직일 것이다. 이렇게 생각하면 위에서 했던 과정이 보다 눈에 잘 띈다.

Sol 3)

90° 회전 관계를 이용하려면, $y=2^{x-t}$의 x좌표가 $f(t)$일 때 이를 90° 돌리면, $y=t-\log_2 x$의 y좌표가 $f(t)$가 된다.

$\rightarrow$ $y=2^{x-t}$와 $y=t-\log_2 x$의 교점의 x좌표가 $f(t)$라는 것은 $\left(f(t), 2^{f(t)-t}\right)$을 원점을 기준으로 돌려도 $y=2^{x-t}$ 위에 여전히 있을 거라는 말이다. 즉, 오른쪽 그림처럼 된다. 따라서, 원점으로부터 직각 이등변 삼각형을 $y=2^{x-t}$에 그리면 되며, 또한 평행 이동하여 $y=2^x$에 대해 $(-t, 0)$으로부터 직각 이등변 삼각형을 그리면 더욱 편할 테다.



22. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

$f(x) = x^2(x-2a)$ $\rightarrow$ $(0, 0)$에서 접하고 $(2a, 0)$을 근으로 가진다.

발문의 조건이 가리키는 바는 평균값 정리에 의해 $f'(c_1) \times f'(c_2) < 0$ $\left(c_1, c_2 \text{ at } \left(k, k+\frac{3}{2}\right)\right)$

따라서 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 극점이 존재하도록 k를 조절하라는 얘기다. 우선 확실한 극점인 $x=0$부터 생각해보면, $k < 0 < k+1.5$ $\rightarrow$ $k=-1$은 a에 관계없이 조건을 만족함을 알 수 있다.

다른 하나의 극점의 x좌표는 $\frac{4}{3}a$이다. 만족하는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 -1을 제외한 나머지 k들의 곱이 12가 되어야 한다. $\frac{4}{3}a$가 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하도록 하는 k는, 구간의 간격이 1.5이므로 최대 2개 존재할 수 있으며 만약 2개 존재하려면 반드시 연달은 수여야 한다.

이를 모두 종합해보면, k의 후보로는 $a > 0$일 때는 $3, 4$ & 12, $a < 0$일 때 $-3, -4$의 조합이 가능하다.

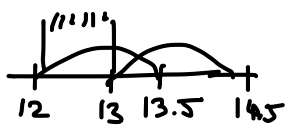
$3, 4$가 되려면 $3 \sim 4.5$, $4 \sim 5.5$ 사이에 $\frac{4}{3}a$ 모두 존재하려면 $4 < \frac{4}{3}a < 4.5$ $\rightarrow$ $3 < a < \frac{27}{8}$ (X)

12가 되려면 $12 \sim 13.5$에 $\frac{4}{3}a$가 있고 $13 \sim 14.5$에는 없어야 함. $12 < \frac{4}{3}a < 13$ $\rightarrow$ $9 < a < \frac{39}{4}$ (X)

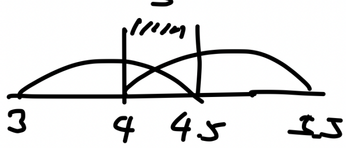
-3, -4가 되려면 $-3 \sim -1.5$, $-4 \sim -2.5$ 사이에 $\frac{4}{3}a$ 모두 존재 $\rightarrow$ $-\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$ $\rightarrow$ $a=-2$

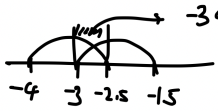
$f'(10) = 380$ (답)

$12 < \frac{4}{3}a < 13 \rightarrow (X)$



$4 < \frac{4}{3}a < 4.5$





$-3 < \frac{4}{3}a < -2.5$

$-\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$

$\therefore a=-2$

28. 두 상수 $a\,(a>0), b$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은?

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$

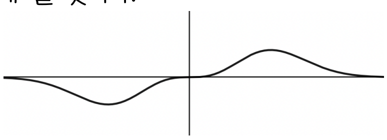
항등식이 제시되었을 때, 적분해도 미분해도 어떤 변형을 해도 역시나 항등식임을 알아야 한다.
또한, 알지 못하는 함수가 나오면 대칭성이라도 있는지부터 살피는 것이 우선이다.

$(x^2+2x)\circ f(x)=(ax^3e^{1-x^2}+b)\circ\cos\pi x$

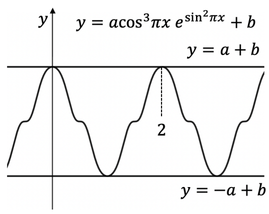
$y=x^2+2x$는 $(-1,\,-1)$에서 최소를 가지므로 $f(x)$의 치역에 -1이 포함되면 좌변의 합성함수 최소도 -1이 될 수 있다. 반대로 치역에 포함이 되지 않는다면 -1보다는 큰 최소를 가질 것이다.

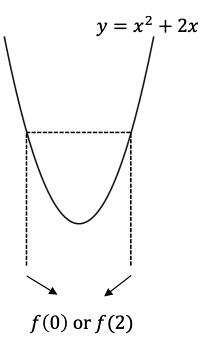
이제 우변을 보자. 속함수는 완전히 알고 있는 $\cos\pi x$이므로 겉함수인 $(ax^3e^{1-x^2}+b)$을 그려보자.

기본형인 $x^3e^{-x^2}$을 먼저 그리자. 기함수이며, $y=x^3$을 그리고 무한대로 갈 때 0에 가까워지니 그림은 이렇게 될 것이다.



미분해보면, $(3x^2-2x^4)e^{-x^2}$이므로 $x=1$을 대입해보면, 기울기가 양수이다. 따라서 $x=1$은 극점 왼쪽에 있다.
$\cos\pi x$의 치역이 $-1\sim1$이므로, 겉함수를 해당 구간에서만 보면 증가함수임을 알 수 있다. 겉함수가 증가함수이므로 사실상 합성함수인 우변은 $\cos\pi x$와 모양이 거의 비슷할 것이다. 최대는 $\cos\pi x=1$일 때 $a+b$, 최소는 $\cos\pi x=-1$일 때 $-a+b$를 가지며 주기도 2일 것이다.





(나) $f(0)=f(2)+1$ $\rightarrow$ $x=0,\,2$일 때 우변의 합성함수는 $\cos\pi x=1$이므로 최댓값인 $a+b$를 가지며 정확히 한 주기이다. $y=x^2+2x$에 $f(0)$을 대입한 것과 $f(2)$를 대입한 것 모두 $a+b$라는 동일한 함숫값을 가진다. 그런데 이때 $f(0)$과 $f(2)$가 다르다고 (나)에 나왔으므로 $f(0)+f(2)=-2$임을 알 수 있다. 연립하면

$f(0)=-\dfrac{1}{2},\ f(2)=-\dfrac{3}{2}$라는 것까지 알 수 있다.

마지막으로 $f(x)$가 연속이므로, $f(0)$과 $f(2)$ 사이에 $y=-1$이 있음을 알 수 있다.

$\therefore$ 좌변의 합성함수의 최소인 $-a+b$는 -1이라고 확정된다.

$\{f(0)\}^2+2f(0)=-\dfrac{3}{4}=a+b\ \rightarrow\ a=\dfrac{1}{8},\ b=-\dfrac{7}{8}\ \rightarrow\ -\dfrac{7}{64}$ (답)

배워갈 게 매우 많은 문항이다. 정리해보자.

배워갈 것들의 번호를 매기겠다.

1. 우선 $f(0)=f(2)+1$로부터 $f(0)+f(2)=-2$를 도출했던 것은 아래의 문항과 연관이 있다.

2023 수능 30번

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

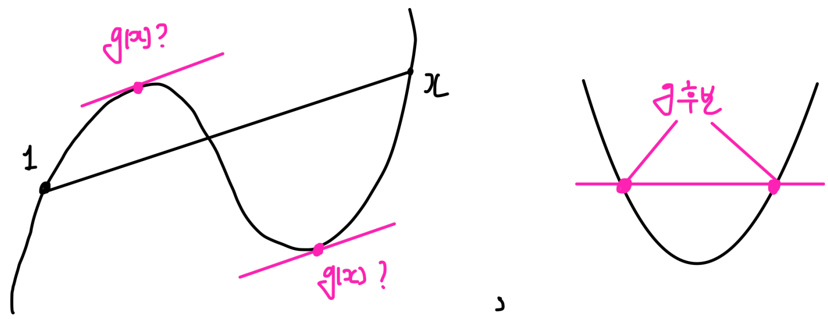
(가)를 정리하자. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$이다.

즉, 임의의 $(x, f(x))$라는 점과 $(1, f(1))$ 사이의 평균 변화율과 동일한 기울기를 갖는 $f'(x)$의 근으로 $g(x)$가 정의되는 것이다.

x가 충분히 작으면, 평균 변화율은 $(1, f(1))$의 위치와 상관없이 ∞로 갈 것이다. 따라서, $f'(x)=\infty$의 근인 $g(x)$는 f'이 이차함수이므로 대칭축에 대해 양쪽에 존재할 것이다. 그런데 (나)에서 $g(x)$의 최솟값이 존재한다고 하였으므로, $g(x)$는 항상 $f'(x)$의 대칭축 오른쪽에 있는 근이라는 것을 알 수 있다. 양쪽에 있어서 확정이 안 됐는데 바로 확정이 되어 버리는 것이다.

이 부분이 바로 이번 6평 28번과의 관련성이다. 사설이나 평가원에서나 이차함수의 대칭성을 통해 새로 정의된 함수의 최소나 최대를 묻는 문항이 자주 나오니 정리할 필요가 있다.

Ex)



함수가 위로 볼록일 때 $(1, f(1))$과 $(x, f(x))$사이의 기울기는 $(1, f(1))$의 위치에 따라 다르다. 만약 $(1, f(1))$이 위로 볼록인 부분에 위치한다면, $(x, f(x))$도 위로 볼록인 부분에 위치할 때 x가 증가함에 따라 두 점 사이의 기울기는 감소한다. $(x, f(x))$가 아래로 볼록인 부분에 위치하면 x가 증가함에 따라 감소하다가 접할 때를 기점으로 다시 증가하는 '극소'의 모양새를 띤다. 반면에 $(1, f(1))$이 아래로 볼록인 부분에 위치한다면, $(x, f(x))$도 아래로 볼록인 부분에 위치할 때는 x가 증가함에 따라 두 점 사이의 기울기는 증가한다. $(x, f(x))$가 위로 볼록인 부분에 위치하면 x가 증가함에 따라 증가하다가 접할 때를 기점으로 다시 감소하는 '극대'의 모양새를 띤다. 따라서 $g(x)$의 최소인 극소가 존재하려면 함수가 아래로 볼록인 곳에 x가 위치해야 하며 $(1, f(1))$은 위로 볼록인 부분에 있어야 한다.

$\rightarrow$ $\frac{5}{2}$는 $(1, f(1))$에서 그은 접선과 $f(x)$의 교점

$\therefore$ $f(x) = m(x-1) + f(1) + (x-1)(x-\frac{5}{2})^2$ $\rightarrow$ 변곡점 at $x=2$

한편, (다) 조건에서 말하는 $g(1)$을 구해보자. $g(x)$가 연속이므로 $g(x)$의 $x=1$에서의 극한값을 구하자.
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(g(x))$ 의 양변에 $\lim_{x\to 1}$을 취하자. $f'(1) = f'(g(1))$ $\rightarrow$ $g(1) = 3$ ($\because$ f'이 $x=2$ 대칭)
$\rightarrow$ $f(3) = 6 = 2m + f(1) + 2 \times \frac{1}{4}$, $f(0) = -2m + f(1) + (-1)\left(\frac{25}{4}\right) = f(1) - m - \frac{25}{4} = -3$
두 식을 연립하면, $f(1) = 4$, $m = \frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $f(4) = \frac{9}{4} + 4 + 3 \times \frac{9}{4} = 13$ (답)

이차함수의 대칭성을 통해 합성함수가 풀리는 문제는 이게 다가 아니다.

2017년 교육청 7월 30번
30. 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다.
함수 $g(x)$가

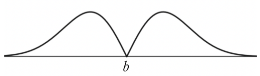
$$g(x) = |f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x) = 4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오.

$f(x)$와 $f'(x)$가 같이 있을 때는 대칭성을 중심으로 봐야 한다. $\rightarrow$ $f(x) = a(x-b)^2 + c$
$g(x) = |2a(x-b)|e^{a(x-b)^2+c}$ $\rightarrow$ $x=b$ 대칭, $x=b$에서 첨점 (극소)
(가): $g(x)$ *has* 극소 at $x=2$
(나): $g(x)$ has 최대(극대) $\rightarrow$ $a>0$면, $g(\infty)=\infty$ $\therefore$ $a<0$
이를 토대로 $g(x)$를 그려보자.



$\rightarrow$ $b=2$

$y' = 2a(1+2a(x-2)^2)e^{a(x-2)^2+c}$ $\rightarrow$ 극대 at $(x-2)^2 = -\frac{1}{2a}$의 근 (앞으로 s로 명명)

$g(s) = \left| 2a\sqrt{\left(-\frac{1}{2a}\right)} \times e^{-\frac{1}{2}+c} \right| = 4\sqrt{e}$ $\cdots$ ㉠

(다): a와 c, s 모두 유리수이다. 이를 토대로 ㉠을 풀어보자.
$c - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $c=1$, $\sqrt{-2a} = 4$ $\rightarrow$ $a=-8$ $\therefore$ $f(x) = -8(x-2)^2 + 1$ $\rightarrow$ $|f(-1)| = 71$ (답)

2. 미지의 항등식을 처리할 때 태도를 정리하기 좋은 문항이다.
2020 평가원 9월 30번
실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin \pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

방금 문제처럼 항등식이 제시된 꼴이다. 역시나 전혀 어떤 함수인지 감이 잡히지 않는다.
이럴 때 방금 해본 문제처럼 대칭성부터 보아야 한다.

좌변은 $f'(x) \circ (x^2+x+1)$이다. 이때 속함수가 $x=-\frac{1}{2}$에 대해 대칭이므로 좌변의 합성함수도 $x=-\frac{1}{2}$에 대해 대칭이다. 따라서 우변도 그래야 한다.

$\sin \pi x$는 이미 $x=-\frac{1}{2}$에 대해 대칭이다. $\rightarrow$ $f(3)$ should be 5.

여기까지가 이번 6평 28번과의 연관성이다. 그 이후의 풀이는 간단히 설명하겠다.
$(2x+1)$을 양변에 곱하면 적분이 된다.

$\rightarrow$ $f(x^2+x+1)=f(1)\left(\frac{2}{\pi}\sin \pi x-(2x+1)\cos \pi x\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{14}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+C$

$x=0$을 대입하면, $2f(1)=C$ / $x=1$을 대입하면, $f(3)=3f(1)+5+\frac{14}{3}+2f(1)$

$\rightarrow$ $f(1)=-1$ $\rightarrow$ $x=2$를 대입하면, $f(7)=93$ (답)

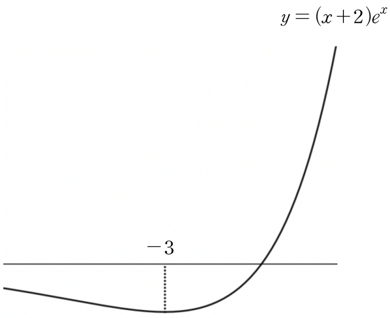
3. 뿐만 아니라 방금 문제에서는 합성함수의 최소에 대한 깊은 이해도 묻고 있었다.
2022학년도 평가원 9월 29번

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

$g(x)=(x+2)e^{x} \circ f(x)$



(가) $g(x)$ has 최대 at $x=a$

$f(x)$가 속함수이므로 $y=(x+2)e^{x}$의 정의역이 $y=f(x)$의 치역이다. 한편, $f(x)$는 이차함수이므로 최대가 있거나 최소가 존재한다. $y=(x+2)e^{x}$가 최대가 존재하려면, 정의역의 최소가 존재해야 한다 ($\because$ $g(\infty)=\infty$, $g(-\infty)=0-$)

$\rightarrow$ $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수, $f'(a)=0$

$f(x)$의 치역: $-\infty \rightarrow f(a) \rightarrow -\infty$

$g(x)$가 최소를 가지려면 겉함수인 $y=(x+2)e^{x}$의 최소를 $f(x)$가 지나야 한다.

바로 이 부분이다. 속함수가 겉함수의 어느 지점을 지나야 합성함수가 최소를 가질지를 묻는 것이다.
이 문제에서는 대칭은 아니지만 극소이자 최소인 -3을 $f(x)$가 지나도록 조절해야 했으며, 이번 6평 28번에서는 조건 상 그렇게 되어야만 함을 보이는 방식으로 문제가 풀렸다. 마저 풀어보자.

$\therefore$ $x=b, b+6$에서 $f(x)$는 $y=-3$과 만난다. $\rightarrow$ $\dfrac{(b+(b+6))}{2}=a=b+3$

$f(x)$는 최대인 $x=b+3$에서 x축 방향으로 3 이동하면, y좌표가 -9 변한다.
$f(x)$를 평행이동하여 꼭짓점을 원점으로 가져왔다고 생각하면 $(3, -9)$를 지나는 것이므로 최고차항의 계수가 -1임을 바로 알 수 있다.

$f(x)=0$이려면 꼭짓점인 $x=b+3$ 기준으로 y좌표가 -6 변했으므로 x좌표는 $\sqrt{6}$ 변해야 한다.
$\therefore$ $(\alpha-\beta)^2=(\sqrt{6}-(-\sqrt{6}))^2=24$ (답)

4.
그런데 이렇게 합성함수로만 풀 수 있는 것은 아니다.
항등식은 미분해도, 적분해도, 그 어떤 변형을 해도 양변에 해주기만 하면 여전히 항등식이다.
따라서 적절히 변형하는 것도 가능하다. 이번 6평 28번에 양변에 1을 더해주면, 완전제곱식으로 정리된다.
$f(x)=-1\pm\sqrt{a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1}$ 한편, $f(x)$가 연속이므로 루트 안이 0이 될 때 $+\sqrt{\ }$나 $-\sqrt{\ }$로 환승이 가능할 것이다. 둘 중 하나만 되라는 보장은 없으므로 적절히 둘 사이를 환승해야 하기 때문이다.

편의상 $\sqrt{\ }$ 안을 $g(x)$라고 하면, $f=-1\pm\sqrt{g(x)}$ $(g(x)\geq 0)$이다. $g(0)=g(2)=b+1$ 인데, (나)에서 $f(0)$과 $f(2)$는 다르다고 했다. 환승을 한 번도 안 하면 $\pm$ 중 부호가 하나로 결정되는데 그렇게 되면 $g(0)=g(2)$에 의해 $f(0)=f(2)$가 되어 모순이다. 즉, $f(x)$는 반드시 한 번은 환승해야 한다. $f(x)$가 연속이므로 환승의 경계에서는 앞서 말했듯이 $g=0$ 이어야 한다. $\rightarrow$ $g(x)$의 최소$\geqq 0$ 이었으므로 g has 극소 at $g=0$ $\rightarrow$ $g'=a\left\{(3x^3-2x^4)e^{1-x^2}\circ\cos\pi x\right\}\times(-\pi\sin\pi x)$ $\rightarrow$ $x=1$일 때 극소를 가진다.
$g(1)=-a+b+1=0$ $\rightarrow$ 이후는 이전 풀이와 동일하다. 두 풀이 모두 알아두도록 하자.

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$)

매개 변수 미분을 실컷 하라고 낸 문항 같다. 판단 근거는 주어진 식이 x와 y가 뒤죽박죽 섞여 있어 우리가 모양을 그리지 못하기 때문이다.

우선, 곧이곧대로 풀어보자. ($(x-y)^2+y^2=15$로 풀 것. $\dfrac{dy}{dx}=y'$으로 쓰겠음)

두 점이 곡선 위에 있으므로 t에 대한 방정식 $k^2+(t+k)^2=15$의 두 근이 a, b임을 알 수 있다.

$t=-k\pm\sqrt{15-k^2}$ $\rightarrow$ a, b가 순서 없이 $+\sqrt{\ }$, $-\sqrt{\ }$임을 알 수 있으므로 $a+b=-2k$, $ab=2k^2-15$

미분을 하자. $2(x-y)(1-y')+2yy'=0$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{x-y}{x-2y}$ $\rightarrow$ $\dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$\rightarrow$ $-k^2=(ab)+2k(a+b)+4k^2$ $\rightarrow$ $k^2=5$ (답)

특별할 것은 없는 문항이나 관련 문항을 통해 조금 더 보강해보자.
2022년 평가원 6월 30번

30. $t>\dfrac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$x+t=\ln(+e^{2x}-e^{-2t})$의 두 근을 α, β로 두고 매개 변수 미분? → (X)
매개 변수 미분은 어쩔 수 없을 때만 하는 것이다. 만약 문자가 하나로 통일된다면 굳이 이런 고생을
할 필요가 없으므로 우선 매개 변수를 안 두어도 되는지부터 확인하는 것이 필수다.

$e^{x+t}=1+e^{2x}-e^{-2t}$ $\rightarrow$ $e^{2x}-e^{x+t}+1-e^{-2t}=0$ $\rightarrow$ $(e^x-e^{-t})(e^x-e^t+e^{-t})=0$

$\alpha=-t$, $\beta=\ln(e^t-e^{-t})$이므로 굳이 문자를 두 개 잡지 않아도 된다. 이번 6평 29번은 이렇게 한 문자로 표현할 수 없기에 매개변수 미분을 해야 하지만, 매개 변수를 잡기 전에 언제나 이에 대해 고민해야 한다.

$\ln(e^t-e^{-t})$와 $-t$는 $\dfrac{1}{2}\ln 2$에서 교점을 가지므로 $t>\dfrac{1}{2}\ln 2$라는 조건은 $\alpha<\beta$임을 알려주고 있다.

$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})+t\}$ $\rightarrow$ $f'(\ln 2)=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$ $\rightarrow$ 11 (답)

따라서 매개변수 미분 하기 전에 반드시 할 필요가 없는지부터 확인하자.

수1 문제라고 하는 게 더 어울릴 것 같은 초유의 30번이다.

30. 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \leqq -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$ 은 수렴하고 그 합은 -3 이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 은 수렴하고 그 합은 8 이다.

$b_3 = -1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 의 값을 구하시오.

등비수열에서 공비가 양수인지 음수인지 헷갈릴 때 가장 좋은 파훼법은
'a_{2n-1}, a_{2n}으로 공비를 r^2으로 만드는 것'이다.

(가)에서 b_{2n-1}은 a_{2n-1}의 절댓값이 너무 크면 -1을 항으로, 반대에는 a_{2n-1}를 항으로 가지는 수열이다.
그 이유는 $r^2 > 1$이면 합이 발산해버리기 때문에 r^2이 $0 \sim 1$ 사이에 있음을 알 수 있다. 게다가 $b_3 = -1$ 이라 하였으므로 a_{2n-1}은 $y = -p^x$ $(0 < p < 1)$와 같은 지수함수 모양이 되어 $r < 0$도 알 수 있다.
따라서 b_{2n-1}은 계속 -1이다가 어느 순간부터 a_{2n-1}이 될 게다. 그렇다면 언제까지 -1인지가 중요하다.
-1의 개수를 k개라 하면, $(-1) \times k + \dfrac{a_{2k+1}}{1-r^2} = -3$ 이라 할 수 있다. → $b_3 = -1$이므로 k는 2 이상임을 알 수 있다. 그런데 현재 a_{2k+1}은 음수고 $1-r^2$은 양수이므로 k는 2로 확정된다. → $\dfrac{a_5}{1-r^2} = -1$

(나) : $a_{2n} > 0$이므로 $b_{2n} = a_{2n}$ → $\dfrac{a_2}{1-r^2} = 8$ → $\dfrac{a_5}{a_2} = r^3 = -\dfrac{1}{8}$ → $a_1 = 12$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24 \text{ (답)}$$

이 문제를 통해 얻어갈 것은 홀수와 짝수 번째 항을 r^2의 공비로 나누어 부호를 일정하도록 만드는 것이다.
또한, 등비수열을 지수함수의 모양새로 생각함으로써 생각을 보다 깔끔하게 할 수 있다는 점이다.

관련 자작으로 정리해보자.

12. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1 = b_1 = 4$
(나) $a_5 = b_3$, $a_6 = b_5$

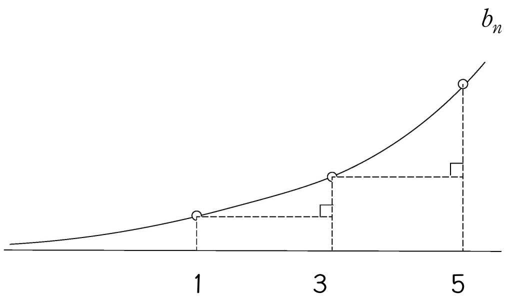
$\sum_{k=1}^{8} a_k$ 의 값을 구하시오.

풀이와 이번 30번 문항과의 연관성을 써보세요.

어차피 $b_{홀수}$만 보므로 b_n의 부호가 달라질 일은 없다.

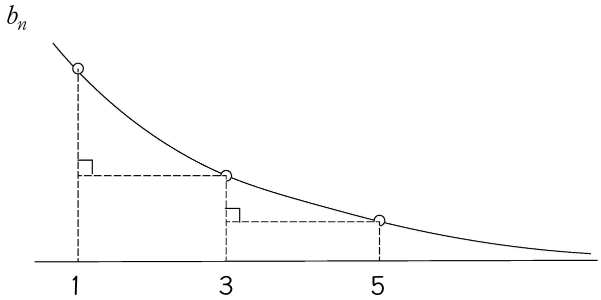
그러면 그래프는 공비에 따라 우상향($r^2 > 1$), 우하향($r^2 < 1$) 중 하나다.

$r^2 > 1$일 때,



표시해놓은 점은 각각 a_1, a_5, a_6이다.
공차에 따라 y좌표 차 비율이 $4:1$인데,
그래프에서 알 수 있다시피 $1:4$의 모양이다.
$\therefore$ 이 그래프는 성립할 수 없다.

$r^2 < 1$일 때,



표시해놓은 점은 a_1, a_5, a_6이다.
공차에 따라 y좌표 차 비율이 $4:1$인데,
그래프에서 알 수 있다시피 $4:1$ 가능.
$\therefore\ r^2 < 1$

$a_1 = \dfrac{a_5}{r^2}$, $a_6 = a_5 \times r^2 \rightarrow a_1 - a_5 = a_5\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)$ / $a_5 - a_6 = a_5(1 - r^2)$

$\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right) : (1 - r^2) = 4:1 \quad \therefore\ r^2 = \dfrac{1}{4}$, $a_5 = b_3 = b_1 \times r^{2\cdot} = 1 \rightarrow d = -\dfrac{3}{4}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = a_{4.5} \times 8 = \frac{11}{8} \times 8 = 11$(답)

미적분 선택과목 문제라기보다는 오히려 수학 1의 문제와 다름없었던 문항이다.

총평 및 앞으로의 공부 방향성

문항을 하나하나 살펴보면 난도가 그리 높지 않으나, 이전과 다른 배치, 형식 등으로 인해 낯설고 당황을 느끼기 쉬웠던 모의고사입니다.

공부의 방향성이 완전히 달라지지는 않았으나 예전에 비해 옳은 방향성이 줄었다고 볼 수 있습니다.
특수한 상황부터 본다든지, 대충 개형을 예상하고 문제를 푼다든지 하면 통수를 맞게끔 문항이 출제되고 있기에 정확하고 엄밀한 풀이가 더욱 빛을 발하게 될 거라고 말할 수 있습니다. 사실 이게 옳은 공부이니 맞는 방향으로 시험이 바뀌었다고 생각할 수 있을 것 같습니다.

20번 문항의 경우, 보지도 않고 삼차함수 비율 관계를 생각하며 $(x-1)(x-4)^2+f(4)$로 풀면 틀리죠.
21번도 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 찍지 못하게 하기 위해 새로운 시도를 했고 뿐만 아니라 ㄷ 선지의 경우 기출에서 진부하게 ㄱ으로만 나오던 쉬운 개념을 문자 t와 함께 출제함으로써 학생들의 기계적인 풀이를 지양시키려 했다고 볼 수 있습니다. 특히나 접하는 삼차, 사차함수를 그리도록 문항을 출제하지 않고 연속적으로 변하는 다항함수로부터 옳은 답을 고르도록 하는 22번 역시 특수한 상황이 아닌, 계산과 논리로 옳은 개형을 고르도록 하는 의도를 갖고 있다고 해석이 됩니다.

크게 보면, 사교육에서 당연하게 쓰이고 있는 스킬을 이해 없이 사용만 하면 틀리도록 모의고사에서 엄밀성을 더욱 확보한 것처럼 보인다는 말이죠. 12번도 등차수열에 대한 이해가 되어 있다면 쉽게 풀리겠지만, 기계적으로 일차함수만 그리면 'y좌표를 어떻게 맞추지'라는 생각과 함께 펜이 멈춘 사람도 많았을 겁니다. 기본적인 정의였던 수의 나열임을 망각하고 함수로만 풀면 벌어지는 일인 겁니다.

또한, 이전의 모의고사에 비해 부등호가 유난히 많이 나오고 있습니다. (15, 19, 20, 21, 22, 30)
확정된 값이 아니라 계속해서 범위로 따라오면서 특정한 개형이나 수로 확정을 못 짓게끔 하느라 발생한 현상이라고 보이네요. 따라서 부등식에 대해 이해가 조금이라도 안 되는 부분이 있다면 돌아가서 복습을 하길 권합니다.

정리하자면, 출제 기조가 보다 본질에 충실해지고 있고, 이는 원래 평가원이 의도하고 있던 방향성이라는 겁니다. 이제 엄밀하게 푸셔야 합니다. 물러날 데가 없어요.

추가적으로 미적 선택 과목에 관해서 제게는 아무래도 삼도극과 무등비에 대해 앞으로 출제가 안 될지 많이들 여쭤보셨었습니다. 그에 대한 제 입장은 9평 전까지는 모른다는 거예요. 다만, 평가원의 이번 의도 자체가 破格(파격)이기 때문에 수험생 입장에선 어떤 게 나오더라도 풀 수 있도록 대비하는 것뿐일 듯합니다. 반대로 삼극사기 저자의 입장에서도 말하자면, 러시안 룰렛에서 총알 하나 빠졌으니 나올 확률이 올라가지 않았을까요...? 농담입니다.

6평 고생 많으셨고, 기출 중요성 잃지 마시고 무지성 n제와 모고 양치기는 지양해주세요.
기출이 다 된 사람이 N제를 하는 거고, 모고를 통해 약한 파트를 찾으면 그 파트를 N제와 기출로 보완하는 게 옳은 수학 공부의 과정일 겁니다.