제 2 교시

수학 영역

5지선다형

F F

1. $\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$3 \times 2^{-1} = \frac{3}{2}$

F F

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(3) = 4$

F F

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3) = 60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$\sum_{k=1}^{10} a_k = X$

$2X + 30 = 60 \quad \therefore X = 15$

F F

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(1) = 4 - f(1)$

$\therefore f(1) = 2$

FF

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3+1)f'(x)$

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1)$

$= 12$

F

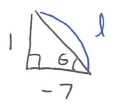
6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$-\sin\theta = \frac{1}{7}\cos\theta$

$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{7}$



$l = \sqrt{1^2+7^2}$

$= 5\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

F

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\log_2(x-a)$의 점근선 $\rightarrow x=a$

$\left|\log_2\frac{a}{4} - \log_{\frac{1}{2}}a\right| = 4$

$|2\log_2 a - 2| = 4$

$\therefore \log_2 a = 3, -1$

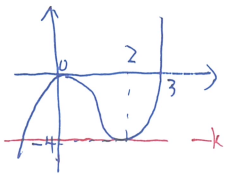
$\therefore a = 8, \cancel{\frac{1}{2}}$ $(\because a>2)$

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2x^2-1 = x^3-x^2+k$

$\to \underbrace{x^3-3x^2} = -k-1$



$-k-1$ (∵ k는 양수이므로 $-k-1$은 0보다 작음)

$-k-1 = -4 \qquad \therefore k=3$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{(2k-1)a_k} = b_k$,

$\sum_{k=1}^{n} b_k = S_n$ 이라 하면

$S_n = n^2+2n \to b_n = 2n+1$

살짝 미분

& b_1을 따로 구할 필요 X

(∵ $S_0=0$)

1칸 차

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1 \to a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$= \frac{10}{21}$

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

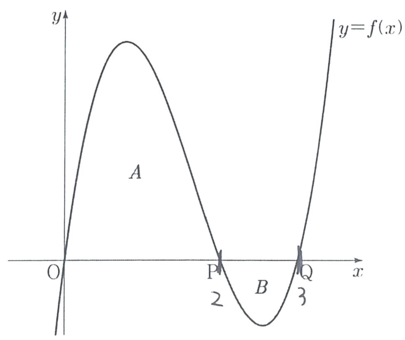
$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{OP} < \overline{OQ})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이}) - (B\text{의 넓이}) = 3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



$A - B = \int_0^3 f(x)\,dx = 3$

$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 kx(x-2)(x-3)\,dx$

$= k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)\,dx$

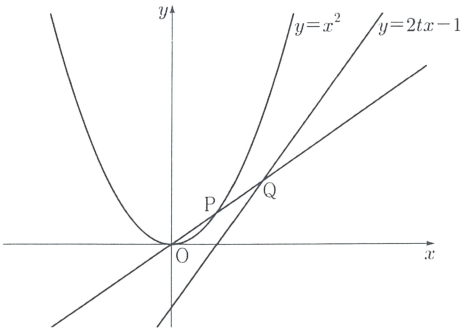
$= k\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \Big|_0^3\right)$

$= \frac{9}{4}k = 3$

$\therefore k = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

中下



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

Think.

$\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$ 를 구하기 위해? $\overline{PQ}$를 t에 관한 식으로 표현해라

① $y=x^2$에서 $y=2tx-1$의 거리가 최소가 되는 점?

$y=x^2$ 위의 점 중에 접선의 기울기가 $2t$인 점

$\rightarrow y'=2x \Rightarrow P(t, t^2)$

② P점 찾았으니 Q점 찾아야 $\overline{PQ}$ 구할 수 있음

Q점은 직선 OP와 $y=2tx-1$의 교점

$\rightarrow y=\frac{t^2-0}{t-0}x = tx$

$tx = 2tx-1 \quad \therefore x=\frac{1}{t} \Rightarrow Q(\frac{1}{t}, 1)$

③ $\overline{PQ} = \sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}$

$\lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}}{1-t} \Rightarrow \frac{0}{0}$꼴

푸는 법 ⇒ 0으로 가는 인자를 묶어서 정리!

$= \lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{\{\frac{1}{t}(t^2-1)\}^2+(t^2-1)^2}}{1-t}$

곱셈 꼴이고 0으로 가지 않으므로 2로 미리 보내주는 것 ok!

$= \lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{(\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)^2}}{1-t}$

$= \lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{2}\,(1-t^2)}{1-t} = \lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{2}\,(\cancel{1-t})(1+t)}{\cancel{1-t}} = 2\sqrt{2}$

$\because \sqrt{(t^2-1)^2} = |(t^2-1)| = 1-t^2\ (\because t \to 1-)$

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

中

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

Think. 흠.. 잘 모르겠고 수열이니 나열해보자!

공차 d

$A \rightarrow \ -4-d \quad -4 \quad -4+d \quad -4+2d \quad -4+3d$

$B \rightarrow \ -8-d \quad -8+d \quad -8+3d \quad -8+5d \quad -8+7d$

공차 $2d$

A랑 B가 공차는 2배인데 3개가 겹친다?

-> a_1, a_3, a_5가 겹칠 수 밖에 없음!

$\because a_p = b_q$라 하면 $a_{p+2}=b_{q+1}$, $a_{p-2}=b_{q-1}$로

a_p에서 앞 뒤로 2칸 간거랑 b_q 앞 뒤로 1칸 간거랑 같음

⇒ -4, $-4+2d$가 겹치거나 $-4-d$, $-4+d$, $-4+3d$가 겹칠 수 있는데 3개 겹치므로 후자!!

$-4-d \ \overset{+2d}{/} \ -4+d \ \overset{+2d}{/} \ -4+3d$

$-8-d \ / \ -8+d \ / \ -8+3d \ / \ -8+5d \ / \ -8+7d$

(i) (ii) (iii)

+2d +2d +2d +2d

(i)이랑 겹침 → $-4-d=-8-d$ (X)

(ii)이랑 겹침 → $-4-d=-8+d \Rightarrow d=2$

$\therefore a_{20}=a_2+18d=32$

(iii)이랑 겹침 → $-4-d=-8+3d \Rightarrow d=1$

$\therefore a_{20}=a_2+18d=14$

$\therefore a_{20}$의 합 $= 32+14=46$

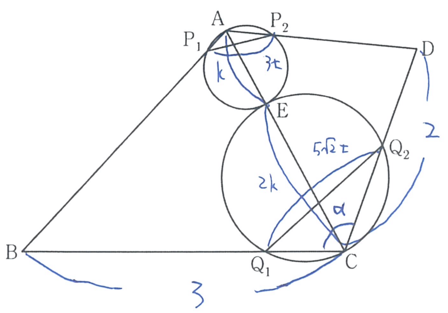
(f) [위치의 변화량 → $\int_a^b v(t)\,dt$
움직인 거리 → $\int_a^b |v(t)|\,dt$

13. 그림과 같이

中

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

Think. 도형 문제네니, 표시할 수 있는 것 표시해주자!

① $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, α 에 관한 조건? 끼인 각이네 → cos 법칙

$\overline{BD}^2 = 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\alpha$
$= 17$

② ①번 당장 쓸 일은 없어보이니 다른 조건 찾자!

원의 지름비랑 내접 △의 한 변의 길이비? → sin법칙!

$\angle P_1AP_2 = \beta$라 하면

$\frac{3}{\sin\beta} : \frac{5\sqrt{2}}{\sin\alpha} = 1:2 \rightarrow \sin\alpha : \sin\beta = 5\sqrt{2}:6$

$\therefore \sin\beta = \frac{1}{5\sqrt{2}}\times 6\sin\alpha = \frac{4}{5}$

③ △ 넓이가 2인 조건을 써먹어야겠는데 β 크기를 안다?
→ 끼인각을 이용한 넓이!

$\overline{AB}=p$, $\overline{AD}=q$라 하면

$2=\frac{1}{2}\times p\times q\times\sin\beta \rightarrow pq=5$

④ $p+q$를 알아야 해서 p, q에 관한 조건이 하나 더 필요!
→ ①을 쓰자!

$\sin\beta=\frac{4}{5}$ $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ (∵ cos은 둔각)

$17=p^2+q^2-2pq\cos\beta \rightarrow p^2+q^2=11$

→ $p+q$를 알아내야 하므로 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=11$

14. 실수 $a\,(a\geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

中下

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

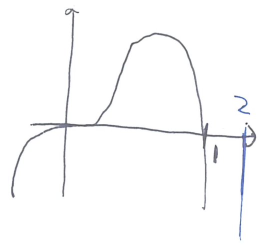
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

Think. V에서 운동방향 변화? 부호변화!

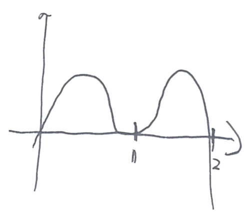
1과 a와 2a가 모두 다르면 3번의 부호변화 → (X)
⇒ 겹쳐야됨!

①

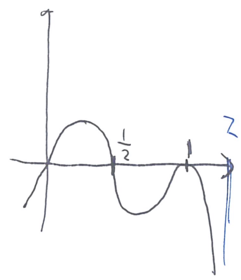
(i) $a=2a \rightarrow a=0$ ∴ $V(t)=-t^3(t-1)$



(ii) $1=a \rightarrow a=1$ ∴ $V(t)=-t(t-1)^2(t-2)$



(iii) $1=2a \rightarrow a=\frac{1}{2}$ ∴ $V(t)=-t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$



②

사실 개형만 봐도 (ii)가 답 (∵ (i),(iii)에서 1→2로 가면서 매우 빨리 가서 $\int_1^2 V(t)dt$는 큰 음수값일 것임)
모르겠으면 (i),(iii) 다 적분해보길!

(ii) $\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)\,dt$

적분하기 쉽게 평행이동

$= \int_{-1}^{1} -(t+1)t^2(t-1)\,dt = -2\int_0^1 (t^4-t^2)\,dt$
$= \frac{4}{15}$ ∴ $\frac{4}{15}$

中上

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

→ 자연수/정수 조건 나오면 체크하기

올해도 15번은 수열인가?...

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

Think. 귀납적 수열 → 나열해보기!

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$ (∵(i))	$a_4 \le 0$: $16-3k$	$a_5 \le 0$: $26-4k$; $a_5>0$: $6-4k$
⊕	⊖	⊖ (∵(i))		$a_4>0$: $-3k$ ⊖	$10-4k$

(i) a_3은 k가 1일 때만 $a_3 > 0$ 이니

k가 1이면?

a_3	a_4	a_5	a_6
1	-6	1	-10
⊕	⊖	⊕	⊖

→ 곱은 ⊕ ⇒ (X)

∴ $k \ne 1$

(ii) $a_4 < 0$, $a_5 < 0$, $a_6 > 0$

$8-2k<0$, $16-3k<0$, $26-4k>0$

$4<k$, $\frac{16}{3}<k$ (5.xxx), $k<\frac{13}{2}$ (6.5)

∴ $\boxed{k=6}$

(iii) $a_4<0$, $a_5>0$, $a_6<0$

$8-2k<0$, $16-3k>0$, $6-4k<0$

$4<k$, $k<\frac{16}{3}$ (5.xxx), $\frac{3}{2}<k$ (1.5)

∴ $\boxed{k=5}$

(iv) $a_4>0$, $a_5<0$, $a_6<0$

당연(∵ $a_5=-4k<0$)

$6-2k>0 \to k<4$, $10-4k<0 \to 2.5<k$

∴ $\boxed{k=3}$

∴ $6+5+3=14$

단답형

FF

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$2^{x-6} \le 2^{-2x}$

$x-6 \le -2x$

∴ $x \le 2$

∴ $1+2=3$

FF

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4 - x + \cancel{C}$ 3(∵ $f(0)=3$)

∴ $f(2) = 32 - 2 + 3$

$= 33$

F

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=3ax^2+b$

$f'(1)=3a+b=0$

$f(1)=2a+b=-2$

$\therefore a=2,\ b=-6$

$f(x)=2x^3-6x+2$

$\therefore \underbrace{f(-1)}_{\to\ f(x)\text{가 } (0,2)\text{ 점대칭}}=-2+6+2=6$

F

19. ~~두~~ 자연수 a, b에 대하여 함수

→ 자연수 / 정수 조건 체크

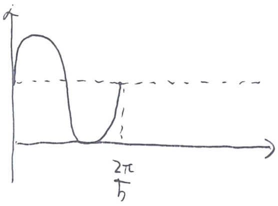
$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
> (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$f(x)$의 최솟값 $8-2a\geq 0$ → $a\leq 4$

$f(x)=0$인 것이 존재하려면 $a=4$



4주기? $\frac{4\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=4$

$\therefore a+b=8$

(f) 엄밀하게 풀려면 $\frac{2\pi}{b}\times 3+\frac{3\pi}{2b}\leq 2\pi$, $\frac{2\pi}{b}\times 4+\frac{3}{2b}\pi>2\pi$ 등
연립해서 풀어야 하나 굳이? 가장 간단한 꼴 넣어서
성립하는지 보면 시간 절약 가능

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

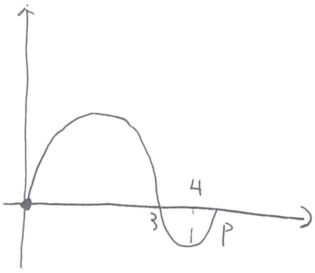
#F

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

Think. f에 관한 조건이 최고차 1, 2차함수 밖에 없네?
다 g에 관한 조건이니까 $g(x)$를 정적분함수
꼴로 극었으므로 g를 원점을 지나는 최고차 $\frac{1}{3}$인
3차 조건으로 두고 g 위주로 풀면 되겠네



← 조건을 만족시키는 가장 간단한 형태

→ 계산해보고 이상없으면 그냥 답체크 하기
(다 풀고 시간 남으면 돌아와서 다른 case 보던가)

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p)$

$g'(4)=\frac{1}{3}\left((4-3)(4-p)+4(4-p)+4(4-3)\right)=0$

$4-p+16-4p+4=0$

$5p=24$ $\therefore p=\frac{24}{5}$

$\therefore f(9)=g'(9)=\frac{1}{3}\left((9-3)(9-\frac{24}{5})+9(9-\frac{24}{5})+9(9-3)\right)$

$=\frac{1}{3}\left(6\times\frac{21}{5}+9\times\frac{21}{5}+9\times 6\right)$

$=\cancel{5}\times\frac{21}{\cancel{5}}+18$

$=39$

中

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

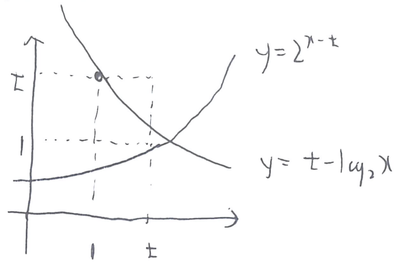
ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제 찍맞 방지용으로 이렇게 내버리네..

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

Think. G를 그려보면 (대수충)



회전이동 문제인가 싶었는데 회전해서 또 평행이동시킨 꼴이라 흠... 일단 풀어보자!

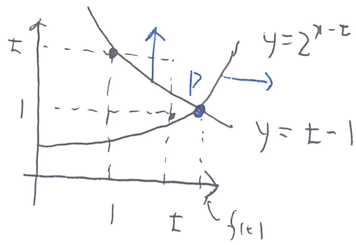
ㄱ. t값 주니까 대입

$t=1$ $1-\log_2 x = 2^{x-1}$ $\xrightarrow{x=1}$ $1=1$ (O)

$t=2$ $2-\log_2 x = 2^{x-2}$ $\xrightarrow{x=2}$ $1=1$ (O)

∴ (O)

ㄴ. t값 ↑에 따른 G 이동을 보니 파란 화살표 방향으로 움직임



→ B(x)
→ A(x)

→ 그러면 교점 P는 P↗ 방향으로 움직이니 x좌표 大 (O)

ㄷ. $f(t)\geq t$ 일려면

모든 t에 $A(t)\leq B(t)$ 이어야 한다. → $t-\log_2 t\leq 1$

$t-1\leq \log_2 t$ ⇒

22. 정수 $a(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

→ 가변수 / 정수 조건 체크

上

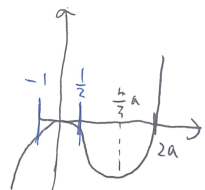
$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

Think. 평균변화율 곱이 음수인 게 구간 내에 존재하려면 증가 / 감소 동시에 나타나면 되겠네!

(i) $a>0$



→ k를 좌측에서부터 우측으로 와보면 증가 파트만 있다가 k=-1이면 구간이 $(-1,\frac{1}{2})$로 증가/감소 동시에 나타남.

그 후 감소만 나타나다가 $(k,k+\frac{3}{2})$ 사이에 $\frac{4}{3}a$가 있으면 증가 / 감소 동시에 나타남.

$-12=(-1)\times 3\times 4$ 이므로

$2+\frac{3}{2}\leq\frac{4}{3}a$ (∵ 2일 때 성립 X)
→ $2+\frac{3}{2}$은 $\frac{4}{3}a$거나 왼쪽에!

$3<\frac{4}{3}a<3+\frac{3}{2}$
$4<\frac{4}{3}a<4+\frac{3}{2}$
(∵ 3, 4일 때 성립 O → $\frac{4}{3}a$는 사이에!)

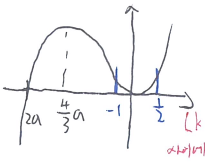
$\frac{4}{3}a\leq 5$ (∵ 5일 때 성립 X)
→ $\frac{4}{3}a$보다 5가 같거나 오른쪽에!

⇒ $4<\frac{4}{3}a<\frac{9}{2}$

$3<a<\frac{27}{8}$
3.xxx

∴ 정수 a 존재 X

(ii) $a<0$



$(k,k+\frac{3}{2})$ 사이에 $\frac{4}{3}a$가 있어야함

→ k를 좌측에서부터 우측으로 와보면 증가 파트만 있다가 $k+\frac{3}{2}$이 최초로 $\frac{4}{3}a$를 넘어서는 시점부터 증가/감소가 모두 존재하다가 k가 $\frac{4}{3}a$를 넘어서면 감소만 존재함. 그러다가 $k+\frac{3}{2}$이 0을 넘어서는 즉, $\boxed{k=-1}$일 때 증가/감소 모두 존재하다가 k가 0부터 다시 증가만 존재

$-12=(-1)\times(-3)\times(-4)$ 이므로

$-5+\frac{3}{2}\leq\frac{4}{3}a$ (∵ -5일 때 성립 X)
→ $-5+\frac{3}{2}$은 $\frac{4}{3}a$거나 왼쪽에!

$-4<\frac{4}{3}a<-4+\frac{3}{2}$
$-3<\frac{4}{3}a<-3+\frac{3}{2}$
(∵ -4, -3일 때 성립 O → $\frac{4}{3}a$가 사이에!)

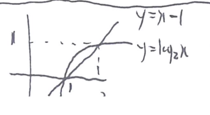
$\frac{4}{3}a\leq -2$ (∵ -2일 때 성립 X)
→ $\frac{4}{3}a$보다 -2가 같거나 오른쪽에!

⇒ $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$
-2.xxx -1.xxx

∴ a=-2

$\boxed{\therefore f'(10)=380}$



$1<x<2$ 범위에서는 성립 X ⇒ (X)

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

TT

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

$\frac{5!}{2!} = 60$

24. 두 사건 A, B에 대하여

TT

$$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{P}(B^C) = \frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

$\mathrm{P}(A-B) = \frac{1}{9}$

$1-\mathrm{P}(B) = \frac{7}{18} \rightarrow \mathrm{P}(B) = \frac{11}{18}$

$\therefore \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{9} + \frac{11}{18}$

$= \frac{13}{18}$

25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

下

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

흰 1 → $\dfrac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4}$

흰 0 → $\dfrac{{}_5C_4}{{}_9C_4}$

$\therefore\ 1-\left(\dfrac{{}_4C_1 \times {}_5C_3 + {}_5C_4}{{}_9C_4}\right) = \dfrac{9}{14}$

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

下

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

$(x-1)^6(2x+1)^7$

0차 2차 → ${}_6C_0 \cdot (-1)^6 \cdot {}_7C_2 \cdot 2^2 = 84$

1차 1차 → ${}_6C_1 \cdot (-1)^5 \cdot {}_7C_1 \cdot 2^1 = -84$

2차 0차 → ${}_6C_2 \cdot (-1)^4 \cdot {}_7C_0 \cdot 2^0 = 15$

$\therefore\ 84+(-84)+15 = 15$

下

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\le 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

4의 배수

(1,4)

(2,2), (2,4), (2,6)

(3,4)

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,4)

(6,2), (6,4), (6,6)

⇒ 15개

$a+b\le 7$ ⇒ △ ⇒ 7개

∴ $\frac{7}{15}$

中

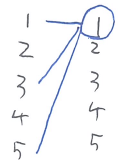
28. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다. → 모두 홀수
>
> (나) $f(2)<f(4)$ → 순서 결정
>
> (다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

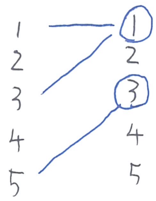
Think. $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 홀수여야 하므로
이걸 기준으로 case 분류 하자!

(i) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 하나의 홀수로 대응



$\underbrace{{}_3C_1}_{\text{홀수 선택}} \times \underbrace{{}_4C_2}_{\text{나머지 4개 숫자 중 서로 다른 2개에 2,4 대응}} = 18$

(ii) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 두 개의 홀수에 대응

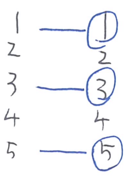


모두 하나의 숫자에 대응되는 것 지우기

$\underbrace{{}_3C_2}_{\text{홀수 선택}} \times \underbrace{(2^3-2)}_{\text{1,3,5 대응}} \times \underbrace{{}_2C_1}_{\text{1,3,5가 대응된 2개의 숫자 중 하나 선택}} \times \underbrace{{}_3C_1}_{\text{나머지 2개 숫자 중 하나 선택}} = 108$

→ 2,4 같이 대응

(iii) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 세 개의 홀수에 대응



$\underbrace{{}_3C_3}_{\text{홀수선택}} \times \underbrace{3!}_{\text{1,3,5 배치}} \times \underbrace{{}_3C_2}_{\text{치역 3개의 숫자중 2개 선택해 2,4 대응}} = 18$

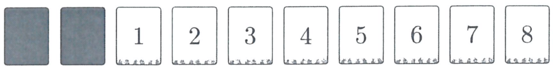
∴ $18+108+18=144$

단답형

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

中

> (가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
>
> (나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
>
> (다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



Think. 끼워넣기 문제네, 흠... 뻔하구먼...

① 상황정리

B B

$\wedge$ a $\wedge$ b (≥ 2) $\wedge$ c

$a+b+c=8$

② case 분류

(i) b 위치에 3만 존재 → $a \leq 2$, $3 \leq a+b \leq 5$

$a=0 \to b=3,4,5$

$a=1 \to b=2,3,4$ 8개

$a=2 \to b=2,3$ ($\because b \geq 2$)

(ii) b 위치에 6만 존재 → $3 \leq a \leq 5$, $a+b \geq 6$

$a=3 \to b=3,4,5$

$a=4 \to b=2,3,4$ 8개

$a=5 \to b=2,3$ ($\because b \geq 2$)

(iii) b 위치에 3, 6 모두 존재 → $a \leq 2$, $a+b \geq 6$

$a=0 \to b=6,7,8$

$a=1 \to b=5,6,7$ 9개

$a=2 \to b=4,5,6$

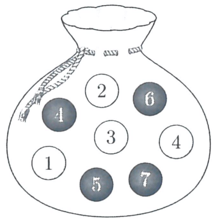
$\therefore 8+8+9=25$

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

中下

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Think. 서로 다른 색이면 12니깐 무조건 될거고 같은 색이면 구해봐야겠네!

(i) 서로 다른 색

$4 \times 4 = 16$

(ii) 서로 같은 색

① 흰색 → 최대가 $3 \times 4 = 12 \leq 24$ 이므로 짝수만 되면 ok!

$_4C_2 - \underbrace{1}_{(1,3)} = 5$

② 검은색 → 최대가 $6 \times 7 = 42 > 24$, 최소가 $4 \times 5 = 20 < 24$니 직접 세는게 낫겠네!

$(4,5)$, $(4,6)$ → 2

$\therefore \dfrac{16+5+2}{_8C_2} = \dfrac{23}{28}$ $\therefore 28+23=51$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

TT

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

$\simeq (n+\frac{9}{2})^2$ $\simeq (n+2)^2$

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty} (n+\frac{9}{2})-(n+2) = \frac{5}{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

T

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln(t^2+1)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$

$\frac{dy}{dt}=3\cdot\frac{2t}{t^2+1}$

$\downarrow t=2$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{5}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{12}{5}$

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-4$

25. $\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

극한 문제 → ① 꼴판단
② 값이용

① 분모 → 0 ⇒ 분자 → 0

$2^b = 8$ ∴ $b=3$

② 값이용

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1} \overset{\text{로피탈}}{=} \lim_{x\to0}\frac{a\cdot2^{ax+3}\ln2}{3\cdot2^{3x}\ln2}$$

$$=\frac{8a}{3}=16$$

∴ $a=6$

∴ $3+6=9$

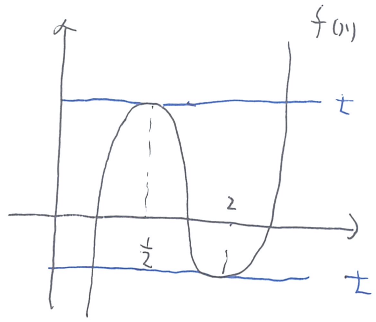
26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$$

$$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$$

$$=\frac{(x-2)(2x-1)}{x}$$



$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-2\ln2$

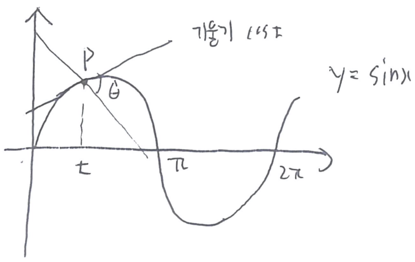
$f(2)=4-10+2\ln2$

∴ $f(\frac{1}{2})+f(2)=-\frac{33}{4}$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

中下

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



$\tan\theta = \left|\dfrac{\cos t+1}{1+\cos t\cdot(-1)}\right|$

$= \dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}$

$\therefore \lim_{t\to\pi-}\dfrac{\dfrac{1+\cos t \to 0}{1-\cos t \to 2}}{(\pi-t)(\pi-t) \to 0}$ 먼저 보내주기 ok!

$= \dfrac{1}{2}\lim_{t\to\pi-}\dfrac{1+\cos t}{(\pi-t)(\pi-t)}$ → $1-\cos(\pi-t)$

$= \dfrac{1}{2}\lim_{t\to\pi-}\dfrac{\frac{1}{2}(\pi-t)^2}{(\pi-t)(\pi-t)}$

$= \dfrac{1}{4}$

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

上上

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

Think. 합성함수 문제인데 이런 유형 평가원에선 첨보는 스탈인데? 일단... 해보자

$(x^2+2x)\circ f(x) = \underbrace{a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x}+b}_{g(x)}$

① (나) 조건 이용을 위해 0, 2 대입

$f(0)=p$, $f(2)=q$라 하면

$p^2+2p=a+b$

$q^2+2q=a+b$

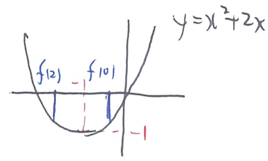
$p\neq q$ 이므로 ($\because$ (나)) p, q는 $x=-1$ 대칭

$p+q=-2$

$p=q+1$ $\therefore p=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$

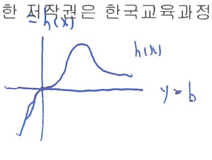
② 살짝 멘붕... 더 쓸만한 조건이 안 보이는데...
연속 조건 빼곤 다 건드려서 연속성을 써야할 거 같은데..
일단 상황을 꼼꼼히 보자!



어? 0→2로 가면서 함숫값이 −1이 되는 최솟점이 있어야하네?

$g(x) = \underbrace{ax^3e^{1-x^2}}_{h(x)}+b \circ \cos\pi x$ ⇒ $\cos\pi x=-1$일 때, 즉 $x=1$일 때 최소

$1\to-1\to1$



$-a+b=-1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{7}{8}$

단답형

上

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$) [4점]

Think. 곡선 C 그리기 불가능하니까 음함수 미분법 문제겠네!

① C 미분

$2x-2y-2x\cdot\frac{dy}{dx}+4y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$

② 접선이 수직

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}=\frac{k^2}{(a+2k)(b+2k)}=-1$

③ 흠.. 더 쓸 수 있는 조건은 둘의 x, y 좌표차가 같다는 거만 남았네... 어? x^2-2xy? 조각될리도?

$C: (x-y)^2+y^2=15$

↓

$k^2=15-(a+k)^2=15-(b+k)^2$

㉠ $a+k=-(b+k)$ $(\because a \neq b)$

㉡ $k^2=15-(a+k)^2$

㉢ $k^2=-(a+2k)(b+2k)$

⇒ 문자 3개, 식 3개 → a, b, k 구할 수 있음

㉠ $2k=-(a+b)$

↓ ㉢에 대입

$k^2=-ab$

㉡ $a^2+2ak+k^2=15-k^2$

$a^2+2a\left(-\frac{a+b}{2}\right)-ab=15+ab \Rightarrow ab=-5$

$\boxed{\therefore k^2=-ab=5}$

中上

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n \leq -1)\\ a_n & (a_n > -1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

Think. 등비급수 문제네. 공비 범위 나누는 게 중요하겠다!

$b_3=-1 \rightarrow a_3 \leq -1$

(i) $r \geq 1$, $r \leq -1$

$a_3 \leq -1$인데 $a_5 \leq -r^2$, ... 식이라 수렴 불가능!

(ii) $0<r<1$

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

-1 -1 -1 ⊖ ⊖

$a_1 \leq -\frac{1}{r^2}$, $a_2 \leq -\frac{1}{r}$

(가)는 어찌저찌하면 될지 모르겠는데

(나)는 음수항만 더했을 때 양수 불가능

(iii) $-1<r<0$

⊖ ⊕ ⊖ ⊕

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

-1 a_2 -1 a_4

(가) → $b_5=-1$이면 $b_1+b_3+b_5=-3$인데 뒤에 음수항은 한참 남았는데? ⇒ (X) $\therefore b_5=a_5$

(가) $-2+\frac{\cancel{a_5}\ ar^4}{1-r^2}=-3$

(나) $\frac{\cancel{a_2}\ ar}{1-r^2}=8$

$a=-12$, $r=-\frac{1}{2}$

첫째항이 12, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열

$\therefore \sum^{\infty}|a_n|=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

$\therefore 24$