제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $i(1-i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $-1-i$ ② $-1+i$ ③ i ④ $1-i$ ⑤ $1+i$

2. 두 다항식 $A=2x^2-4x+3$, $B=-x^2+9x+6$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2+5x+9 ② x^2+5x-9 ③ x^2-5x+9
④ $-x^2+5x+9$ ⑤ $-x^2-5x+9$

3. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-8x+a가 $x-3$으로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$x=3 \rightarrow 27-18-24+a=0$

$a=15$

4. 등식

$$x^2+ax-3=x(x+2)+b$$

가 x에 대한 항등식일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

x^2+2x+b

$a=2$

$b=-3$

5. 부등식 $|2x-3|<5$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$-5<2x-3<5$

$-1<x<4$

6. 이차함수 $y=x^2+5x+9$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나지 않도록 하는 자연수 k의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^2+4x+9-k=0$

$D/4=4-9+k<0$

$k<5$

7. $\dfrac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}$의 값은? [3점]

① 2018 ② 2020 ③ 2022 ④ 2024 ⑤ 2026

$2023=x$

$\cancel{\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)x+1}}=x-1=2022$

8. $x=1-2i$, $y=1+2i$일 때, $x^3y+xy^3-x^2-y^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① -24 ② -22 ③ -20 ④ -18 ⑤ -16

$x+y=2$

$xy=5$

$xy(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(xy-1)$

$=((x+y)^2-2xy)(xy-1)$

$=(4-10)(5-1)$

$=-24$

9. 연립방정식

$$\begin{cases} 4x^2-y^2=27 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$(2x+y)(2x-y)=27$

3×9

$2x+y=3$

$+\ 2x-y=9$

$4x=12$

$x=3=\alpha$

$y=-3=\beta$

$\alpha-\beta=6$

10. x에 대한 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$2-i+2+i=4=-\frac{a}{2}$, $a=-8$

$(2-i)(2+i)=5=\frac{b}{2}$, $b=10$

11. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(4)$의 값은? [3점]

(가) $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다. (나) $xP(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$P(1)=1$

$2P(2)=2, \quad P(2)=1$

$P(x)=(x-1)(x-2)+1$

$P(4)=3\times2+1=7$

12. x에 대한 삼차방정식 $x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=8$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수이다.) [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$x=1 \to 1-2a-1+a^2+2a+1-a^2-1=0$

$(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$

$\alpha+\beta=2a=8 \quad a=4$

$\alpha\beta=a^2+1=17$

13. x에 대한 다항식 $x^5+ax^2+(a+1)x+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 6이다. $a+Q(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 33 ② 35 ③ 37 ④ 39 ⑤ 41

$x=1 \rightarrow 1+a+a+1+2=6$

$2a=2,\ a=1$

$x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$

$x=2 \rightarrow 32+4+4+2=Q(2)+6$

$Q(2)=36$

$\therefore a+Q(2)=1+36=37$

14. 분자 사이에 인력이나 반발력이 작용하지 않고 분자의 크기를 무시할 수 있는 가상의 기체를 이상 기체라 한다. 강철 용기에 들어 있는 이상 기체의 부피를 V(L), 몰수를 n(mol), 절대 온도를 T(K), 압력을 P(atm)이라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$V=R\left(\frac{nT}{P}\right) \text{ (단, } R\text{는 기체 상수이다.)}$$

강철 용기 A와 강철 용기 B에 부피가 각각 V_A, V_B인 이상 기체가 들어 있다. 강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 몰수는 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 몰수의 $\frac{1}{4}$배이고, 강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 압력은 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 압력의 $\frac{3}{2}$배이다. 강철 용기 A와 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 절대 온도가 같을 때, $\frac{V_A}{V_B}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

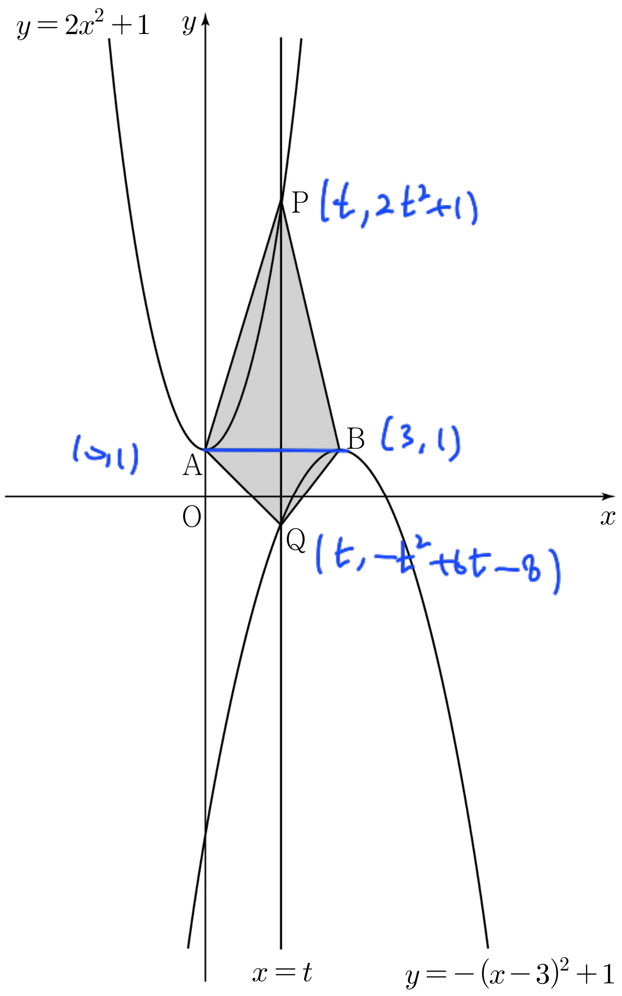
$n_A=\frac{1}{4}n_B \rightarrow \frac{n_A}{n_B}=\frac{1}{4}$

$P_A=\frac{3}{2}P_B \rightarrow \frac{P_B}{P_A}=\frac{2}{3}$

$$\frac{V_A=R\left(\frac{n_A T}{P_A}\right)}{V_B=R\left(\frac{n_B T}{P_B}\right)}$$

$\frac{V_A}{V_B}=\frac{n_A P_B}{n_B P_A}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

15. 그림과 같이 직선 $x=t\,(0<t<3)$이 두 이차함수 $y=2x^2+1$, $y=-(x-3)^2+1$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A$(0,\,1)$, B$(3,\,1)$에 대하여 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $\frac{15}{2}$　② 9　③ $\frac{21}{2}$　④ 12　⑤ $\frac{27}{2}$

$\overline{PQ} = 3t^2-6t+9$

$S = \frac{1}{2}(3t^2-6t+9)\times 3$

$= \frac{9}{2}(t^2-2t+3)$

$= \frac{9}{2}(t-1)^2+9$

$t=1 \to$ 小: 9

16. x에 대한 삼차방정식 $(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$이 서로 다른 세 실근 1, α, β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

i) $a=1$

$(x-1)(x^2-2x+4)=0$

$D/4 = 1-4<0$ (×)

ii) $x^2+(1-3a)x+4=0$ 근: $x=1$

$\mapsto$ $1+1-3a+4=0$

$a=2$

$(x-2)(x^2-5x+4)=0$

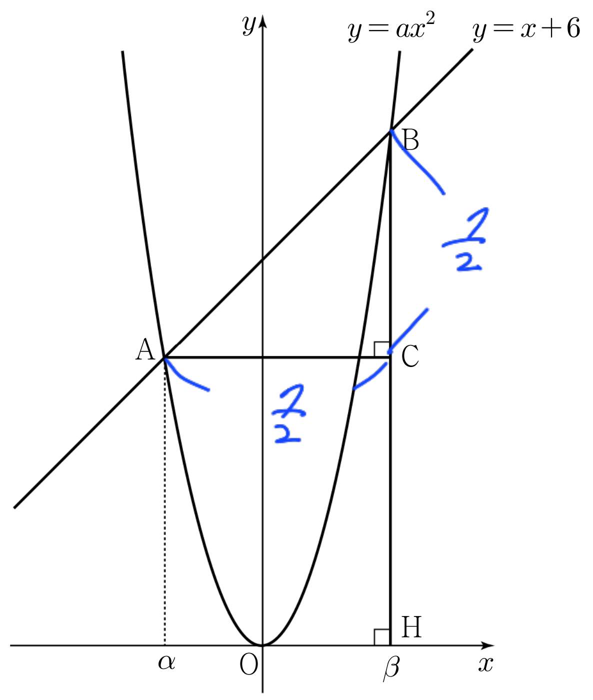
$(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$x=1, 2, 4$

$\alpha, \beta = 2, 4$

$\alpha\beta = 8$

17. 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2\,(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+6$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BH에 내린 수선의 발을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{7}{2}$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]



① $\dfrac{23}{4}$ ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{27}{4}$ ④ $\dfrac{29}{4}$ ⑤ $\dfrac{31}{4}$

$\beta-\alpha=\dfrac{7}{2}$

$ax^2-x-6=0 \quad a>0$

$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{1+24a}}{|a|}=\dfrac{7}{2}$

$7a=2\sqrt{1+24a}$

$49a^2=4+96a$

$49a^2-96a-4=0$

$49a \quad 2$
$a \quad -2 \qquad a=2$

$2x^2-x-6=0$

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$
$\alpha\beta=-3$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=\dfrac{1}{4}+6=\dfrac{25}{4}$

18. 다음은 자연수 n에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$4x^4-4(n+2)x^2+(n-2)^2=0$$

이 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의 모든 n의 값을 구하는 과정이다.

$(2(n+2))^2-4(n-2)^2$
$=(2n+4)^2-(2n-4)^2=32n$

$\dfrac{2(n+2)\pm\sqrt{32n}}{4}=\dfrac{n+2\pm\sqrt{8n}}{2}$

> $P(x)=4x^4-4(n+2)x^2+(n-2)^2$이라 하자.
> $x^2=X$라 하면 주어진 방정식 $P(x)=0$은
> $4X^2-4(n+2)X+(n-2)^2=0$이고
> 근의 공식에 의해 $X=\dfrac{n+2\pm\sqrt{\boxed{(가)}}}{2}$이다. $8n$
>
> 그러므로 $X=\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}+1\right)^2$ 또는 $X=\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}-1\right)^2$에서
>
> $x=\sqrt{\dfrac{n}{2}}+1$ 또는 $x=-\sqrt{\dfrac{n}{2}}-1$ 또는 $x=\sqrt{\dfrac{n}{2}}-1$
>
> 또는 $x=-\sqrt{\dfrac{n}{2}}+1$이다.
>
> 방정식 $P(x)=0$이 정수해를 갖기 위해서는 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$이 자연수가 되어야 한다.
> 따라서 자연수 n에 대하여 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의 모든 n의 값은 $\boxed{(나)}$, $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $f(b-a)$의 값은? (단, $a<b$) [4점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$n=2, \quad 8, \quad 18$

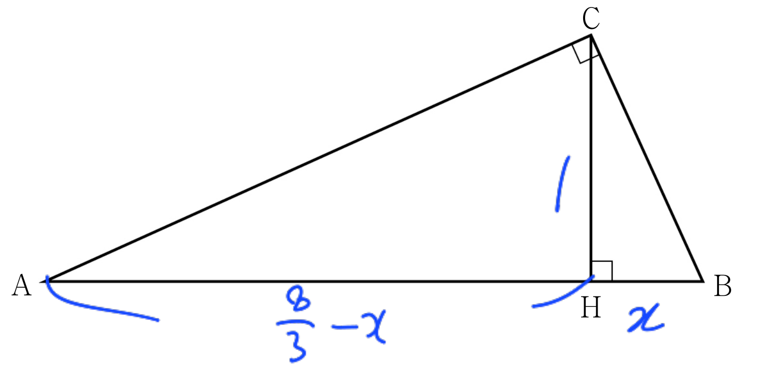
$2,-2,0,0 \quad 3,-3,1,-1 \quad 4,-4,2,-2$

$(\times) \quad (\mathrm{O}) \quad (\mathrm{O})$

$n=8, 18$

$f(b-a)=f(10)=80$

19. 그림과 같이 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{CH}}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4}{3}$이다.



$\overline{\mathrm{BH}}=x$라 할 때, $3x^3-5x^2+4x+7$의 값은? (단, $x<1$) [4점]

① $13-3\sqrt{7}$ ② $14-3\sqrt{7}$ ③ $15-3\sqrt{7}$
④ $16-3\sqrt{7}$ ⑤ $17-3\sqrt{7}$

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 1=\frac{4}{3}$, $\overline{AB}=\frac{8}{3}$

$1^2=x\left(\frac{8}{3}-x\right)$

$x^2-\frac{8}{3}x+1=0$

$3x^2-8x+3=0$, $x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

3 −8 3 | 3 −5 4 7
3 −8 3
3 1 7
3 −8 3
9 4

$\rightarrow \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ ($\because x<1$)

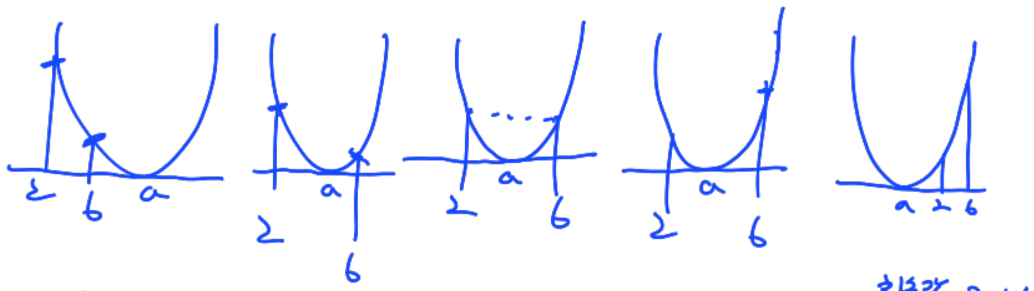
$9x+4=9\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)+4=16-3\sqrt{7}$

20. 실수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-a)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다. (나) $2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 같다.

$f(-1)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38



(X) (X) (O) (O) (X)

최솟값 0 아님

$\Downarrow$

$a=4$ $2\le a<4$

$\therefore 2\le a\le 4$

$f(-1)=(-1-a)^2=(a+1)^2$

$a=4\rightarrow$ 大: 25
$a=2\rightarrow$ 小: 9
} 34

21. 1이 아닌 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2-6x+6$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 C, D라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작다.) [4점]

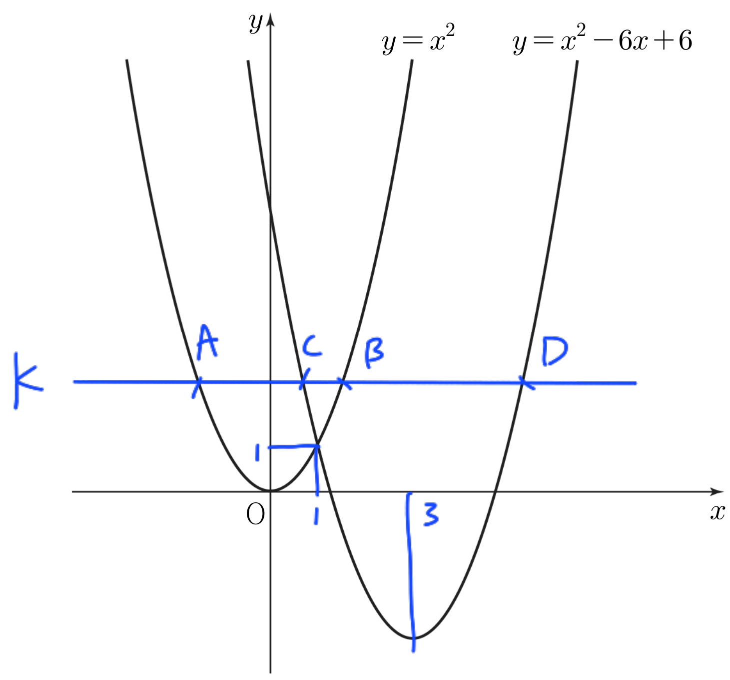
<보 기>

ㄱ. $k=6$일 때, $\overline{CD}=6$이다.

ㄴ. k의 값에 관계없이 $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2$의 값은 일정하다.

ㄷ. $\overline{CD}+\overline{AB}=4$일 때, $k+\overline{BC}=\frac{17}{16}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $x^2-6x+6=6$, $x^2-6x=0$, $x=0, 6$ $\overline{CD}=6$

ㄴ. $x^2=k$, $x=\sqrt{k}, -\sqrt{k}$ $\overline{AB}=2\sqrt{k}$

$x^2-6x+6=k$, $(x-3)^2=k+3$, $x=3+\sqrt{k+3}$, $3-\sqrt{k+3}$ $\overline{CD}=2\sqrt{k+3}$

$\overline{CD}^2-\overline{AB}^2=(12+4k)-4k=12$ (일정)

ㄷ. by (ㄴ) $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2=(\overline{CD}+\overline{AB})(\overline{CD}-\overline{AB})=12$

$\begin{cases}\overline{CD}+\overline{AB}=4\\ \overline{CD}-\overline{AB}=3\end{cases}$ $\overline{CD}=\frac{7}{2}$, $\overline{AB}=\frac{1}{2}$

$2\sqrt{k}=\frac{1}{2}$ ∴ $k=\frac{1}{16}$

$3-\sqrt{\frac{1}{16}+3}=\frac{5}{4}$

$B(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, $C(\frac{5}{4}, \frac{1}{16})$

$\overline{BC}=1$ ∴ $k+\overline{BC}=\frac{17}{16}$

단답형

22. 다항식 $(4x-y-3z)^2$의 전개식에서 yz의 계수를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$(-y)(-3z)\times 2=6yz$

23. x에 대한 부등식 $x^2+ax+b\leq 0$의 해가 $-2\leq x\leq 4$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{16}$

$(x+2)(x-4)$

x^2-2x-8

$a=-2$, $b=-8$

24. 다항식 x^3+2를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{7}$

$x=-1 \to -1+2=-a+b=1$

$x=2 \to 8+2=2a+b=10$

$-3a=-9$

$a=3$

$b=4$

25. 이차방정식 $x^2-6x+11=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.) [3점]

$\boxed{14}$

$\begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ \alpha\beta=11 \end{cases}$

$\overline{\alpha}=\beta$

$\overline{\beta}=\alpha$

$11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)$

$=11\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)$

$=11\left(\frac{6^2-2\cdot 11}{11}\right)=36-22=14$

26. 다음은 삼차다항식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정의 일부를 나타낸 것이다.

3	a (1)	b (−2)	c (−5)	11
		$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{-6}$
	1	1	−2	5

$P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

$\boxed{23}$

$P(x)=x^3-2x^2-5x+11$

$P(4)=64-32-20+11=23$

27. 자연수 n에 대하여 x에 대한 연립부등식

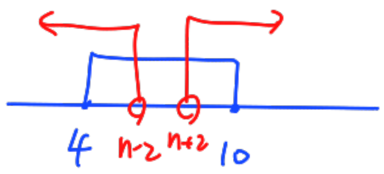
$$\begin{cases} |x-n|>2 \\ x^2-14x+40\le 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{21}$

$$\begin{cases} x-n<-2,\ x-n>2 \\ (x-4)(x-10)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<n-2,\ x>n+2 \\ 4\le x\le 10 \end{cases}$$

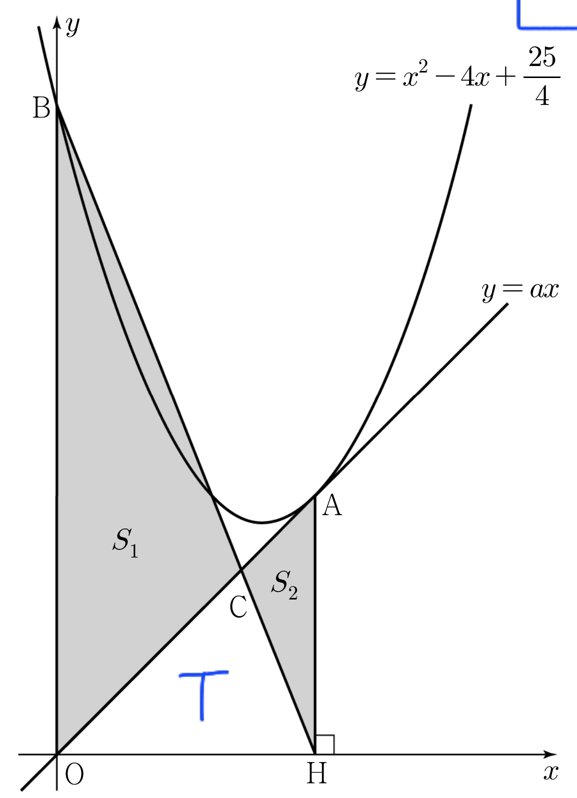


$n=6,7,8$

28. 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=ax\,(a>0)$과 한 점 A에서만 만난다.
이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 y축과 만나는 점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 OA와 선분 BH가 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 BOC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACH의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1-S_2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{91}$

$(0, \frac{25}{4})$



$x^2-4x+\frac{25}{4}=ax$

$x^2-(4+a)x+\frac{25}{4}=0$

$(x\pm\frac{5}{2})^2=0 \quad 4+a=\pm 5 \quad a=1,-9$

$\therefore a=1$

$(x-\frac{5}{2})^2=0,\ A(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

$S_1-S_2=(S_1+T)-(S_2+T)$

$=(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{25}{4})-(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2})$

$=\frac{5}{4}(\frac{25-10}{4})=\frac{75}{16}=\frac{q}{p}$

$\therefore p+q=91$

29. 49 이하의 두 자연수 m, n이

$$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n\right\}^2 = 4$$

를 만족시킬 때, $m+n$의 최댓값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$, $m=2k \le 49$, → $k \le 24$ $\boxed{94}$

$(i^k - i^n)^2 = 4$

$i^k - i^n = 2, -2$

i) $i^k - i^n = 2$ ($i^k = 1$, $i^n = -1$)

$k=4A$, $n=4B-2$ $k=24$, $n=46$, $m=48$) $m+n=94$

ii) $i^k - i^n = -2$ ($i^k = -1$, $i^n = 1$)

$k=4A-2$, $n=4B$ $k=22$, $n=48$, $m=44$) $m+n=92$

30. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점 $(0,0)$에서만 만난다.
> (나) 부등식 $f(x)+g(x) \ge 0$의 해는 $x \ge 2$이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x) \ge f(1)-g(1)$이다.

x에 대한 방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수가 5일 때, $f(22)+g(22)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(다) $f(x)-g(x)$  $\boxed{120}$

(나) $f(x)+g(x)$ 

$f(x)=ax^2$, $g(x)=-ax^2+b(x-2)$ $(a>0)$

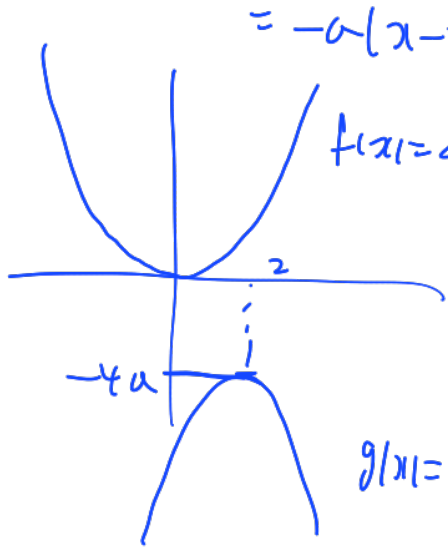
$f(x)+g(x)=b(x-2)$ $(b>0)$

$f(x)-g(x)=2ax^2-bx+2b$

$-\frac{-b}{2\cdot 2a} = \frac{b}{4a} = 1$, $b=4a$

$g(x)=-ax^2+4ax-8a$

$=-a(x-2)^2-4a$



$f(x)=ax^2$

$-1, -2, -3, -4, -5$

$g(x)=-a(x-2)^2-4a$

$-6 \le -4a < -5$

$\frac{5}{4} < a \le \frac{3}{2}$

$f(x)+g(x)=4a(x-2)$

$f(22)+g(22)=80a \le 120$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.