2024학년도 대학수학능력시험 6평 대비 정상모의고사 1회 정답 및 해설지

공통문항						확률과 통계		미적분		기하	
1	①	9	①	16	3	23	②	23	④	23	①
2	③	10	③	17	72	24	④	24	⑤	24	③
3	②	11	⑤	18	10	25	①	25	①	25	②
4	⑤	12	③	19	2	26	⑤	26	②	26	⑤
5	④	13	②	20	350	27	②	27	③	27	④
6	①	14	④	21	10	28	③	28	⑤	28	②
7	④	15	②	22	360	29	111	29	13	29	72
8	⑤					30	215	30	191	30	215

[공통 문항]

1) 정답 ①

$\left(5^{\sqrt{3}}\times 25\right)^{\sqrt{3}-2}=\left(5^{\sqrt{3}}\times 5^2\right)^{\sqrt{3}-2}=\left(5^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=5^{3-4}=\dfrac{1}{5}$

2) 정답 ③

$f'(x)=2x+2$ 이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$

3) 정답 ②

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\dfrac{3}{5}$

따라서

$\sin\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=-\cos\theta-(-\sin\theta)=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

4) 정답 ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1}f(x)=0+2=2$

5) 정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$ 이라 하자.

$a_4a_6=3a_5$ 에서

${a_5}^2=3a_5$, $a_5(a_5-3)=0$

$\therefore$ $a_5=0$ 또는 $a_5=3$

이때 $a_6+a_7=18$ 이므로 $a_5=3$ 이고

$a_6+a_7=3r+3r^2=18$ 에서

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$\therefore$ $r=2$

따라서 구하는 값은

$a_{10}=a_5r^5=3\times 2^5=96$

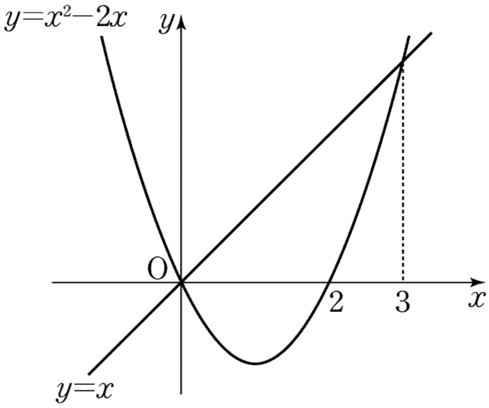
6) 정답 ①

$x^2-2x=x$ 에서

$x^2-3x=x(x-3)=0$

즉, 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=x$ 는

두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 3)$ 에서 만난다,



따라서 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=x$ 로

둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}dx=\int_0^3(3x-x^2)dx$

$=\left[\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^3=\dfrac{27}{2}-9=\dfrac{9}{2}$

7) 정답 ④

최고차항의 계수가 양수인 사차함수가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이어야 한다. 즉, 삼차함수 $f'(x)$ 의 극댓값은 양수, 극솟값은 음수가 되어야 한다.

$f(x)=x^4-6x^2+ax$ 에서

$f'(x)=4x^3-12x+a$

그러면 $y=4x^3-12x+a$ 에서

$y'=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

이므로 삼차함수 $y=f'(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대, $x=1$ 에서 극소이다.

$f'(-1)=-4+12+a=8+a>0$,

$f'(1)=4-12+a=a-8<0$

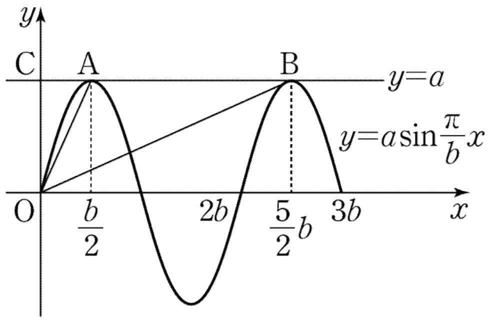
이므로 $-8<a<8$이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 최댓값은 7이다.

8) 정답 ⑤

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{b}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로,

곡선 $y=a\sin\frac{\pi}{b}x$와 직선 $y=a$는 다음 그림과 같다.



따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{b}{2},\ a\right)$, 점 B의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}b,\ a\right)$이므로

$\overline{AB}=2b=4$, $b=2$

한편 $\angle AOC=\angle OBC$이므로 두 직각삼각형 OAC와 BOC는 닮음이다.

그러면 $\overline{AC}:\overline{OC}=\overline{OC}:\overline{BC}$에서

$1:a=a:5$, $a=\sqrt{5}$

$\therefore\ a^2+b^2=(\sqrt{5})^2+2^2=9$

9) 정답 ①

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\frac{(x^2-4)(ax+b)}{(x-2)^2}$이고,

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=8$

그러면

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(ax+b)}{(x-2)^2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(ax+b)}{(x-2)}=8$

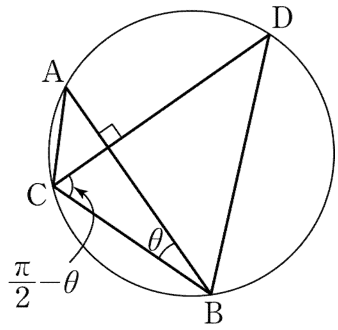
이때 $2a+b=0$, 즉 $b=-2a$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{a(x+2)(x-2)}{(x-2)}=4a=8$

에서 $a=2$, $b=-4$이다.

$\therefore\ a-b=2-(-4)=6$

10) 정답 ③



$\angle ABC=\theta$라 하면 $\angle BCD=\frac{\pi}{2}-\theta$

원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$

$\overline{AC}=2R\sin\theta$ …… ㉠

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\overline{BD}}{\cos\theta}=2R$

$\overline{BD}=2R\cos\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4R^2\sin^2\theta+4R^2\cos^2\theta$

$=4R^2=20$

$\therefore\ R=\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는 5π이다.

11) 정답 ⑤

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면

$v_1(t)=\{x_1(t)\}'=\frac{1}{3}t^2+2at+1$,

$v_2(t)=\{x_2(t)\}'=4t-b$

이때 두 점 P, Q의 속도가 $t=k\ (k>0)$에서만 같으므로 방정식 $v_1(t)=v_2(t)$의 양의 실근의

개수는 1이다.
따라서 함수 $f(t)=v_1(t)-v_2(t)$에 대하여,
방정식 $f(t)=0$의 양의 실근의 개수는 1이다.

$$f(t)=v_1(t)-v_2(t)=\frac{1}{3}t^2+2(a-2)t+b+1$$

에서 함수 $f(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고 $f(0)=b+1>0$이므로, 방정식 $f(t)=0$의 양의 실근의 개수가 1이려면 $a-2<0$이면서 방정식 $f(t)=0$이 중근을 가져야 한다.
이때 a는 자연수이므로 $a=1$이고,
이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a-2)^2-\frac{1}{3}(b+1)=0,\ b=2$$

따라서 $f(t)=\frac{1}{3}t^2-2t+3=\frac{1}{3}(t-3)^2$에서
$k=3$이므로, 시각 $t=0$부터 $t=2k$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v_2(t)|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\{-(4t-2)\}dt+\int_{\frac{1}{2}}^6(4t-2)dt$$

$$=\Big[-2t^2+2t\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[2t^2-2t\Big]_{\frac{1}{2}}^6$$

$$=\frac{1}{2}+\left(60+\frac{1}{2}\right)=61$$

12) 정답 ③
$\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 a는 자연수이고

$$a_n=a-\frac{1}{2}(n-1)\text{이다.}$$

한편, S_n의 정의로부터 모든 자연수 n에 대하여
$S_n \le S_{n+1}$, $S_n<S_{n+2}$
이므로 $S_{10}=S_k$에서
$k=9$ 또는 $k=11$
(ⅰ) $k=9$인 경우
$S_{10}=S_9$에서 $a_{10}=0$이므로

$$a-\frac{1}{2}(10-1)=0,\ a=\frac{9}{2}$$

이는 a가 자연수라는 조건에 모순이다.
(ⅱ) $k=11$인 경우
$S_{10}=S_{11}$에서 $a_{11}=0$이므로

$$a-\frac{1}{2}(11-1)=0,\ a=5\text{이다.}$$

그러면

$$S_{10}=5+\frac{9}{2}+4+\frac{7}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

이고

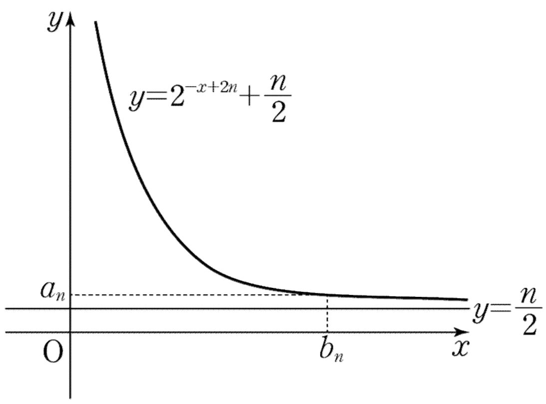
$$S_{21}=\left(5+\frac{9}{2}+4+\cdots+\frac{1}{2}\right)+0$$
$$+\left(\left|-\frac{1}{2}\right|+|-1|+\cdots+|-5|\right)=2S_{10}$$

이므로 $m=21$을 얻는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $k=11$, $m=21$이므로
$k+m=11+21=32$

13) 정답 ②

함수 $y=2^{-x+2n}+\frac{n}{2}$의 그래프는 함수 $y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $\frac{n}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

점근선의 방정식은 $y=\frac{n}{2}$이다.



집합 $\left\{y \,\middle|\, y-\frac{n}{2}=2^{-x+2n},\ x\text{는 실수}\right\}$는 함수 $y=2^{-x+2n}+\frac{n}{2}$의 치역이므로, a_n은 $\frac{n}{2}$보다 큰 최소의 자연수이다.
(ⅰ) $n=2k-1$ (k는 자연수)인 경우

$a_n=k=\frac{n+1}{2}$이므로 방정식

$2^{-x+2n}=a_n-\frac{n}{2}$에서

$2^{-x+2n}=\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}=\frac{1}{2}$, $-x+2n=-1$

$\therefore\ b_n=2n+1$

그러면 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n+1}{\frac{n+1}{2}}\le\frac{15}{4}$ 에서

$16n+8\le 15n+15$, $n\le 7$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 3, 5, 7이다.

(ⅱ) $n=2k$ (k는 자연수)인 경우

$a_n=k+1=\frac{n}{2}+1$이므로 방정식

$2^{-x+2n}=a_n-\frac{n}{2}$ 에서

$2^{-x+2n}=\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}=1$, $-x+2n=0$

$\therefore\ b_n=2n$

그러면 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n}{\frac{n}{2}+1}\le\frac{15}{4}$ 에서

$8n\le\frac{15}{2}n+15$, $n\le 30$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 2, 4, 6, $\cdots$, 30이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수 n의 개수는

$4+15=19$

14) 정답 ④

ㄱ. $f(1)=0$이므로, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 감소하면 이 구간에서 $f(x)>0$이다.

$g(0)=\int_1^0 f(t)dt-\int_1^0 |f(t)|dt$

$=\int_1^0 f(t)dt-\int_1^0 f(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $g(x)=\int_1^x f(t)dt-\int_1^x |f(t)|dt$ 에서

$g'(x)=f(x)-|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\le 0)\\ 0 & (f(x)>0)\end{cases}$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$이다.

그러면 $g(0)=0$, $g(1)=0$이므로 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\ge 0$이다.

또한 $g(1)=0$, $g(2)<0$이므로 구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)<0$인 실수 x가 존재한다.

또한 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-a)(x-1)(x-b)$ $(a<0,\ 1<b<2)$

라 하면, 함수 $f(x)$는 모든 조건을 만족시키지만 $f(0)>0$, $f(2)>0$이므로 $f(0)\times f(2)\le 0$이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\le 0)\\ 0 & (f(x)>0)\end{cases}$이므로

$f(x)>0$인 부분에서 $g'(x)=0$이고 $g(x)$의 값은 일정하다.

만약 $x=1$의 근방에서 $f(x)\le 0$이 성립하지 않는다면, $x=1$의 근방 중에서 $f(x)>0$인 부분에서 항상 $g(x)=g(1)=0$이 성립하게 되므로 $g(k)=0$인 실수 k $(k\ne 1)$이 존재하지 않는다는 조건에 모순이다.

따라서

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$ $(\alpha>1)$

로 놓을 수 있고 이때

$x\le 1$에서 $f(x)\le 0$이므로

$g(-1)$

$=\int_1^{-1} f(t)dt-\int_1^{-1}|f(t)|dt$

$=2\int_1^{-1} f(t)dt=-2\int_{-1}^{1}(t-1)^2(t-\alpha)dt$

$=-2\int_{-1}^{1}(t^3-2t^2+t-\alpha t^2+2\alpha t-\alpha)dt$

$=4\int_0^1\{(2+\alpha)t^2+\alpha\}dt$

$=4\left(\frac{2+\alpha}{3}+\alpha\right)=\frac{16}{3}\alpha+\frac{8}{3}$

이때 $\alpha>1$이므로

$g(-1)>\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15) 정답 ②

(ⅰ) a_4가 짝수인 경우

$a_5=a_4+1$이고 $a_5=7$이므로 $a_4=6$

만약 a_3이 짝수이면 $a_4=a_3+1$에서

$a_3=5$ 이므로 모순이다.
따라서 a_3 은 홀수이므로
$a_4=a_2+3$, 즉 $a_2=3$
그러면 a_2 가 홀수이므로
$a_3=a_1+2$
따라서 $a_1=a$ (a 는 홀수)라 하면
$a_2=3$
$a_3=a+2$
$a_4=6$
$a_5=7$
$a_6=a_4+5=11$
$a_7=a_5+6=13$
$a_8=a_6+7=18$
$a_9=a_8+1=19$
$a_{10}=a_8+9=27$
이므로
$$\sum_{k=1}^{10} a_k=2a+106=120$$
$\therefore$ $a=7$
(ⅱ) a_4 가 홀수인 경우
$a_5=a_3+4$ 이고 $a_5=7$ 이므로 $a_3=3$
이때 a_3 이 홀수이므로
$a_4=a_2+3$
그러면 a_2 는 짝수이므로
$a_3=a_2+1$ 에서
$a_2=2$, $a_4=5$
따라서 $a_1=a$ 라 하면
$a_2=2$
$a_3=3$
$a_4=5$
$a_5=7$
$a_6=a_4+5=10$
$a_7=a_6+1=11$
$a_8=a_6+7=17$
$a_9=a_7+8=19$
$a_{10}=a_8+9=26$
이므로
$$\sum_{k=1}^{10} a_k=a+100=120$$
$\therefore$ $a=20$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 a_1 의 값의 합은
$7+20=27$

16) 정답 3
$2\log_2 x=\log_2(2x+3)$,
$\log_2 x^2=\log_2(2x+3)$,
$x^2=2x+3$, $x^2-2x-3=0$,
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=-1$
로그의 진수 조건에 의하여 $x=3$ 이다.

17) 정답 72
곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로
$f(0)=0$ 이다.
이때 $f'(x)=4x^3-2x$ 이므로
$f(x)=x^4-x^2$
$\therefore$ $f(-3)=81-9=72$

18) 정답 10
$$\sum_{k=1}^{5}(4a_k+b_k)=25,\ \sum_{k=1}^{5}(3a_k-b_k)=3$$
을 각 변끼리 더하면
$$\sum_{k=1}^{5}7a_k=28,\ \text{즉}\ \sum_{k=1}^{5}a_k=4\ \text{이다.}$$
그러면
$$\sum_{k=1}^{5}b_k=\sum_{k=1}^{5}(4a_k+b_k)-4\sum_{k=1}^{5}a_k=25-4\times4=9$$
이므로 $\sum_{k=1}^{5}b_k=9$ 이다.
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}\left(b_k+\frac{1}{5}\right)=\sum_{k=1}^{5}b_k+1=10$$

19) 정답 2
다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.
(ⅰ) $a=0$ 인 경우
$f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$ 이고
$$\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=81,\ \lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=1$$

이므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ⅱ) $a\neq 0$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

이때

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)f(x-a)=9f(a)$

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)f(x-a)=-f(a)$

$f(a)f(0)=-f(a)$

이므로 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되려면

$9f(a)=-f(a)$, 즉 $f(a)=0$

이어야 한다.

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 합은

$-1+3=2$

20) 정답 350

구간 $[a,\ a+1)$에서 최고차항의 계수가 1이고 상수함수가 아닌 두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)h(x)=x(x-2)^2$이므로,

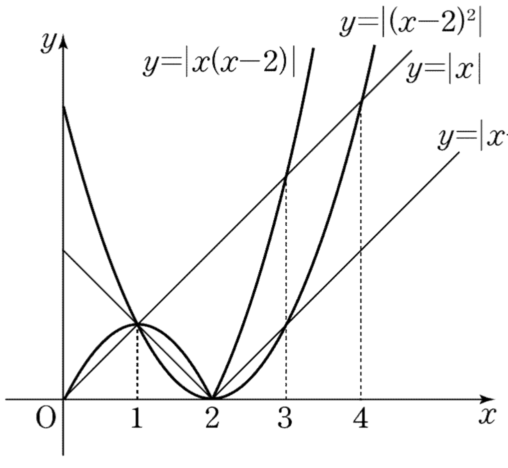
$g(x)=x$ 또는 $g(x)=x-2$ 또는

$g(x)=x(x-2)$ 또는 $g(x)=(x-2)^2$이다.

이때 $f(x)=g(x)$이므로, $f(x)=x$ 또는

$f(x)=x-2$ 또는 $f(x)=x(x-2)$ 또는

$f(x)=(x-2)^2$이다.



$x\geq 0$에서 네 함수 $y=|x|$, $y=|x-2|$, $y=|x(x-2)|$, $y=\left|(x-2)^2\right|$의 그래프는 위의 그림과 같다.

따라서 구간 $(-\infty,\ 1)$에서

$f(x)=(x-2)^2$, $|f(x)|=\left|(x-2)^2\right|$

이고, 구간 $[1,\ 3)$에서

$f(x)=x$, $|f(x)|=|x|$

이고, 구간 $[3,\ \infty)$에서

$f(x)=x(x-2)$, $|f(x)|=|x(x-2)|$

일 때, $f(x)$는 연속함수이고 $\displaystyle\int_0^4|f(x)|dx$의 값이 최대가 된다.

따라서 구하는 $\displaystyle\int_0^4|f(x)|dx$의 최댓값은

$$\int_0^1\left|(x-2)^2\right|dx+\int_1^3|x|dx+\int_3^4|x(x-2)|dx$$

$$=\int_0^1(x-2)^2dx+\int_1^3x\,dx+\int_3^4x(x-2)dx$$

$$=\int_0^1(x^2-4x+4)dx+\int_1^3xdx+\int_3^4(x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_3^4$$

$$=\left(\frac{1}{3}-2+4\right)+\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{64}{3}-16\right)$$

$$=\frac{7}{3}+4+\frac{16}{3}=\frac{35}{3}$$

$\therefore\ 30M=30\times\dfrac{35}{3}=350$

21) 정답 10

조건 (가)에서 진수 조건에 의하여

$3a(6-a)>0$, $a(a-6)<0$

$\therefore\ 0<a<6$

그러면

$3a(6-a)=-3(a-3)^2+27$

이므로 $0<a<6$일 때

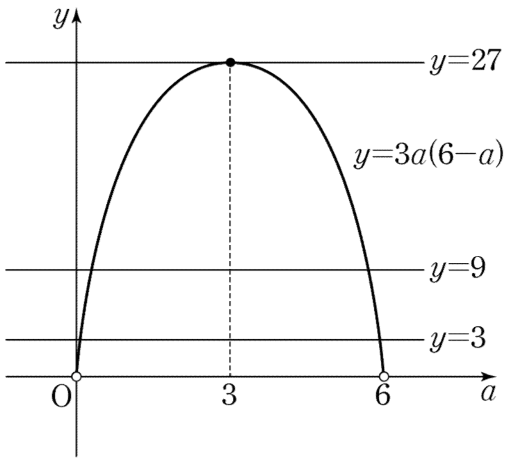
$0<3a(6-a)\leq 27$

이다.

따라서 조건 (가)에 의하여 $3a(6-a)$의 값은

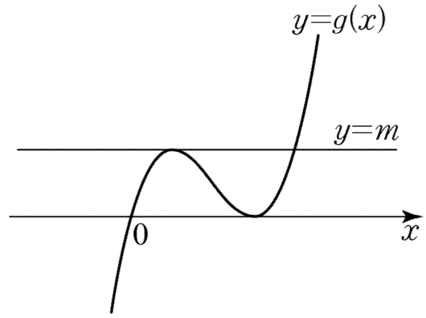
3 또는 9 또는 27

이다.

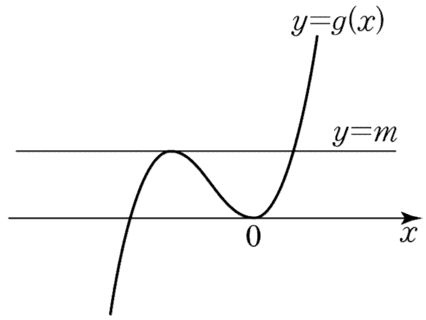


(i) $3a(6-a)=3$ 인 경우
이 경우 가능한 실수 a의 값의 개수는 2이다.
조건 (나)에서 m은 3의 n제곱근이므로
$m^n=3$
따라서 $n=1$이고 $m=3$이어야 한다.
즉, 이 경우 모든 순서쌍 $(a,\ m,\ n)$의 개수는 2이다.
(ii) $3a(6-a)=9$ 인 경우
이 경우 가능한 실수 a의 값의 개수는 2이다.
조건 (나)에서 m은 9의 n제곱근이므로
$m^n=9=3^2$
따라서 $n=1$이고 $m=9$이거나, $n=2$이고 $m=\pm 3$이어야 한다.
즉, 이 경우 모든 순서쌍 $(a,\ m,\ n)$의 개수는
$2\times(1+2)=6$
(iii) $3a(6-a)=27$ 인 경우
이 경우 가능한 실수 a의 값의 개수는 1이다.
조건 (나)에서 m은 27의 n제곱근이므로
$m^n=27=3^3$
따라서 $n=1$이고 $m=27$이거나, $n=3$이고 $m=3$이어야 한다.
즉, 이 경우 모든 순서쌍 $(a,\ m,\ n)$의 개수는 2이다.
(i)~(iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ m,\ n)$의 개수는
$2+6+2=10$

22) 정답 360
$f(x)$는 $f(0)=0$인 삼차함수이므로
$g(x)=f(x)-ax$
도 $g(0)=0$인 삼차함수이고
$g'(x)=f'(x)-a$
이다.
조건 (다)에 의하여 삼차함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.
그런데 함수 $g(x)$의 극값은 모두 집합 $\{g(x)\,|\,g(x)g'(x)=0\}$의 원소이므로, 조건 (가)에 의하여 $g(x)$는 극댓값 m, 극솟값 0을 갖는다.
따라서 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 그림 중 하나와 같다.

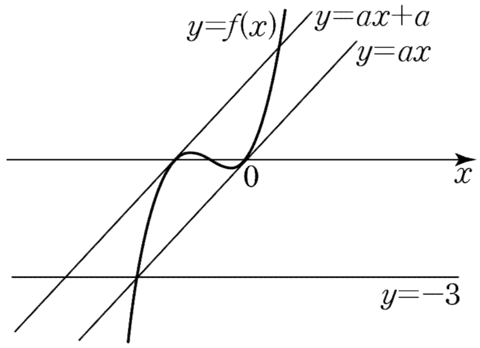


[그림1]



[그림2]

삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같은 경우, $g(x)g'(x)=0$을 만족시키는 x는 모두 0 이상의 수이다.
또한 $x\geq 0$일 때 $g(x)\geq 0$이므로,
$g(x)g'(x)=0$이 성립할 때
$f(x)=g(x)+ax\geq 0$
이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같고, 조건 (다)에 의하여 $m=a$이다.
그러면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림3]

두 직선 $y=ax$, $y=-3$의 교점의 x좌표는 $-\frac{3}{a}$이므로

$f\left(-\frac{3}{a}\right)=-3$, 즉 $g\left(-\frac{3}{a}\right)=0$

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$g(x)=kx^2\left(x+\frac{3}{a}\right)$

으로 놓을 수 있다.

$g'(x)=3kx^2+\frac{6k}{a}x=3kx\left(x+\frac{2}{a}\right)$

에서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{a}$에서 극댓값 a를 가지므로

$g\left(-\frac{2}{a}\right)=a$ …… ㉠

또한 [그림 3]에서 $f\left(-\frac{2}{a}\right)=0$이므로

$g\left(-\frac{2}{a}\right)=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$이고 $g(-1)=2$이므로

$g(-1)=\frac{1}{2}k=2$, $k=4$

따라서 $g(x)=4x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)$이므로 구하는 값은

$f(2a)=f(4)=g(4)+4a=4^3\times\frac{11}{2}+8=360$

[확률과 통계]

23) 정답 ②

a, b, c, c, d, d, d를 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!3!}=420$

24) 정답 ④

(ⅰ) 뽑힌 2명이 모두 여학생일 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

(ⅱ) 뽑힌 2명이 모두 남학생일 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

25) 정답 ①

서로 다른 5개의 과일 중에 2개를 택하여 두 접시 A, B에 각각 하나씩 담는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

이때 나머지 과일 3개를 두 접시 C, D에 담는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times8=160$

26) 정답 ⑤

동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 4이기 위해서는 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4 이상이어야 한다.

(ⅰ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4인 경우

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4일 확률은 $\frac{1}{6}$이고,

동전을 4번 던져서 나온 앞면의 개수가 4일 확률은 ${}_4C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{96}$이다.

(ⅱ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5인 경우

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5일 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 동전을 5번 던져서 나온 앞면의 개수가 4일 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{6} \times \frac{5}{32} = \frac{5}{192}$이다.

(ⅲ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6인 경우

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6일 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 동전을 6번 던져서 나온 앞면의 개수가 4일 확률은 ${}_6\mathrm{C}_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{6} \times \frac{15}{64} = \frac{5}{128}$이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{1}{96} + \frac{5}{192} + \frac{5}{128} = \frac{29}{384}$

27) 정답 ②

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \left(x - \frac{1}{x}\right)^7$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^7 \left(x - \frac{1}{x}\right)^7 \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^7 \left(x + \frac{1}{x}\right)$

이므로 전개식에서 x^5의 계수는 $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^7$의 전개식에서 x^6의 계수와 x^4의 계수의 합과 같다.

$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{n=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_n (x^2)^{7-n} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^n$

이므로 x^6의 계수는 $n=2$일 때 ${}_7\mathrm{C}_2 \cdot (-1)^2 = 21$이고, x^4의 계수는 항이 존재하지 않으므로 0이다.

따라서 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 \left(x - \frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는

$21 + 0 = 21$

28) 정답 ③

A, B가 꺼내어 가진 흰 공의 개수를 각각 a, b라 하자.

흰 공의 개수는 모두 4이므로, $a=b$이려면 순서쌍 (a, b)가 $(1, 1)$ 또는 $(2, 2)$이어야 한다.

(ⅰ) (a, b)가 $(1, 1)$인 경우

A가 흰 공 1개와 검은 공 2개, B가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 뽑아야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$

(ⅱ) (a, b)가 $(2, 2)$인 경우

A가 흰 공 2개와 검은 공 1개, B가 흰 공 2개를 뽑아야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{70}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 A와 B가 꺼내어 가진 흰 공의 개수가 서로 같을 확률은

$\frac{9}{35} + \frac{3}{70} = \frac{3}{10}$

이므로 A와 B가 꺼내어 가진 흰 공의 개수가 서로 다를 확률은

$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

29) 정답 111

조건 (나)에 의하여 $f(3) \geq 4$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 살펴보자.

(ⅰ) $f(3)=4$인 경우

조건 (나)에서

$4 = 4 \times \sqrt{f(4) \times f(5)}$, $f(4) \times f(5) = 1$

이므로 $(f(4), f(5))$는 $(1, 1)$이다.

또한 조건 (가)에서

$f(1) \leq f(2) \leq 4$

이므로 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

(ⅱ) $f(3)=8$인 경우

조건 (나)에서

$8 = 4 \times \sqrt{f(4) \times f(5)}$, $f(4) \times f(5) = 4$

이므로 $(f(4), f(5))$는 $(1, 4)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(4, 1)$이다.

또한 조건 (가)에서

$f(1) \leq f(2) \leq 8$

이므로 함수 f의 개수는

$3\times{}_4\mathrm{H}_2=3\times{}_5\mathrm{C}_2=30$

(ⅲ) $f(3)=16$인 경우

조건 (나)에서

$16=4\times\sqrt{f(4)\times f(5)}$, $f(4)\times f(5)=16$

이므로 $(f(4),\ f(5))$는 $(1,\ 16)$ 또는 $(2,\ 8)$ 또는 $(4,\ 4)$ 또는 $(8,\ 2)$ 또는 $(16,\ 1)$이다.

또한 조건 (가)에서

$f(1)\le f(2)\le 16$

이므로 함수 f의 개수는

$5\times{}_5\mathrm{H}_2=5\times{}_6\mathrm{C}_2=75$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$6+30+75=111$

30) 정답 215

시행을 한 번 하여 얻은 점수가 11점 이상인 사건을 A, 시행을 한 후 주머니에 숫자 3이 적힌 공이 1개만 남아있는 사건을 B라 하자.

처음 주머니에 들어 있는 모든 공에 적혀 있는 숫자의 합은 17이므로, 사건 A는 한 번의 시행에서 뽑은 모든 공에 적혀 있는 숫자의 합이 6이하인 사건과 같다.

처음 뽑은 공에 적혀 있는 숫자에 따라 경우를 나누고, 각 경우에 대하여 사건 A와 사건 $A\cap B$가 일어날 확률을 구해보자.

(ⅰ) 처음 뽑은 공에 적혀 있는 숫자가 1인 경우

1이 적힌 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고, 이후 어떤 공을 뽑아도 되므로 이 경우 사건 A가 일어날 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

또한 이 경우 사건 $A\cap B$가 일어날 확률은, 1이 적힌 공을 뽑은 후 3이 적힌 공을 뽑을 확률과 같으므로

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

(ⅱ) 처음 뽑은 공에 적혀 있는 숫자가 2인 경우

2가 적힌 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{4}{9}$이고, 이후 추가로 뽑는 두 공에 적혀 있는 숫자의 합은 4이하여야 한다. 즉, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$를 뽑을 수 있으므로 이 경우 사건 A가 일어날 확률은

$\dfrac{4}{9}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2+3\times3+3\times2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$

또한 이 경우 사건 $A\cap B$가 일어날 확률은, 추가로 뽑은 두 공이 $(1,3)$일 확률과 같으므로

$\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{21}$

(ⅲ) 처음 뽑은 공에 적혀 있는 숫자가 3인 경우

3이 적힌 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{2}{9}$이고, 이후 추가로 뽑는 세 공에 적혀 있는 숫자의 합은 3이하여야 한다. 따라서 $(1,1,1)$을 뽑아야 하므로 이 경우 사건 A가 일어날 확률은

$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{252}$

또한 이 경우 사건 $A\cap B$가 일어날 확률도 동일하므로 $\dfrac{1}{252}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\dfrac{1}{12}+\dfrac{2}{21}+\dfrac{1}{252}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{252}}$$

$$=\frac{21+24+1}{84+84+1}=\frac{46}{169}$$

$\therefore\ p+q=169+46=215$

[미적분]

23) 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+4n}-n^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^4+4n}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+4n}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+4n}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{\sqrt{n^4+4n}+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+1} = 2$$

24) 정답 ⑤

$x = t - \frac{4}{t}$, $y = 2t + 4\ln t$ 에서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2+\frac{4}{t}}{1+\frac{4}{t^2}} = \frac{2t^2+4t}{t^2+4}$$

따라서 $t=2$ 일 때

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8+8}{4+4} = 2$$

25) 정답 ①

역함수 미분법에 의하여

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

이고 $g\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$g'\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$f'(x) = 4 + 2\cos x \sin x$ 에서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 + 1 = 5$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$g'\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

26) 정답 ②

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{pn}{n+1}$ 에서 $n=2$ 일 때

$a_1 + a_2 = \frac{2p}{3}$ 이고,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{pn}{n+1} = p$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2) = 8$ 에서

$2p - \frac{2p}{3} = 8$, $\frac{4p}{3} = 8$

$\therefore\ p = 6$

27) 정답 ③

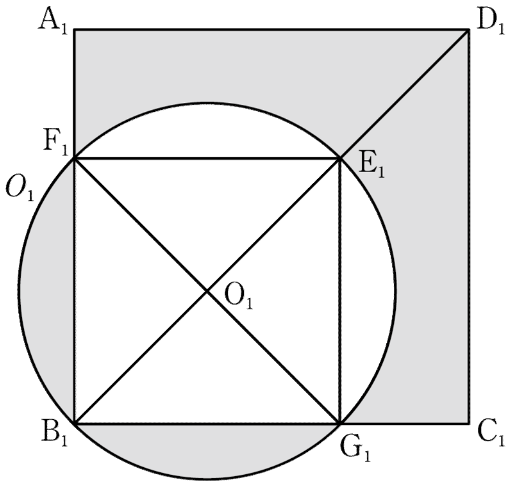
[그림 1]과 같이 그림 R_1 에서 원 O_1 이 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$ 과 만나는 점 중에서 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하자.

선분 $\mathrm{B_1E_1}$ 이 원 O_1 의 지름이므로

$$\angle \mathrm{E_1F_1B_1} = \angle \mathrm{B_1G_1E_1} = \frac{\pi}{2}$$

즉, 사각형 $\mathrm{B_1G_1E_1F_1}$ 은 정사각형이므로

두 삼각형 $\mathrm{B_1E_1F_1}$, $\mathrm{B_1D_1A_1}$ 은 닮음이다.



[그림 1]

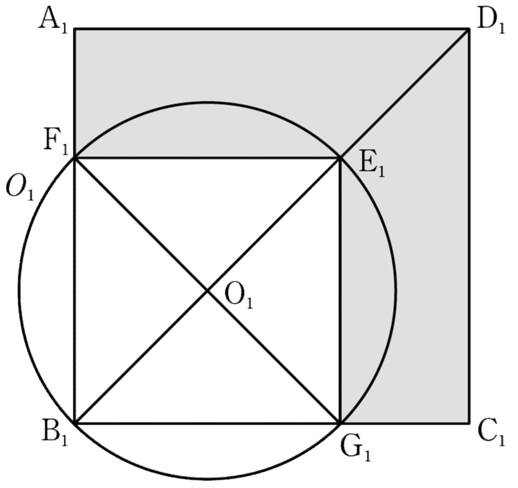
그러면 점 $\mathrm{F_1}$ 은 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 $1:2$ 로 내분하므로 $\overline{\mathrm{B_1F_1}} = 2$ 이다.

이때 원 O_1 의 중심을 $\mathrm{O_1}$ 이라 하면

$\angle \mathrm{B_1O_1F_1} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{O_1B_1}} = \sqrt{2}$

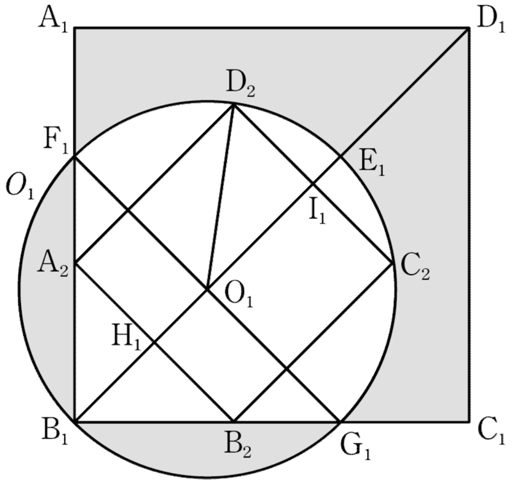
[그림 1]에서 색칠한 부분의 넓이는 [그림 2]에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$S_1 = 3^2 - 2^2 = 5$



[그림 2]

[그림 3]과 같이 그림 R_2에서 선분 $\mathrm{B_1D_1}$이 두 선분 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{I_1}$이라 하자.



[그림 3]

$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=2x$라 하면 $\overline{\mathrm{B_1H_1}}=\overline{\mathrm{A_2H_1}}=x$이므로

$\overline{\mathrm{O_1H_1}}=\sqrt{2}-x$

그러면

$\overline{\mathrm{O_1I_1}}=2x-(\sqrt{2}-x)=3x-\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{O_1I_1D_2}$에서

$\sqrt{2}^2=(3x-\sqrt{2})^2+x^2$,

$2=10x^2-6\sqrt{2}x+2$, $10x^2=6\sqrt{2}x$

$\therefore\ x=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\ \ (\because\ x\neq 0)$

그러면 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=3:\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$이므로 S_n은 첫째항이 5이고 공비가 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2=\dfrac{8}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{1-\frac{8}{25}}=\frac{125}{17}$$

28) 정답 ⑤

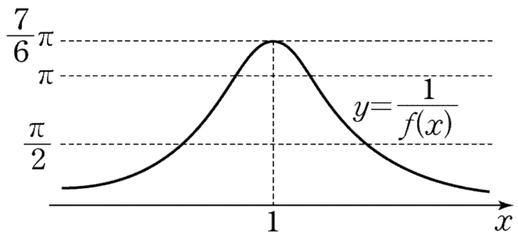
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

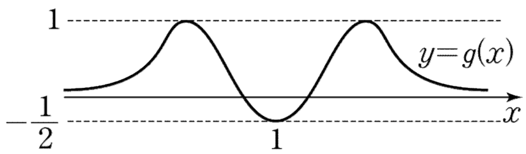
이때 $f(x)$의 최솟값을 m이라 하면, $\dfrac{1}{f(x)}$의 값의 범위는 구간 $\left(0,\ \dfrac{1}{m}\right]$이다.

그러면 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{m}=\dfrac{7}{6}\pi$, 즉 $f(1)=\dfrac{6}{7\pi}$

을 얻고, 두 함수 $y=\dfrac{1}{f(x)}$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.





함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $k\ (k>0)$이라 하면

$f(x)=k(x-1)^2+\dfrac{6}{7\pi}$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

한편 $g(x)=\sin\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}$에서

$g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\cos\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}$이므로

$g'(0)=-\dfrac{f'(0)}{\{f(0)\}^2}\cos\left\{\dfrac{1}{f(0)}\right\}$

그러면 조건 (나)에서 $g'(0)=0$이므로

$f'(0)\cos\left\{\dfrac{1}{f(0)}\right\}=0$

그런데 ㉠에서 $f'(0)\neq 0$이므로

$\cos\left\{\dfrac{1}{f(0)}\right\}=0$ 에서

$\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{\pi}{2},\ f(0)=\dfrac{2}{\pi}$

를 얻는다.

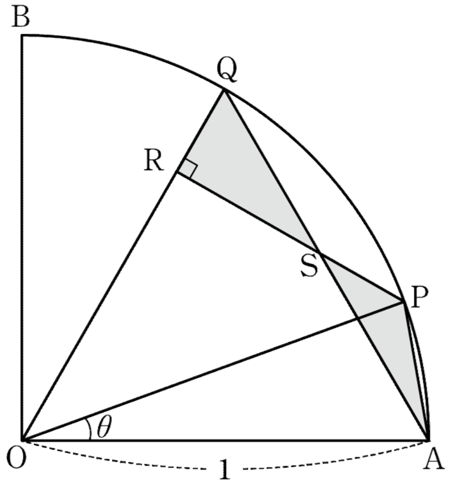
㉠에서 $f(0)=k+\dfrac{6}{7\pi}$ 이므로

$k=\dfrac{8}{7\pi}$

따라서 $f(x)=\dfrac{8}{7\pi}(x-1)^2+\dfrac{6}{7\pi}$ 이므로

$f(3)=\dfrac{32}{7\pi}+\dfrac{6}{7\pi}=\dfrac{38}{7\pi}$

29) 정답 13



삼각형 OAQ 는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OQ}}$ 인 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{AOQ}=3\theta$ 이므로

$\angle\mathrm{OAQ}=\angle\mathrm{OQA}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta,\ \angle\mathrm{QSR}=\dfrac{3}{2}\theta$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=1$ 이므로 직각삼각형 OPR 에서

$\overline{\mathrm{OR}}=\cos2\theta$

그러면 $\overline{\mathrm{QR}}=1-\cos2\theta$이므로 직각삼각형 QRS 에서

$\overline{\mathrm{RS}}=\dfrac{1-\cos2\theta}{\tan\frac{3}{2}\theta}$

$\therefore\ f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{RS}}=\dfrac{(1-\cos2\theta)^2}{2\tan\frac{3}{2}\theta}$

한편 이등변삼각형 OAP 에서

$\overline{\mathrm{AP}}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

이고 $\angle\mathrm{ASP}=\angle\mathrm{QSR}=\dfrac{3}{2}\theta$ 이다.

또한 원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{QAP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{QOP}=\theta$ 이므로

$\angle\mathrm{APS}=\pi-\dfrac{5\theta}{2}$

삼각형 APS 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\angle\mathrm{ASP})}=\dfrac{\overline{\mathrm{PS}}}{\sin(\angle\mathrm{QAP})}$,

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{PS}}}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PS}}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}$

$\therefore\ g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PS}}\times\sin(\angle\mathrm{APS})$

$=\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\frac{5}{2}\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}$

그러면

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos2\theta)}=2$

이므로 구하는 값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos2\theta)^2\sin\frac{3}{2}\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\frac{5}{2}\theta\tan\frac{3}{2}\theta}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\frac{5}{2}\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\times\frac{\frac{3}{2}\theta}{\tan\frac{3}{2}\theta}\right.$$

$$\left.\times\frac{(1-\cos2\theta)^2}{\theta^4}\times\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\times\frac{8}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times2^2\times\frac{8}{5}=\frac{8}{5}$$

$\therefore\ p+q=5+8=13$

30) 정답 191

$g(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}=\dfrac{2\ln|x|}{x}$ 이라 하면

$g'(x)=\dfrac{2(1-\ln|x|)}{x^2}$

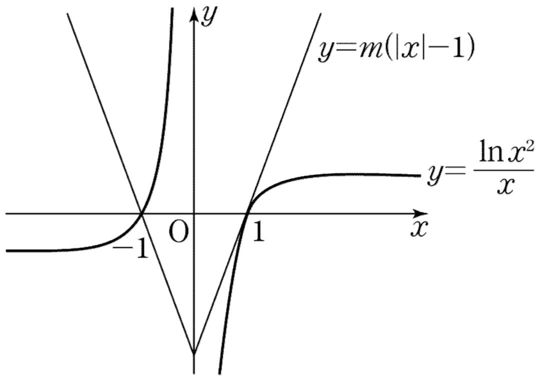
이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-e$	$\cdots$	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

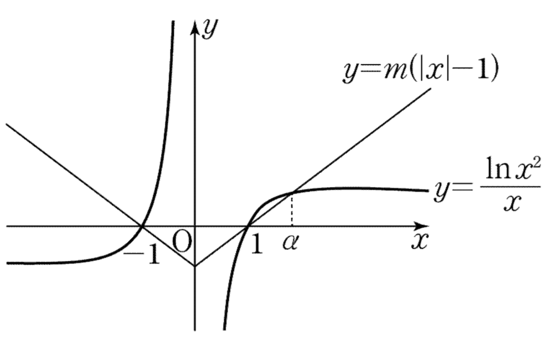
이때 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$이고

$g'(1)=2$이므로, 두 함수 $y=\dfrac{\ln x^2}{x}$,

$y=m(|x|-1)$의 그래프는 $m=2$이면 [그림 1]과 같이 x좌표가 -1, 1인 두 점에서 만나고, $m\neq2$이면 [그림 2]와 같이 x좌표가 -1, 1, α인 세 점에서 만난다. (단, $m<2$이면 $\alpha>1$, $m>2$이면 $\alpha<1$이다.)



[그림 1]



[그림 2]

(ⅰ) $m=2$인 경우

이 경우 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 a와 b가 모두 두 함수 $y=\dfrac{\ln x^2}{x}$, $y=m(|x|-1)$의 그래프의 교점의 x좌표여야 하므로 $a=-1$, $b=1$이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서만 미분가능하지 않으므로, 조건 (나)에서 함수 $f(x^2)$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서만 미분가능하면 된다.

그런데 $x^2\le1$일 때 $f(x^2)=2(x^2-1)$이므로 함수 $f(x^2)$은 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $m\neq2$인 경우

이 경우 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 a와 b가 모두 두 함수 $y=\dfrac{\ln x^2}{x}$, $y=m(|x|-1)$의 그래프의 교점의 x좌표여야 하므로 $a=-1$이고, $b=1$ 또는 $b=\alpha$이다.

$b=1$ 또는 $b=\alpha$일 때, $b>0$이고

$\displaystyle\lim_{x\to b-}f'(x)$와 $\displaystyle\lim_{x\to b+}f'(x)$의 값이 각각 존재하며

$\displaystyle\lim_{x\to b-}f'(x)\neq\lim_{x\to b+}f'(x)$이다.

그러면 $\dfrac{d}{dx}f(x^2)=2xf'(x^2)$ 이므로 함수 $f(x^2)$은 $x=\sqrt{b}$ 에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m=2$, $a=-1$, $b=1$이므로

$100m+10a+b=200-10+1=191$

[기하]

23) 정답 ①

두 벡터 $\vec{x}=(a-2,\,2)$, $\vec{y}=(2a-1,\,3)$이 평행하므로

$(a-2):2=(2a-1):3$, $3a-6=4a-2$

$\therefore\ a=-4$

24) 정답 ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점의 좌표는

$\left(-\sqrt{a^2+12},\,0\right)$, $\left(\sqrt{a^2+12},\,0\right)$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{a^2+12}=12$, $a^2+12=36$

$\therefore\ a^2=24$

25) 정답 ②

$P(a, b)$이라 하면, 포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $by=2(x+a)$이다.

직선 $2x-by+2a=0$과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|2a|}{\sqrt{4+b^2}}=\frac{2a}{\sqrt{b^2+4}}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이때 점 $P(a, b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $b^2=4a$이다. 따라서 ㉠에서

$$\frac{2a}{\sqrt{4a+4}}=\frac{a}{\sqrt{a+1}}=\frac{3}{2},\ 4a^2=9(a+1),$$

$(4a+3)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3,\ b=2\sqrt{3}\ \ (\because\ a>0,\ b>0)$

점 P의 x좌표가 3이므로, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-1$까지의 거리는 4이다.

$\therefore\ \overline{PF}=4$

26) 정답 ⑤

선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 P라 하면

$$\frac{|\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}|}{4}=|\overrightarrow{AP}|=2\sqrt{2}$$

삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면 선분 AM과 선분 BC는 서로 수직이다.

이때 $\overline{CP}=k$, $\overline{CM}=2k$라 하면,

직각삼각형 ACM에서 $\overline{AM}^2=16-4k^2$이고

직각삼각형 APM에서 $\overline{AM}^2=8-k^2$이므로

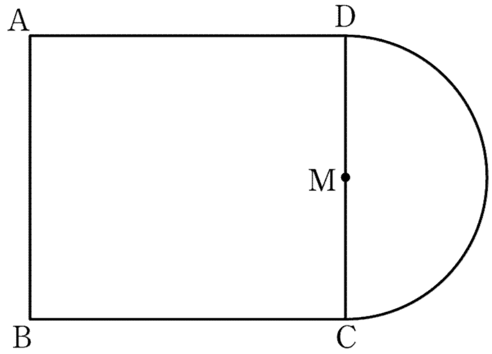
$3k^2=8,\ k=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

그러면 $\overline{AM}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{BC}=4k=\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

27) 정답 ④

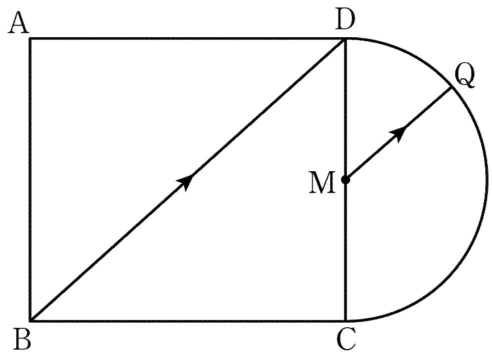


선분 CD의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MP})$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MP}$

이때 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CM}$와 $|\overrightarrow{MP}|$의 값은 점 P의 위치에 관계없이 일정하므로, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CP}$가 최대가 되려면 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{MP}$의 방향이 같아야 한다. 즉, 점 Q의 위치는 다음과 같다.



한편 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{5+4}=3$

이므로 $\angle DBC=\theta$라 하면

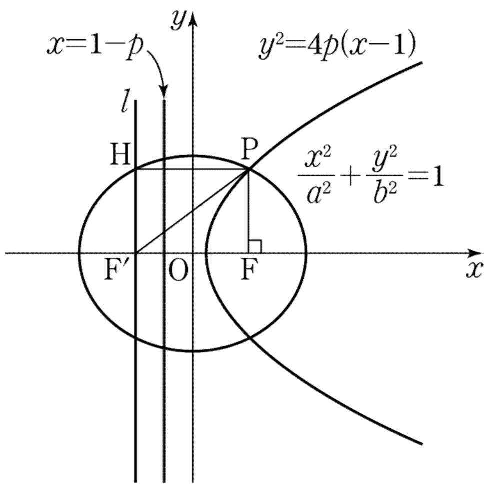
$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 값은

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MQ})$

$=(\sqrt{5})^2+0+\sqrt{5}\times1\times\cos\theta=\frac{20}{3}$

28) 정답 ②



점 F는 포물선 $y^2=4p(x-1)$의 초점이므로

$\mathrm{F}(p+1,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-p-1,\ 0)$

에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PH}}=2p+2$이다.

조건에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PF'}}=18$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=16-2p$

점 P에서 포물선의 준선 $x=1-p$까지의 거리는 $(p+1)-(1-p)=2p$이므로, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=2p$이다.

따라서 직각삼각형 PFF′에서

$(16-2p)^2=(2p+2)^2+(2p)^2$,

$(8-p)^2=(p+1)^2+p^2$,

$p^2+18p-63=(p-3)(p+21)=0$

$\therefore\ p=3$

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6+10=16$이므로

$a=8$이다.

그러면 초점 F의 x좌표가 4이므로

$b=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는

$2b=8\sqrt{3}$

29) 정답 72

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이는

$2\times3=6$이다.

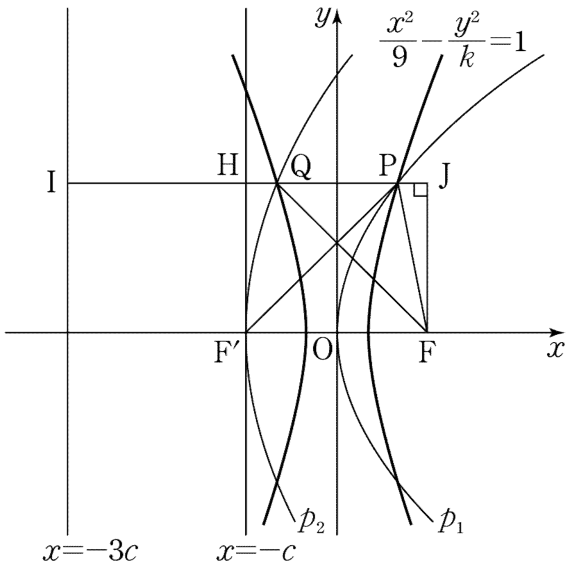
$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=9+k$ …… ㉠

포물선 p_1의 준선의 방정식은 $x=-c$이고,

포물선 p_2의 준선의 방정식은 $x=-3c$이다.

그림과 같이 점 P에서 두 직선 $x=-c$, $x=-3c$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 점 F에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 J라 하자.



두 점 P, Q가 쌍곡선 위의 점이고 선분 PQ가 x축과 평행하므로 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 0이다. 즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}$, $\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PJ}}$

한편 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QI}}-\overline{\mathrm{PH}}$

$=(\overline{\mathrm{QH}}+\overline{\mathrm{HI}})-(\overline{\mathrm{JH}}-\overline{\mathrm{JP}})$

$=\overline{\mathrm{QH}}+\overline{\mathrm{JP}}=2\times\overline{\mathrm{JP}}$

이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{JP}}=3$

그러면 포물선 p_1의 방정식이 $y^2=4cx$이고, 점 P의 x좌표가 $c-3$이므로 점 P의 y좌표는

$y^2=4c(c-3)$, $y=\sqrt{4c(c-3)}$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점이므로

$\frac{(c-3)^2}{9}-\frac{4c(c-3)}{k}=1$

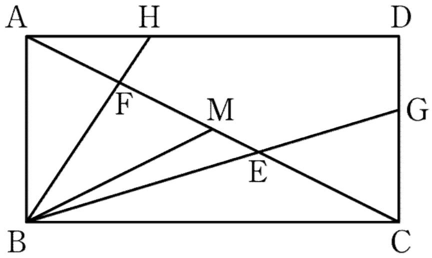
이때 ㉠에서 $k=c^2-9$이므로

$\frac{(c-3)^2}{9}-\frac{4c(c-3)}{c^2-9}=1$, $\frac{(c-3)^2}{9}-\frac{4c}{c+3}=1$,

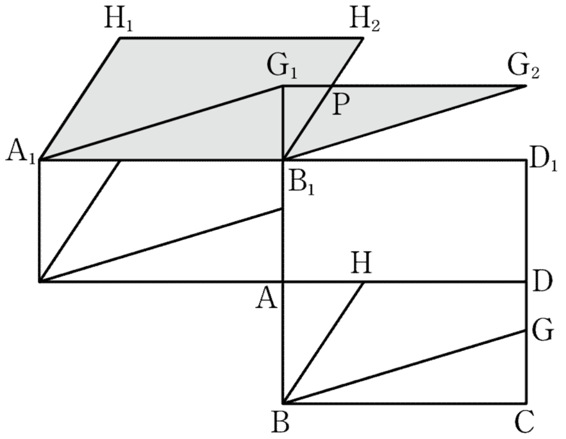
$(c-3)^2(c+3)-36c=9(c+3)$,

$c^3-3c^2-54c=0$, $c(c-9)(c+6)=0$
그러면 $c>0$이므로 $c=9$이다.
$\therefore\ k=9^2-9=72$

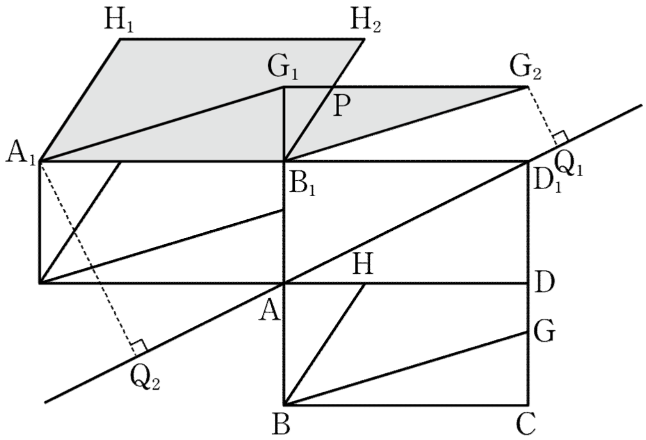
30) 정답 215



선분 MC를 $1:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 E, F라 하고, 직선 BE와 선분 CD의 교점을 G, 직선 BF와 선분 AD의 교점을 H라 하자.
$pq>0$이면 $|p|=3|q|$에서 $p=3q$이므로
$\overrightarrow{BX}=(p+q)\left(\frac{p}{p+q}\overrightarrow{BM}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{BC}\right)$
$=(p+q)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$
$=(p+q)\overrightarrow{BE}$
즉, $pq>0$일 때 점 X는 선분 BG 위를 움직인다.
$pq<0$이면 $|p|=3|q|$에서 $p=-3q$이므로
$\overrightarrow{BX}=(p+q)\left(\frac{p}{p+q}\overrightarrow{BM}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{BC}\right)$
$=(p+q)\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$
$=(p+q)\overrightarrow{BF}$
즉, $pq<0$일 때 점 X는 선분 BH 위를 움직인다.
한편 $\overline{ME}=k$라 하면
$\overline{CE}=3k$, $\overline{AF}=\overline{FM}=2k$
이다.
두 삼각형 AFH와 CFB는 닮음이고, 닮음비는 $2k:6k=1:3$이므로
$\overline{AH}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{10}{3}$ …… ㉠
두 삼각형 AEB와 GEC는 닮음이고, 닮음비는 $5k:3k=5:3$이므로 양수 h에 대하여
$\overline{AB}=5h$, $\overline{GC}=3h$
로 놓을 수 있다.
선분 AD 위를 움직이는 점 Y에 대하여
$\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{BX}$이므로 점 Z가 나타내는 영역은 다음 그림에서 색칠된 부분과 같다.



따라서 R의 넓이는 사각형 $A_1H_1H_2B_1$의 넓이와 사각형 $A_1G_1G_2B_1$의 넓이의 합에서 사각형 $A_1G_1PB_1$의 넓이를 뺀 값이다.
삼각형 G_1B_1P와 삼각형 ABH는 닮음이고, $\overline{G_1B_1}=\overline{GC}$에서 닮음비는
$\overline{AB}:\overline{GC}=5h:3h=5:3$
그러면 ㉠에 의하여 $\overline{G_1P}=2$이므로 영역 R의 넓이는
$10\times5h+10\times3h-\frac{1}{2}\times(2+10)\times3h=62h$
즉, $62h=62$이므로 $h=1$이다.
이제 점 Z에서 직선 AD_1에 내린 수선의 발을 Q라 하면
$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AD_1}\cdot(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QZ})$
$=\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AQ}$
이다.



그림에서 $\overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ 은 Z가 G_2 일 때 최댓값

$M = \overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}_2}$

을 갖고, Z가 A_1 일 때 최솟값

$m = \overrightarrow{\mathrm{AD}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AA}_1}$

을 갖는다.

점 A를 중심으로 하고 두 직선 AD, AB_1 을 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 생각하면

$\overrightarrow{\mathrm{AD}_1} = (10, 5)$, $\overrightarrow{\mathrm{AA}_1} = (-10, 5)$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}_2} = (10, 8)$

이므로

$M = (10,\ 5) \cdot (10,\ 8) = 140$,

$m = (10,\ 5) \cdot (-10,\ 5) = -75$

$\therefore\ M - m = 140 - (-75) = 215$