韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2012. 02. 제 51권, 제 1호, 1-19.

J. KSME(Math. Edu.) pISSN 1225-1380
February. 2012, Vol. 51 No. 1, 1-19.

교과서에 표현된 복소수와 이에 대한 학생들의 이해 실태 분석

박 선 호 (상원고등학교)
표 성 수 (경북대학교)†

Ⅰ. 서 론

현행 수학과 교육과정의 '수와 연산' 영역에서는 단계가 올라감에 따라 수의 영역을 확장하며 학습이 이루어지도록 하고 있다. 자연수부터 실수까지는 구체적인 대상을 관찰하여 추상적으로 정리하고 구성한 대상이라고 할 수 있다. 즉, 개수를 세는 것으로부터 자연수 개념이 나오고, 비율을 구하는 것으로부터 유리수 개념이, 길이를 재는 것으로부터 실수 개념이 나왔다고 할 수 있다. 여기에 상대적인 방향성을 부여하면 음수를 생각할 수 있다. 실수는 기본적으로 크기를 나타내는 수이므로 학생들이 직관적으로 이해하기가 어렵지 않지만 실수에서 복소수로의 확장 과정은 허수단위 i의 도입과 더불어 이루어지는데 이 과정은 직접적 관찰이 아니라 방정식의 풀이라는 전혀 다른 관점에서 만들어졌기 때문에 직관적 이해가 힘든 편이다(정은주, 2004). 즉 실수까지의 수 개념은 기본적으로 양의 은유에 기반해 있었는데 복소수는 그 양의 은유를 포기하고 논리적인 무모순에 근거하여 새롭게 구성된 수 집합이라는 것이다. 따라서 학생들의 인식의 전환이 요구되는 데 이로 인해 학습의 어려움이 생겨난다는 것이다.

복소수를 도입하기 위해서는 먼저 정의가 필요하다. 현행 개정7차 교육과정에 따른 대부분의 교과서는 실수 범위에서 근을 가지지 않는 실수 계수 2차 방정식의 예를 보이면서 제곱해서 -1이 되는 수로서 허수단위 i를 도입하고, 이어서 음수의 제곱근을 설명한 다음 일반적인 $a+bi$ 형태의 복소수를 정의하고 있다. 여기서 고교 교과서의 복소수의 도입과정은 이차방정식의 근으로부터 허수단위인 i를 정의하는 역사적인 수순과 일치하고 있다고 할 수 있다.

이처럼 복소수는 실수 계수 방정식의 근을 구현한다는 역사적 사명을 띠고 생겨났다. 수체계가 복소수까지 확장되면 계수가 실수인 어떤 다항식의 근도 복소수가 아닌 것이 없고, 더 일반적으로 계수가 복소수인 방정식 또한 그 근은 모두 복소수이다. 이것이 '대수학의 기본정리'이다. 이런 점에서 복소수 집합은 더 이상 확장이 되지 않는 가장 큰 범위의 수집합이라 할 수 있다. 따라서 고등학교 과정에서 복소수까지 배운다는 것은 논리적으로 수체계를 완성시킨다는 수학 내적 완결성의 의미가 있다(채수영, 1995). 게다가 대수학이 복소수를 수용한 의의는 복소수가 기본정리에 대한 일반적인 진술을 허용한다는 사실에 있다. 예를 들어 방정식은 그 차수만큼의 해를 갖는다는 법칙과 근과 계수의 관계 등을 간결하게 만들어 준다(이동환, 2010). 그리고 확장된 수 체계는 복소수의 본질적 이차원성으로 인해 일차원적인 실수에 비해 사고의 유연성을 강화하고 응용의 풍부함을 보장해 준다. 이를 Glas(1998)는 복소수의 기하학적 해석의 본질은 수를 이차원 양(방향을 가진 선분) 및 변환으로 해석했다는 데 있다고 하였다(이동환, 2010, 재인용). 그리고 Wessel은 방향이 대수적 연산에 의해 변화될 수 있는 한, 방향은 대수의 대상이며, 양수와 음수로 직선 위의 양의 방향과 음의 방향만을 나타냈으나 복소수로 인해 평면 위의 모든 방향을 표현하고, 이들을 조작할 수 있게 되었다고 하였다(이동환, 2010, 재인용). 이런 이유로 실제로 함수나 기하이론 전개에서도 실수에서 생각하

* 접수일(2011년 7월 4일), 수정일(2011년 11월 9일), 게재확정일(2012년 2월 20일)
* ZDM분류 : D34
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 복소수, 복소수의 개념이해
† 교신저자 : ssoopyo@knu.ac.kr

기보다 복소수 속에서 생각하는 것이 보다 많은 이론을 만들어낼 수 있고, 양자역학에서 물리량의 표현, 상태를 나타내는 파동함수 등 자연계의 현상이나 법칙을 알기 위해서는 복소수를 사용하지 않을 수 없다(이종철, 2003).복소수 개념의 지도에 있어서, 복소수의 역사적 발생을 강조한 지도방법(이진영, 2008; 정은주, 2004)에 대한 연구나 교과서의 복소수 단원에 관한 논리성 분석(양은영·이영하, 2008)에 대한 연구, 복소수의 이해를 위한 수의 구성과정이나 수체계(박제남, 2003; 채수영, 1995; 이태규, 1985)에 대한 연구, 기하적 특성을 강조하는 복소수 지도(최효정, 2008)에 대한 연구, 혹은 복소수를 이용한 평면기하 지도방안(임희선, 2006)에 대한 연구 등은 많이 있지만, 학생들의 복소수 이해 정도에 관한 연구는 거의 없는 실정이다. 즉, 복소수 단원에 대한 교재관에 대한 연구나 지도관에 대한 연구는 있지만 실제로 학생들에게 어떻게 이해되었는가에 대한 연구가 부족하다. 따라서 복소수가 도입되는 상황에서는 복소수 개념에 관한 논의, 그리고 지도방안에 대한 연구가 필요하듯이, 동시에 학생들의 이해 실제에 관한 연구도 이루어져야 한다.

이 연구에서는 복소수의 개념 이해에 대한 연구의 일부분으로서 현행 교과서의 복소수 단원의 내용을 분석하고, 현행 교과서를 기반으로 복소수를 배운 고등학교 학생들이 복소수의 개념을 어떻게 이해하고 있는가를 살펴보는 것을 목적으로 한다. 이러한 연구의 목적에 따라 다음과 같은 연구의 문제를 설정하였다.

첫째, 일반계 고등학생들은 복소수 단원을 학습한 이후, 복소수 개념을 파악하고 있는가?

둘째, 복소수 연산의 특이성을 어떻게 이해하고 있는가?

셋째, 복소수 상등의 의미를 알고 있는가? 결론적으로 학생들은 복소수 집합의 대수적 구조를 이해하고 있는가?

이 연구의 제한점으로 다음을 생각할 수 있다. 첫째, 연구의 대상으로 삼은 것은 대구광역시 소재 T고등학교 1학년 학생 75명으로서 다른 지역 다른 학교에서도 동일한 결과가 나올 것으로 일반화하는 것은 무리가 있다. 둘째, 학생들에게 제시된 검사지의 서술에 대해서만 조사한 것으로 실제 학생들의 사고과정을 파악하는 데에는 제한을 갖는다. 셋째, 학생들은 교과서외의 다른 사교육을 통해서 복소수를 배웠을 수도 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 복소수의 수학적 본질

Kleiner(1998)는 '복소수는 대수학, 해석학, 기하학, 정수론 등 여러 분야의 문제를 해결하는 최적의 환경을 제공한다. 그것은 복소수가 정수나 실수 등의 수학 체계에 결여된 조화와 완비성을 지니고 있기 때문(이동환, 2010, 재인용)'이라고 하였다. 이 장에서는 조화와 완비성을 지니고 있는 복소수의 수학적 가치를 세 가지 측면에서 살펴보고자 한다. 첫째, 복소수가 방정식과 관련하여 풍부한 수학적 도구를 제공한다는 것이다. 둘째는 복소수에 대한 대수적인 정의를 살펴보는 것이다. 이는 복소수를 대수적 완비성을 갖추도록 논리적으로 정의되었다는 것을 살펴보는 것이다. 셋째, 복소수의 기하학적 해석을 통하여 복소수의 수학적 정당성을 확보하고 형식적 복소수에 직관적인 뒷받침을 제공한다는 것이다.

체(field)는 덧셈과 곱셈 연산에 닫혀있고, 교환, 결합, 분배법칙이 성립하며, 각 연산에 대한 역원이 존재한다. 유리수체는 사칙연산에 대하여 닫혀있지만 $x^2-2=0$ 의 근이 유리수 집합내에 없다. 따라서 근을 찾기 위하여 유리수집합 보다 더 큰 집합을 생각하게 되고 무리수를 포함하는 실수의 집합을 만들게 되었다. 마찬가지 논리로 실수체는 $x^2+1=0$ 의 근이 실수 집합 내에 없으므로 i를 도입하게 된 것이다. 연산의 규칙을 준수하면서 방정식을 풀었는데 그 방정식의 근을 실수 집합 내에는 찾을 수 없어서 허수를 도입하였다는 것은, 연산의 규칙이 연산 대상을 넘어선다는 것을 의미한다. 실수에서 적용되었던 연산의 규칙이 복소수에서도 똑같이 적용된다면 실계수 방정식의 근에서 살펴보았던 근의 공식이나 근과 계수의 관계가 복소수에서도 똑같이 적용된다는 것이다. 오히려 복소수가 도입됨으로써 근의 개수에 관한 이론이나 근과 계수의 관계에 대한 이론이 더 간결해지고 더 완전해진다. 방정식의 형태 및 구조와 성질 사이의 관련성이 명확히 밝혀지는 것이다. 이는 형식의 논리 곧 연산의 규칙이 연산의 대상에 우선한다는 전제하

에서 성립하는 것이다. 즉, 연산의 규칙이 연산의 대상보다 본질적이라는 것이다. 거기에 더하여 모든 복소계수의 방정식이 더 이상 다른 수개념을 첨가하지 않아도 복소수 집합내에서 근을 가진다는 사실이 바로 대수학의 기본정리이다.

i의 제곱근은 다음과 같은 방법으로 보여줄 수 있다.

$$(a+bi)^2 = i$$
$$(a^2-b^2)+2abi = i$$

여기서 복소수 상등에 의하여 연립방정식

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$$

을 풀이하면

$$a+bi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ (복호동순)}$$

이 된다.

i의 제곱근은 더 이상 새로운 수를 필요로 하지 않고 복소수 범위 내에서 찾을 수 있다. 실제로 급수전개를 통하여 $e^{i\theta}$를 정의함으로써 기존의 수학적 개념과 모순 없이 복소수의 일반적인 멱승에 대한 정의가 가능해진다.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

이므로

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\cdots = \cos x + i\sin x$$

와 같이 정의되어진다. 급수에 대한 정의로부터 복소수에 대한 삼각함수도 자연스럽게 정의되어 진다. 그리고 복소수에 대한 log 함수의 정의도 자연스럽게 구성되어 진다. 복소수의 log 함수 정의 이후에 복소수의 멱승도 정의될 수 있다. 따라서 실수에서 정의되는 모든 종류의 함수들이 복소수에서도 정의가 가능하며, 뿐만 아니라, 복소수집합에서도 실수 집합에서 다루던 모든 연산과 그 역연산을 가능하게 했다는 점에서 실수 집합이 가지지 못한 대수적 완비성을 지녔다고 말할 수 있게 되었다.

대수학에서 복소수 집합에 대한 접근은 실계수 다항식 환 $R[x]$를 아이디얼 $< x^2+1 >$에 의한 분수체로 표현되어 진다. 즉 복소수체는

$$R[x]/< x^2+1 >= \{ax+b+< x^2+1 > \mid a,b \in R\}$$

로 표현될 수 있다. 이 분수체에서는 $x+< x^2+1 >$ i에 대응하며, $ax+b+< x^2+1 >$는 $b+ai$에 대응한다.

이 분수체에서의 연산은 실다항식의 잉여류계산으로 정의된다. 이 형식은 고등학교과정에서 다항식의 곱셈과 나눗셈으로 포함되어 있다. 분수체에서의 이러한 연산이 잘 정의되었음(well-defined)에 대한 증명은 거의 모든 추상대수학교재에서 찾아볼 수 있다.

이와 같은 복소수의 정의는 논리적인 완결이라고 볼 수 있다. 이 구조에서는 '존재성'-복소수를 수학에 사용하기까지 걸린 기간을 생각해보자-에 대한 의문을 가질 필요가 없다. 뿐만 아니라 기호와 대수적 성질에 대하여 의문을 가질 이유도 없다. 다만 직관에서 다소 떨어진 정의로서 중등학교과정에서 도입하기가 사실상 불가능하다는 것이 문제이다. 대수학에서 복소수는 허수부와 실수부가 x의 계수와 상수항에 대응하여 나타난다. 이는 허수단위 i를 다룰 때, 변수의 기능이 아님을 분명히 함을 의미한다.

복소수 $x+iy$ 를 평면에서 (x,y)라는 점에 대응시킴으로써 복소수는 그 범위를 기하로 확장하였다. 이러한 관점은 복소수를 한 평면의 점으로 취급하는 것인데, 한 평면의 점으로 취급함으로써 복소수는 실제로 직관적인 대상이 되었다고 볼 수 있다. 그리고 한 평면의 점으로 취급됨으로써 거리와 크기가 정해진다.

Klein은 '기하학이란 무엇인가'라는 질문에 이동의 집합에서 불변자를 연구하는 것이라고 하면서, 유클리드 기하학을 닮음 군 아래에서 불변인 기하학적 도형의 성질들에 대한 연구라고 하였다. 이는 유클리드 기하학이 닮음(거리의 비를 보존)군 아래에서 불변인 도형의 성질을 연구하는 것이란 뜻이다. 각의 방향도 보존하는 닮음은 확대회전과 평행이동이다. 그러므로 확대회전과 평행이동이 유클리드 기하학의 가장 기본이 된다. 그런데 복소수의 곱셈, 덧셈이 확대회전과 평행이동을 표현하고 있다(이동환, 2010). 곱셈이 확대회전의 합성이 되고 덧셈이 평행이동의 합성이 된다. 그러므로 하나의 복소수가 복소평면 위의 하나의 점을 나타내는데 그치지 않고 이동, 확대, 회전이라는 변환으로 작용하기 때문에 복소수가 수학내·외적으로 응용의 풍부함을 보장하고 있는 것이다.

2. 정의와 개념 이해에 관하여

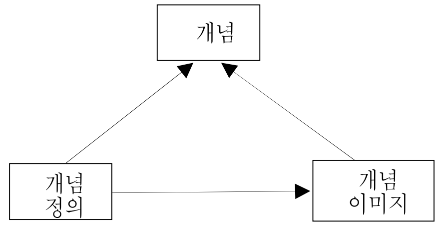
정의는 일반적으로 두 가지 속성을 가지고 있다. 하나는 '명칭'이 가지는 일반적인 속성과 정의를 하고자 하는 대상의 속성이 유사하다는 것이고, 다른 하나는 대상이 가지는 속성이 논리적으로 분명해야 한다는 것이다.

조영미(2001)는 '학교수학에 제시된 정의에 관한 연구'에서 학교수학을 위한 정의로서 갖추어야 할 요소들로서 첫째 수학적 지식, 둘째 학습자의 심리, 셋째, 수학의 역사적 발생을 고려하여야 한다고 주장하였다. 그리고 정의의 기능으로 기술적 기능, 약정기능, 판별기능, 분석기능, 개선기능, 논증기능 등으로 제시하였다. 이중 기술적 기능은 용어의 뜻을 설명하기 위해 내리는 정의를 가리키며, 간단히 뜻풀이를 위한 정의이기 때문에 수학자들의 관심대상이 아니며, 약정기능은 고의성, 임의성, 의식성이라는 특징을 가지는데, 기호나 이름 붙이기 등이 약정기능의 대표적 예로 보았다. '-1 의 제곱근'을 i로 부르는 것 또한 약정 기능의 한 예가 된다.

약정활동이 고의성과 임의성을 특징으로 하지만, 가급적이면 그 의미가 반영되도록 이름이나 기호를 붙이도록 노력한다. 약정기능과 관련하여 이름에 담겨 있는 사고를 가르치는 것을 목표로 하여 그 방안에 대하여 연구할 필요가 있다(조영미, 2001). 조영미의 연구는 정의가 개념획득에 대단히 큰 영향을 준다는 것을 보여준다.

개념획득을 위한 연역적 체계에 의한 형식화된 개념을 도입하는 것은 학습자에게 수학적 개념을 인지양식에 동화되도록 하지 못하고 학습자 밖에 머무르게 하여 오히려 수학적 개념을 형성하는 데 방해가 되거나 지체되도록 하기 쉽다(우정호・최병철, 2007).

Vinner를 중심으로 한 연구자들은 수학 개념을 '정의'와 '이미지'의 두 가지로 구분하였다(Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989; Vinner, 1991). '개념 정의(concept definition)'는 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 말하며, '개념 이미지(concept image)'란 개념의 이름과 관련하여, 혹은 그 개념의 성질과 관련하여 연상되는 다양한 정신적 이미지들을 말한다(박경미, 2007). 고등학교 복소수 단원의 구성을 살펴보면, 용어의 개념정의를 하고 이를 바탕으로 개념에 대한 이해가 이루어지거나 혹은 개념의 정의로부터 개념의 이미지를 떠올리고 그 이미지에서 개념에 대한 이해로 연결되는 과정을 거치고 있다. 이를 도식화하면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 개념정의 및 개념이미지 관계도

올바른 개념에 도달하기 위해서는 위의 도식에서 개념 정의와 개념 이미지 간에 화살표의 방향이 양방향으로 되는 모델링 과정을 거쳐야 올바른 개념 형성을 이룰 수 있다(한길준・우호식, 2001). 수학적 시각화는 이미지를 형성하는 과정이며, 수학적 발견과 이해를 위해 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다(박자윤, 2008). 현행 교과서의 복소수 단원은 형식적 정의를 이용한 많은 개념들이 있음에도 불구하고 직관적 파악을 돕는 시각적 이미지로서 복소평면에 대한 내용이 생략되어 있어서 학생들은 개념정의로부터 그릇된 이미지를 떠올리고 그로인해 오개념을 갖게 된다고 생각된다. 하나의 정의로부터 하나의 표상이 생기는 것이 아니라 여러 개의 표상이 결합된 복합체로서 의식하게(박자윤, 2008)되므로 그릇된 이미지들을 교수학습과정에서 제거할 필요성이 있다. 이러한 과정이 적절히 수행되지 않으면, 개념이 유의미하게 해석되지 않은 채 정의의 암기와 계산방법의 터득에 머물게 된다는 것이다. 따라서 개념 정의와 개념 이미지 사이에 오류가 생기지 않도록 교수학습 상황에서 충분히 유의하여야 할 것이다.

우정호・최병철(2007)은 음수 개념의 발달수준을 일상적 시각적 수준, 상대적인 수 개념을 구문론적으로 다루는 수준, 기호대수의 수준, 공리적 이해 수준, 공리체계의 이해에 기초한 음수의 본질 파악 수준으로 나누고 있다. 개념적 사고의 수준에 도달한 고등학교 학생들에게 복소수 개념의 발달수준을 적용하면, 복소수 개념의 도입 자체가 형식적 논리적 전개를 따르기 때문에 기호대수의 수준을 기본으로 전제하고 있다. 기호대수의 수준이란 산술과 대수의 법칙을 수단으로 하여 조직된 조작의 결과로서 복소수의 존재성과 조작적 특성을 일반화하고 정당화하는 수준이다. 다음 단계인 공리적 이해수

준에서는 복소수 연산의 구조를 보편적인 형식 즉, 실수의 기본성질이 복소수에서도 똑같이 성립함을 이해하는 것이다. 마지막으로 공리체계의 이해에 기초한 본질 파악 수준에 이르게 되면, 대수적 형식체계로서의 수체계의 법칙을 만족하는 대상으로서 복소수를 이해하게 된다는 것이다.

이러한 일련의 연구를 바탕으로, 교육과정에서 복소수에 대한 개념이미지가 어떻게 유도되고 있는지, 복소수의 대수적인 형식체계를 어떻게 구성하는 지를 살펴볼 필요가 있다. 이를 위하여 우리는 교육과정 해설서와 교과서의 내용을 분석한다.

Ⅲ. 교과내용 조사 분석

1. 교육과정 해설서의 내용분석

현재 교육과정에서는 허수단위 i를 도입하고 이를 토대로 음수의 제곱근을 설명한 다음, 실수부와 허수부를 '+' 기호로 연결한 형태로서 복소수를 정의하고 있다. 그리고 지도의 의의에서 일관된 대수적 구조에 대한 파악과 주어진 체계 내에서 (다항)방정식의 해의 존재유무와 밀접한 관계가 있고 이러한 복소수의 성질을 학습하여 수 체계를 전반적으로 이해하게 된다고 제시하고 있다. 이러한 지도의 의의에 대하여 두 가지 내용요소를 담고 있다.

복소수의 뜻을 알고, 기본성질을 이해한다.

이를 위하여, '첫째, 제곱근 개념과 관련하여 허수의 필요성을 인식하고, 허수단위 $i(i^2=-1)$의 뜻을 알게 한다. 둘째, 복소수를 실수와 허수로 분류할 수 있게 한다. 셋째, 켤레복소수를 구할 수 있게 한다.' 하였다. 여기서 허수단위의 뜻이 명확하지 않다. 즉, 제곱해서 '-1'이 되는 모든 수를 'i'로 나타내는 지, 또는 제곱해서 '-1'이 되는 수 중 특정하나를 지칭하는지 분명하지 않다. 복소수의 분류에서 복소수를 $a+bi$의 꼴로 정의할 때, '+'기호가 연산기호가 아니라 단지 구분기호에 불과함에 대한 설명이 배제되어 있다. 그리고 켤레복소수는 허수부의 부호를 바꾼 것으로 정의만으로는 전혀 어려울 일이 없다. 오히려 켤레복소수가 실수 계수 이차 이상의 방정식의 근을 구하는 과정에서 허근을 가질 때 언제나 쌍으로 나타나게 된다는 관찰과 그로인해 켤레복소수의 합과 곱이 실수가 된다는 성질을 보여주는 것이 필요하다.

그리고 복소수의 기본 성질을 이해한다는 요목에서, 복소수 상등에 관한 내용을 제시한다. 두 복소수가 같다는 것은 복소수의 다양한 표기법을 통일함으로써 더 쉽게 접근할 수 있다.

두 번째 내용요소는 다음과 같다.

복소수의 연산에 관한 성질을 이해하고, 이를 이용하여 사칙계산을 할 수 있다.

이를 위하여, '○두 복소수의 덧셈과 곱셈을 할 수 있게 한다. ○복소수의 연산에 관한 성질을 이해할 수 있게 한다. ○두 복소수의 뺄셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.'로 세 가지를 제시한다.

복소수의 덧셈과 곱셈은 i를 문자처럼 생각하여 동류항끼리 더하고 빼는 방법을 취한 다음 $i^2=-1$ 임을 이용하여 계산한다고 하였다. 극형식을 이용한 곱셈 계산은 7차교육과정에서 삭제되어 오로지 대수적인 방법으로만 계산을 유도하고 있다. i를 문자처럼 생각한다고 할 때, 문자는 실수집합에서 다루었던 문자와 같이 해석된다. 그러나 앞의 허수단위를 정의할 때 i는 명백하게 실수가 아닌 새로운 수임을 천명하였으므로 실수가 아니라고 하고서는 실수로 간주하라는 모순된 표현을 사용하고 있다. 복소수 집합에서는 실수 집합에서 성립하는 대수적 구조가 모두 성립한다. 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있고, 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 모두 성립하며, 항등원과 역원이 존재한다. 이로써 복소수가 실수에서와 마찬가지로 체를 이루고 있음을 보여주는데 학생들에게는 이를 직관적으로 이해하게하고 대수적 구조는 지나치게 강조하지 않는다고 되어 있다. 개정7차 교육과정 복소수 분야에서 달라진 부분이다. 이전 교육과정에서는 연산을 먼저 정의하고 그 연산을 관찰하면서 복소수의 기본 성질들을 직관적으로 이해하게 하였는데, 개정7차 교육과정에서는 복소수의 덧셈, 곱셈을 정의하고, 다음으로 복소수의 연산에 관한 기본성질을 설명한 다음 뺄셈과 나눗셈을 설명하고 있다. 많지 않은 내용을 이리저리 순서만 바꾼 것이 아니라 복소수의 대

수적 구조를 보여준 다음 대수적 성질에 의거하여 뺄셈과 나눗셈을 설명하는 식으로 보다 논리적인 모양을 갖추고 있다.

복소수의 뺄셈과 나눗셈은 각각 그 복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 이용하여 계산함을 이해하게 한다. 특히, 복소수의 나눗셈은 켤레복소수의 곱이 실수가 됨을 이용하여 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 분모를 실수로 바꾸어 계산한 것과 같음을 이해하게 하고 있다.

개정 이전의 교육과정에서는 뺄셈의 경우에는 덧셈과 같은 방식으로 계산하게 하였고, 나눗셈의 경우에는 켤레복소수의 곱이 실수임을 이용하여 분자 분모에 켤레복소수를 곱하여 계산하게 하고 있었다. 따라서 교육과정이 개정되면서 복소수 집합의 대수적 구조에 기반하여 보다 논리적인 전개방식을 따르고 있다고 볼 수 있다. 일반적으로 고등학교 1학년 학생들의 수준은 Piaget의 인지발달 수준에서 형식적 조작기에 해당된다고 간주된다. 따라서 수체계의 대수적 구조를 파악하고 그것을 논리적으로 확장하여 보다 엄밀하게 정의해 나가는 것은 바람직하다 하겠다.

2. 교과서의 내용분석

이상의 논의를 바탕으로, '허수단위 i의 정의, $0\cdot i=0$의 제시 여부, 뺄셈과 나눗셈의 정의, $a>0, \sqrt{-a}$의 표현여부, 음수의 제곱근'을 어떻게 제시하고 있는지, 개정7차 교육과정에 따른 인문계고등학교 수학교과서 16종을 분석하였다.

<표 1> 개정 7차 교과서 16종 분석내용

교과서	허수단위 i의 정의	$0\cdot i=0$	뺄셈 나눗셈 정의
(주)고려출판 이만근 외	$i=\sqrt{-1}$	$0\cdot i=0$ 이라 정한다	뺄셈은 덧셈과 같이 나눗셈은 켤레복소수 곱을 이용하여 계산 덧셈 뺄셈 연산성질로 전개순서도 틀림
(주)교학사 김수한 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기로 한다.	정의 없음	뺄셈은 덧셈에 대한 역원을, 나눗셈은 곱셈에 대한 역원을 이용하여 정의
(주)금성출판사 이재학 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기도 한다.	정의 없음	상동
(주)금성출판사 양승갑 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기도 한다.	$0\cdot i=0$ 이라 정한다	상동
더텍스트 윤재한 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타낸다.	상동	상동
더텍스트 김해경 외	$i=\sqrt{-1}$	정의 없음	상동
(주)지학사 신항균 외	$i=\sqrt{-1}$	정의 없음	상동
대한교과서(주) 유희찬 외	$i=\sqrt{-1}$	$0\cdot i=0$ 이라 정한다	곱셈의 역원을 $\frac{1}{a+bi}$ 로 바로 정의
대한교과서(주) 황우형 외	$i=\sqrt{-1}$	상동	뺄셈은 덧셈에 대한 역원을, 나눗셈은 곱셈에 대한 역원을 이용하여 정의
성지출판(주) 계승혁 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기도 한다.	정의 없음	상동
도서출판 지학사 이강섭 외	$i=\sqrt{-1}$	$0\cdot i=0$ 으로 보면	상동
천재교육 김서령 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타낸다.	$0\cdot i=0$ 이라 정하면	상동
천재교육 이준열 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기도 한다.	$a+0\cdot i$는 간단히 a로 나타낸다.	상동
천재문화 최용준 외	상동	정의 없음	상동
(주)중앙교육진흥연구소 최봉대 외	제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 $\sqrt{-1}$ 또는 i로 나타낸다.	$0\cdot i=0$으로 정의한다.	상동
좋은책신사고 황선욱 외	$i=\sqrt{-1}$ 로 나타내기로 한다	$0\cdot i=0$로 놓으면	상동

교과서	$a>0$, $\sqrt{-a}$	음수의 제곱근
(주)고려출판 이만근 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 나타낸다.	$a>0$ $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$ $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$ 이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다
(주)교학사 김수한 외	상동	상동
(주)금성출판사 이재학 외	상동	상동
(주)금성출판사 양승갑 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$	$(\sqrt{a}\,i)^2=-a$
더텍스트 윤재한 외	상동	$a>0$ $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$ $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$ 이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다
더텍스트 김해경 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 나타낸다.	상동
(주)지학사 신항균 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$	상동
대한교과서(주) 유희찬 외	상동	상동
대한교과서(주) 황우형 외	내용 없음	내용 없음
성지출판(주) 계승혁 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 정의한다.	$a>0$ $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$ $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$ 이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다
도서출판 지학사 이강섭 외	정의 없이 사용	양수 a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$로 정의한다.
천재교육 김서령 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 나타내기로 한다.	양수 a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다.
천재교육 이준열 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 정한다.	$a>0$ $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$ $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$ 이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다
천재문화 최용준 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 나타낸다.	설명 없음
(주)중앙교육진흥연구소 최봉대 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$	$a>0$ $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$ $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$ 이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다
좋은책신사고 황선욱 외	$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 로 나타내기로 한다.	상동

위 사항들을 항목별로 분석 정리하면 다음과 같다.

(1) 허수단위에 대하여

모든 교과서가 공통적으로 $x^2=-1$의 근이 실수 범위 내에 없음을 언급하면서 그 근을 정의하기 위하여 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 i로 나타낸다고 서술하고 있다. 그러나 곧 이어서 $\sqrt{-1}$에 대해서 따로 언급을 다 하고 있는데, 그 서술방식에 있어서 다른 부가설명이 없이 '$i=\sqrt{-1}$'이라고 바로 기술한 교과서가 6종이고 '$i=\sqrt{-1}$로 나타내기로 한다'와 유사한 표현이 9종이다. 교과서 1종은 '제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 $\sqrt{-1}$ 또는 i로 나타낸다'고 하여 $\sqrt{-1}$과 i가 표현의 두 가지 방법임을 설명하고 있다. 따라서 첫째, i가 왜 $\sqrt{-1}$인가에 대한 설명이 없고, 둘째, $\sqrt{-1}$과 i라는 두 가지 표기법이 필요한 이유에 대한 설명이 결여되어 있다.

첫 번째 문제에 대해서는 고등학교 1학년 단계에서 이해 못할만한 내용도 아닌 만큼 논리적인 설명이 필요하다. 오히려 설명을 생략하는 것이 이전 이차방정식에서 형성된 근의 개념과 연관지어 '왜 두 근 중 하나만 언급하고 있는지, 왜 두 근 중 $\sqrt{-1}$을 선택한 것인지'에 대해 의문만 불러일으킬 것이다. 즉, $x^2=-1$의 근은 근의 공식에 넣으면 $\pm\sqrt{-1}$의 두 개가 나타나는데 그 중 하나를 i로 정하면서 나머지 한 근에 대한 배제 설명이 전혀 없을 뿐만 아니라 두 근이 있다는 설명조차도 어느 한 교과서에서도 제시되지 않고 있다. 모든 교과서에서는 $i=\sqrt{-1}$이라고 제시만 하고 있다. 중학교에서 배운 내용과 형식을 따라 설명을 한다면, 두 해 중

어느 것을 허수 단위로 정하더라도 아무 문제가 없으므로 보다 기본이 될 것 같은 형태를 택하여 i로 정하였다는 부연 설명이 필요하다.

둘째, $\sqrt{-1}$ 과 i라는 두 가지 표기법이 혼재한 것도 인식상의 혼돈을 불러일으킨다. $x^2=-1$의 두 근 중 하나를 i로 쓰기로 하였다고 하면서 곧바로 $i=\sqrt{-1}$이라고 정의하고 있는데, 본래의 논리적 전개에 따르면 $x^2=-1$의 한 근을 i라고 하였으므로 나머지 한 근은 자연스럽게 $-i$가 된다. 그런데 $i=\sqrt{-1}$라고 새로 정의하여 있는 것은 두 가지 표현을 모두 사용하겠다는 것으로 이해된다. 하지만 왜 두 가지의 표현법이 필요한지에 대해서는 설명이 전혀 없다. 이후 복소수 단원의 논리전개에 있어서도 두 가지 표현법의 혼재는 연산상의 어려움만 야기하고 있다. 근의 공식을 사용할 경우 근호 안에 음수가 들어가는 경우가 생기는데 이때에도 모두 $\sqrt{a}\,i$의 꼴로 고쳐서 사용하게 하면 아무런 문제가 생기지 않으므로 불필요한 정의라 생각된다.

(2) $0\cdot i=0$에 대하여

9종의 교과서에서 약간씩 표현의 차이는 있지만 $0\cdot i=0$이라 정의하고 있다. 정의는 약속이므로 학생들의 입장에서는 복소수 단원이 마구 이해 못할 약속을 쏟아내고 있는 것으로 여겨질 것이고, 결국은 이전의 지식에 비추어 i도 일종의 숫자이고 0을 곱했으므로 0이 되었다는 식으로 이해하고 넘어갈 것이다. 6종의 교과서는 아예 정의 없이 그냥 암묵적으로 성립하는 것으로 보고 설명조차 되어있지 않다. 결국 학생들로서는 실수의 곱셈 연산에서 0을 곱하는 것으로 생각하며 위 정의를 받아들일 것이다. 한 교과서는 '$a+0\cdot i$는 간단히 a로 나타낸다'고 하고 있는데 이도 역시 $0\cdot i$가 왜 없어졌는지에 대한 설명이 없다.

$0\cdot i$는 허수부이고 0은 실수이다. 6차 교육과정에서 7차 교육과정으로 넘어오면서 복소수 평면에 대한 내용이 삭제되었는데 이로인해 복소수 자체에 대한 개념형성에 장애가 생겼고 실수와 허수의 관계라는 부분은 설명할 수 없는 부분이 되어버린 것이다. 그래서 $0\cdot i=0$이라 정하면서 앞으로의 내용전개에서 복소수에 대한 개념을 이해시키기 보다는 복소수 계산을 원활하게 하는 방법을 제시하는 쪽으로 방향을 틀었다고 생각 된다. 계산방법만 제시할 것이 아니라 실수는 복소수의 부분집합과 동형의 구조를 갖고 있음을 분명히 해야 할 필요가 있다.

(3) 뺄셈과 나눗셈

교육과정 해설서에서 뺄셈과 나눗셈은 덧셈과 곱셈의 역원을 이용하여 계산한다고 되어있다. 이에 대하여 14종의 교과서는 교육과정에 따라서 잘 설명하고 있다. 그런데, 한 교과서는 개정 이전의 방식과 같이 덧셈과 뺄셈을 같이 설명하고 이어서 연산의 성질을 설명하는 식으로 덧셈과 뺄셈을 함께 설명하는 것은 중3에서 배운 무리식의 계산에서 비슷한 모양을 가져온 것으로 보인다. 하지만 복소수의 뺄셈은 명백히 다른 문제이다.

$$\begin{aligned}-(c+di)&=(-1)\cdot(c+di)\\&=(-1+0i)\cdot(c+di)\end{aligned}$$

이므로 이미 곱셈이 내포되어 있다. 따라서 뺄셈을 덧셈에 붙여서 설명하는 것은 논리적이지 못하다.

또 한 교과서는 $a+bi$의 곱셈에 대한 역원을 $\dfrac{1}{a+bi}$로 바로 정의하고 있는데, 분수표현에 대한 정의가 앞의 어디에도 없으므로 엄밀한 서술이라고 보기 어렵다. 남는 과정은 분모를 실수화하는 것인데 이는 중3과정에서 분모의 유리화에서 이미 경험하였으므로 복소수로의 수체계의 확장을 경험하는 것이 아니라 실수에서와 똑같이 계산 한다는 생각을 가지게 될 것이다.

(4) 음수의 제곱근

음수의 제곱근은 11종 교과서에서 다음과 같은 방법으로 설명하고 있다.

'$a>0$

$(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$

$(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다'

먼저 이 설명의 문제점은 제곱해서 $-a$가 되는 수를 연역적으로 찾아낸 것이 아니라 '어떤 수를 제곱했더니 $-a$가 되었다. 그러니 그 수가 $-a$의 제곱근이다'라는 식으로 역방향으로 설명하고 있다는 것이다. 이런 논리의 문제점은 금방 찾을 수 있다. 첫째는 어떻게 그 수를 찾았냐는 것이고, 둘째는 그 수들 외에 또 근이 있는지 없는지 어떻게 정할 수 있느냐는 것이다. 복소수가 원래 실계수 방정식의 근의 문제를 풀다가 나온 것임을 생각해

보더라도 심한 논리적 비약이 있음을 알 수 있다. 그리고 필연적으로 실수의 제곱근은 복소수 범위에서도 두 개가 있다는 논리를 은연중에 암시하고 있다. 보다 엄밀하고 논리적인 전개식을 따라 다음과 같이 설명할 수 있다.

$$a>0,\quad x^2=-a$$
$$\frac{x^2}{a}=-1$$
$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2=i^2$$
$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\pm i$$
$$x=\pm\sqrt{a}\,i$$

(유윤재 출간중)

위 전개식이 의미하는 바는 $-a$의 제곱근을 구한다는 것 뿐 아니라, $\sqrt{-a}$ 와 같은 표현이 없어도 얼마든지 $\sqrt{a}\,i$와 같은 제곱근을 구할 수 있다는 것도 있다. $\sqrt{-2}$ 와 같이 근호 안에 음수를 넣는 표현은 논리적으로도 자연스럽지 않을 뿐 아니라 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$ 와 같은 복소수의 곱셈 연산을 따로 정의해야 하는 등 많은 불편을 야기한다. 음수의 제곱근을 중학교 때 배운 제곱근 지식을 확장하여 $x^2=-2$의 해는 $\pm\sqrt{-2}$ 라고 표현하고 있으나 보는 바와 같이 실수에서 성립하던 성질이 복소수에서는 성립하지 않으므로 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ 와 같은 표현이 문제가 있다는 것을 알 수 있다. 이미 $\sqrt{-1}=i$ 라고 정의하였으므로 이를 이용하여 $\sqrt{-2}$ 는 $\sqrt{2}\,i$로 $\sqrt{-3}$ 은 $\sqrt{3}\,i$로 표현하는 것이 음수와 관련된 연산을 더 정확하게 하는 길이다.

그 외, 두 교과서는 '양수 a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$로 정의한다.'고 서술하여 관련 설명 없이 정의로서 대체하고 있다. 한 교과서는 $(\sqrt{a}\,i)^2=-a$만 기술되어 있어 한 근만을 보여주는데 그치고 있다. 그리고 음수 제곱근에 대하여 아무 설명이 없는 교과서도 2종이 있다.

$\sqrt{-a}$ 표현에 대해서 14종의 교과서는 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$라고 정의하여 사용하고 있고, 한 종의 교과서는 음수의 제곱근 내용 자체가 빠지면서 함께 서술에서 제외되어 있다. 한 종의 교과서는 '양수 a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$로 정의한다.'고 서술하면서 아예 $\sqrt{-a}$ 에 대한 언급이 없는데 이것이 오히려 논리적으로 될 뻔 하였다. 그러나 바로 아래에 아무런 설명 없이 $\sqrt{-a}$ 와 같은 표현을 아무 제한 없이 사용하고 있다.

수학자들에게서 기호 $\sqrt[n]{a}$ 는 a의 주n제곱근 (principal nth root)을 의미하고, 이는 복소평면에 표시할 때, 가장 작은 편각을 가지는 복소수를 나타낸다. 따라서 a가 양의 실수이면, $\sqrt[n]{a}$ 는 양의 실수가 되며, $i=\sqrt{-1}$ 로 표시 된다.

(5) i를 문자로 간주하는 문제

복소수의 연산에서 'i를 문자처럼 생각하여'라는 부분에서 학생들은 실수에서 학습하였던 문자를 포함한 식의 계산을 떠올릴 것이고, 동류항을 찾아 계산하는 형식적 계산 알고리즘의 조작에 몰두하게 될 것이다. 그러므로 학생들로서는 복소수를 실수와 다른 새로운 수로서의 경험을 하고 있는 것이 아니라 단지 $i^2=-1$이라는 특이성만 가지고 있는 실수의 계산으로 이해될 것이다.

(6) 너무 많은 정의

복소수 단원은 정의가 남발되고 있다. 복소수의 도입을 위해 허수단위 i가 정의되어야 함은 당연하다. 그러나 계속되어 나오는 정의들은 복소수 개념을 논리적으로 구성하는 것을 방해하고 있을 뿐 아니라 그 개념들이 과연 정의에 의해 해결될 것인지에 대한 문제도 제기된다.

$$i^2=-1$$
$$\sqrt{-1}=i$$
$$0\cdot i=0$$
$$a+0i=a$$
$$0+bi=bi$$
$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$
$$-a\text{의 제곱근은 }\pm\sqrt{a}\,i$$

이렇게 많은 정의가 필요한 것은 복소수가 실수부와 허수부라는 두 요소가 쌍으로 정의된 것인데 그 부분을

도외시 하면서 기존 실수의 구조에 무리하게 중첩시키면서 형식불역의 차원에서 계산 방법만 알려주려고 하기 때문이 아닌가 생각된다.

3. 내용에 대한 논의

(1) 허수라는 명칭

여기서 허수라는 이름에 대하여 잠시 살펴보자. 데카르트(1596~1650)는 좌표평면은 창안하여 그때까지 수로 취급되지 않던 음수를 수직선을 이용하여 나타냄으로써 음수가 눈에 보이도록 하였다. 그러나 수직선 위에 나타낼 수 없었던 음수의 제곱근에 대하여 데카르트는 허수라는 이름을 붙였다. '가공의 수'라는 뜻이다. 그러나 이 이름은 억지로 만들어 낸 비정상적인 '가짜 수'라는 인상을 주기 때문에 좋은 작명이라 하기 어렵다. 기실 따지고 보면 모든 수는 고도로 추상화 된 상상의 산물이 아닌가? 1이라는 수 역시 우리들 인간의 상상의 산물이지 구체적으로 존재하는 그 무엇은 아니지 않는가? 수의 존재성이라는 관점에서 볼 때, 허수는 존재하지 않는 수라는 말은 전혀 의미가 없다고 할 수 있다. 이에 대해 허수를 '가상의 수(fanlied number) 또는 상상의 수(imaginary number)'로 형식불역의 차원에서 조작방법만을 제시한다면 그 필요성조차 잘 이해하지 못할 것이기 때문에 복소수의 개념이 역사 속에서 발달, 정착해가는 과정을 보여주며 교사들이 그 과정을 재조직하여 학생들이 경험하게 해주는 것이 중요하다(박재근, 2007). 또 Euler(1707~1783)가 1770년에 출판한 대수학에서 표명한 허수에 대한 견해는 $\sqrt{-1}$이나 $\sqrt{-2}$와 같은 수는 존재하지 않는 수라고 명백하게 단언하였지만 Euler 자신이 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$라고 쓰고 있으면서도 없다고 하는 논리는 비논리적이라고 할 수 있다고 비판하였다(이태규, 1985). 따라서 허수의 지도에 있어서 '상상의 수'라는 식의 설명은 자칫 허수를 학생들의 의식의 바깥으로 밀어내고 중요성을 간과하게 만드는 결과를 초래할 수 있으므로 삼가 하여야 할 것이다.

(2) 구분기호와 연산기호의 문제

두 실수 a, b를 플러스 기호로 연결하여 $a+bi(a,b\text{는실수})$ 형태의 수를 정의하고 이를 복소수라 정의한다. 그러므로 복소수는 제곱하면 0보다 커지는 실수 부분과 제곱하면 0보다 작아지는 순허수 부분의 두 요소로 이루어져있다. 여기서 두 요소의 연결에 굳이 '+'를 써야만 하는 것은 아니다. 이점에 주목하여 $a+bi(a,b\text{는실수})$의 구분기호 '+'가 연산의 '+'와 다른 단순 구분기호 임을 지도상의 유의점에 분명히 명시한 교과서(천재교육 이준열 외)도 있으나 대부분의 교과서는 이 점에 대한 설명이 없다. 학생들로서는 이런 점에 대한 인식 없이 복소수의 사칙연산만 열심히 익히게 되는 형식적 고착에 빠질 우려가 있다. 이 문제점에 대해서는 복소수를 순서쌍으로 도입하고 차후 i를 사용하여 $a+bi$로 표현하는 것이 바람직한 지도 방법이라는 연구가 있다(이종철, 2003). 노르웨이의 베셀(Caspar Wessel), 프랑스의 아르강(Jean-Robert Argand) 등에 의해 개발된 복소평면 모델은 복소수를 시각화하는 중요한 아이디어였으며 어떤 의미에서 복소평면이야말로 복소수의 본질이라 할 수 있다. 복소평면에 대한 부분이 교육과정에서 빠짐으로서 복소수 이해에 있어서 심각한 인식론적 장애를 야기하고 있다.

(3) 단원의 계통

복소수 관련 단원의 계통은 중3 수학에서 제곱근과 실수 및 근호를 포함한 식의 계산에서 복소수로 연결 되었고 차후 이차방정식의 근과 판별식으로 연결 된다. 이는 복소수의 태생이 방정식의 풀이에 있기 때문에 근의 존재 문제에 밀접히 연관되어 있다는 것을 잘 보여주고 있다. 그러나 곧이어 나오는 켤레복소수에 관한 설명에서는 방정식 문제와의 연관이 언급조차 되지 않고 있다. 학생들의 입장에서 보면 켤레복소수를 왜 따로 명명하여 배워야하는지에 대한 이해를 전혀 할 수 없을 것이다. 몇몇 연구에서도 켤레복소수는 복소수의 나눗셈을 대수적인 연산조작을 통하여 해결하는데 필요하다(최효정, 2008; 이종철, 2003)는 정도로 나눗셈 계산을 위하여 도입되는 것으로 제시되고 있다. 반면에 켤레복소수의 방정식풀이 관련성에 대해서 탐구하고, 공액좌표계를 이용하여 대수식 풀이를 기하학적으로 구현한 연구도 있다(이태규, 1985).

(4) 대수적 구조

복소수 단원은 크게 '수와 식' 단원에서 실수에 이어 나오는 것으로 실수 단원에서는 실수의 연산에 대한 성

질과 항등원 역원을 미리 공부하였다. 복소수의 사칙연산도 실수와 같은 연산법칙을 따른다는 것을 이해시키고 있다. 즉, '복소수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 이해하게 한다. 또한, 항등원과 역원이 존재함을 알게 하여, 실수의 집합과 똑같은 대수적 구조가 있음을 직관적으로 이해하게 한다. 그러나 수 체계의 대수적 구조는 지나치게 강조하지 않는다(교육부, 2007)'고 되어 있다. 그러나 위에서 살펴보았듯이 실제 교과서의 서술에서는 뺄셈과 나눗셈의 서술을 역원으로 설명하고 있지 않는 교과서도 발견되었다. 대수적 구조를 지나치게 강조하지는 않는다하여도 그것이 대수적 구조를 경시해도 된다는 말은 아니다. 더구나 복소수 연산을 잘한다는 것을 근거로 복소수의 대수적 구조를 이해했다고 간주하는 것은 사실 이해되지 않았으나 이해된 것으로 과장되게 해석하는 '조르단 효과(Jourdain effect)'에 해당될 것이다. 대수영역은 교과내용에서 비중 있게 다루어지는 부분이며, 고등학교 1학년에서 복소수 단원의 학습은 새로운 수의 계산 방법을 익히는데서 끝나서는 안되고 대수적 구조의 보존이라는 수체계의 확장에 따른 새로운 목표를 달성하고자 하는 것으로 생각할 수 있다. 복소수 이전 실수 단원에서 실수의 연산에 대한 법칙과 그 성질 외에도 여러 가지 엄격한 증명을 다루고 있으므로 복소수의 성질도 상당한 수준에서 엄격한 서술을 할 수 있으므로 수학적 개념과 원리 법칙을 바탕으로 전체적인 구조를 파악할 수 있도록 가르쳐야 한다(김혜경, 2006).

이상의 고찰에서 현행교육과정과 교과서에서는 복소수개념에 대한 여러 가지 문제점을 내포하고 있음을 알았다. 다음 절에서는 이러한 교과서들을 바탕으로 교육받은 학생들의 이해실태를 알아보고자 한다.

IV. 학생 실태 조사 분석

1. 연구방법 및 연구대상

본 연구의 목적인 일반계 고등학교 학생들의 복소수 개념 이해 실태를 분석하기 위하여 복소수 단원을 학습한 고등학교 1학년 학생들을 연구 대상으로 삼았다. 대구광역시 달서구에 소재한 T고등학교 상위 수준학생 1학년 75명을 선정하였다. 상위 수준의 학생들은 이해의 근거에 대한 서술에 있어서 서술 자체에 대한 곤란이 적다고 판단되며, 대부분 수업의 내용을 이해하고, 계산하는데 능숙하므로 연구의 목적에 적절하다고 생각된다. T고등학교가 사용하고 있는 교과서는 수학(최봉대 외, 2008)이다. 이 교과서는 허수단위의 도입에 대하여 '제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 $\sqrt{-1}$ 또는 i로 나타낸다'고 서술되어 있고 '$0 \cdot i = 0$으로 정의'하고 있으며 뺄셈과 나눗셈은 역원을 이용하여 정의하고 있다. 그리고 '$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$'라고 기술되어 있고 별다른 설명은 없는데 이는 등호가 정의의 기능으로 쓰이고 있는 것으로 보이므로 역시 정의하고 있는 것으로 보아야 할 것이다. 그리고 마지막으로 음수의 제곱근의 정의는 '$(\sqrt{2}\, i)^2 = -2$이고 $(-\sqrt{2}\, i)^2 = -2$이므로 -2의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}\, i$이다'라고 보여준 다음 '일반적으로 양수a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\, i$이다'라는 서술방식을 취하고 있다.

그리고 T고등학교의 학부모 대부분은 중산층이라고 할 수 있다.

2. 연구도구

앞절의 교과서분석은, 허수단위, 복소수의 곱셈의 이해, 실수와 복소수의 구조의 차이, 복소수의 상등에 대해서 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 조사할 필요가 있음을 시사한다.

본 연구에서는 <그림 2>와 같은 4개의 명제들을 연구 도구로 활용하여, 학생들에게 각 명제에 대해 참·거짓을 밝히고 답변에 대한 근거를 제시하게 함으로써 자신들의 생각을 서술하게 하였다. 이들 명제들은 복소수개념에 대한 주요 내용일 뿐만 아니라 교육과정해설서에서 '영역별 내용'을 참조하여 작성하였다. '명제 1'은 허수단위의 개념에 초점을 둔 명제이며 모든 교과서에서 복소수의 도입에 처음으로 설정하고 있는 명제이다. 교과서에서 'i'를 제곱해서 -1이 되는 수로 정의한다. 실제로 학생들은 제곱해서 -1이 되는 수는 2가지가 있음을 알고 있다. 이로 인해서 생기는 학생들의 이해에 관한 실태를 조사하기 위하여 선정하였다. '명제 2'는 근호 안

이 음수인 경우의 계산을 학생들이 어떻게 하고 있는지 알아보기 위한 것이다. 이 명제는 i의 이해로부터 적용으로 볼 수 있다. 학생들이 i를 어떻게 적용하는지를 드러낼 것으로 기대하였다. 뿐만 아니라 복소수의 곱셈 연산에 대한 개념을 요구한다. '명제 3'은 실수와 복소수의 관계를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지에 관련된 문제이다. 이 명제는 실수집합이 복소수 집합의 부분집합임을 드러낸다. 특히 이 명제는 $3+0\cdot a$와 같은 실수에서의 연산과의 차이를 드러내는지 그렇지 않은 지를 조사하고자 하였다. '명제 4'는 복소수의 상등에 관련된 문제로 복소수의 표현의 통일에 대한 이해를 묻는 문제이다. 이 명제를 통하여, 허수부와 실수부를 파악하여 문제를 풀이하는지, 아니면 덧셈과 곱셈의 교환법칙을 통하여 문제를 풀이하는지 알고자 하였다. 복소수의 상등을 잘 이해한 학생이라면 복소수의 상등에 의해서 같다는 대답을 기대하였다.

◎ 다음 관계식이 참인지 거짓인지 판단하고 그 이유를 글이나 식으로 적어보세요.

1. $i=-\sqrt{-1}$
2. $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$
3. $3+0\cdot i=3$
4. $2+3\cdot i=i\cdot 3+2$

<그림 2> 학생들에게 제시된 복소수 문제

자료 수집은 복소수가 관련된 '수와 연산' 단원의 학습이 종료된 이 후 실시되었다. 2011년 4월 첫째주에 연구 도구를 배부하고, 그것을 회수하였다. 또한, 학생들이 자신의 생각에 대한 서술을 하도록 충분한 시간을 주었다. T고등학교에서는 야간 자율학습 시간에 상위수준 학생들이 따로 모여서 자습을 하므로 이 시간을 활용하여 심화반의 학생들에게 문제를 제시하였다. 제시된 문제는 연구용으로 사용되는 것임을 미리 밝혔고, '본 정보들은 연구목적 이외에는 이용되지 않습니다'라는 문구를 검사지 상단에도 기입해두었다.

3. 결과분석

본 연구에서는 문제에 대한 참 또는 거짓을 먼저 밝히도록 했으므로 무응답의 사례수와 응답의 경우 오답과 정답의 사례수를 먼저 조사하였다. 다음으로 학생들이 제시한 응답의 이유를 기반으로 그들이 복소수의 개념을 어떻게 이해하고 있는지 살펴보았다. 다음으로 학생들의 서술을 바탕으로 그들의 이해 혹은 잘못된 이해의 종류를 분류하였다.

(1) 응답빈도

학생들의 응답을 무응답, 오답, 정답으로 분류하여 빈도와 비율을 나타내면 <표 2>와 같다. 무응답은 제시된 명제에 아무런 반응을 나타내지 않은 경우이며, 대부분의 학생들은 제시된 명제에 응답을 하였으며, 이들이 제시한 이유 서술의 유형에 대해서는 다음 절에서 살펴보고자 한다.

<표 2> 응답의 빈도와 비율(n=75)

응답 구분	명제 1		명제 2		명제 3		명제 4	
	빈도(명)	비율(%)	빈도(명)	비율(%)	빈도(명)	비율(%)	빈도(명)	비율(%)
무응답	0	0	0	0	0	0	0	0
오 답	13	17.3	8	10.7	1	1.3	0	0
정 답	62	82.7	67	89.3	74	98.7	75	100

(2) 이유 서술의 분류

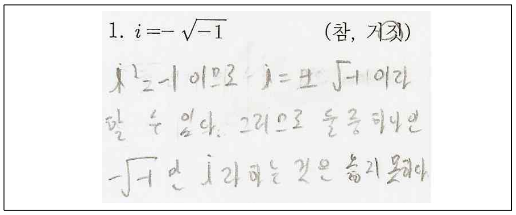
1) 명제 1 : $i=-\sqrt{-1}$

'명제 1'은 허수단위의 정의에 대하여 어떻게 이해하고 있는지를 알아보고자 만든 문항이다. 정답64명에 오답13명이라고 하였는데 이는 편의상 나눈 것이고, 실제로 정답으로 한 것은 '거짓'이라고 응답한 경우이고 오답으로 한 것은 '참'이라고 응답한 경우이다. 그러므로 실제로는 오답이 오답이 아니다. 따라서 '참' 또는 '거짓'이라고 응답한 이유가 중요하다.

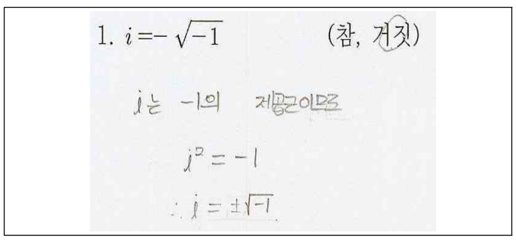
'거짓'이라고 응답한 학생은 62명인데 이 가운데 53명은 $i=\sqrt{-1}$로 정의되어 있기 때문이라고 하였다. 이 학생들이 사용하는 교과서에는 '제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 $\sqrt{-1}$ 또는 i로 나타낸다(최봉대 2008)'고 서술되어 있는데 이 서술은 $\sqrt{-1}$ 과 i를 같은 것으로 한다는 의미가 함축되어 있다고 볼 수 있다. 따라서 $i=\sqrt{-1}$이라고 정의되어 있다고 한 서술은 교과서의 내용을 따르고 있다.

‘거짓’이라 응답한 학생들 4명은 $\sqrt{i^2}=i$로 계산한 학생이 2명, $(-\sqrt{-1})^2=1$로 계산한 학생이 2명으로 계산상의 잘못을 포함하고 있다. $\sqrt{i^2}=i$로 계산한 경우에는 i를 문자로 취급하면서 실수의 문자와 혼동하고 있음을 알 수 있다.

그 외 ‘거짓’이라 응답한 학생들 5명은 <그림 3>과 <그림 4>에서 보여주듯이 $i^2=-1$이므로 $i=\pm\sqrt{-1}$이라고 답하고 있고, 그 둘 중 하나만 i로 정하는 것은 옳지 않다고 설명하고 있다. 이들이 ‘거짓’이라 응답한 이유에는 $i=\sqrt{-1}$만도 아니라는 의미가 포함되어 있다. 따라서 이들 5명의 응답은 오히려 ‘참’이라고 응답한 경우에 포함하는 것이 더 타당성이 있다.



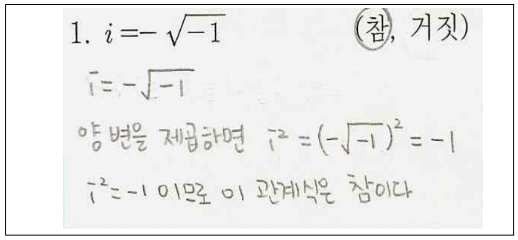
<그림 3> 학생 반응 예



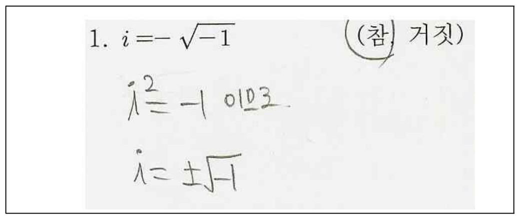
<그림 4> 학생 반응 예

‘참’이라고 응답한 학생은 13명인데, <그림 5>에서와 같이 제곱해서 -1이 되므로 ‘참’이라는 반응이 9명이고, <그림 6>와 같이 -1의 제곱근이므로 둘 다 i가 될 수 있다는 견해를 가진 학생들이 4명이다.

전체 응답을 개관하면 75명 가운데 53명은 교과서의 정의에 따르고 있고, 18명은 ‘제곱해서 -1이 되는 수’라는 보다 근원적인 정의에 입각하여 서술하고 있다. 이는 학생들이 복소수 단원을 접하는 경로가 교과서만은 아니므로 다양한 형태의 개념을 갖고 있을 수 있다고 생각되고, ‘제곱해서 -1이 되는 수’라는 정의에 따르는 학생들이라 하더라도 그러면 ‘i가 $\sqrt{-1}$과 $-\sqrt{-1}$의 두 가지가 될 수 있는가’라는 문제에 대해서는 아무런 언급이 없다. 따라서 교과서의 정의에 따른 학생이나 그렇지 않은 학생이나 허수단위 i에 대해서 올바른 개념형성이 되어 있다고 보기 어렵다.



<그림 5> 학생 반응 예

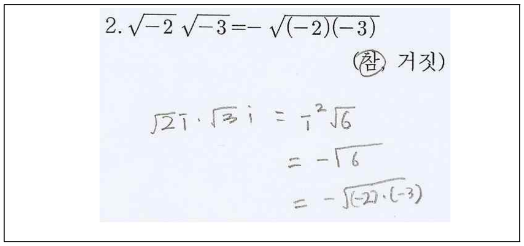


<그림 6> 학생 반응 예

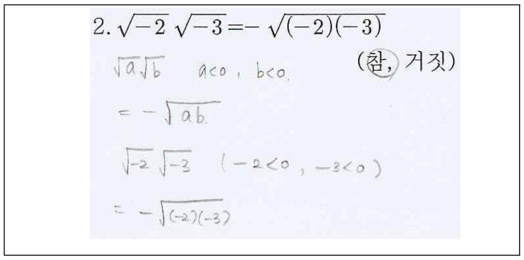
2) 명제 2 : $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

‘명제 2’는 근호 안이 음수인 경우의 계산을 어떻게 하고 있는지를 살펴보기 위한 것이다. 음수의 제곱근에 대한 정의가 앞에서 살펴보았듯이 비논리적으로 이루어져있어 학생들의 개념형성에 문제가 있을 것으로 예상되고 또 복소수 곱셈계산의 특이성을 어떻게 받아들이고 있는지 알아보고자 한다.

이 명제에 대하여 ‘참’이라고 응답한 학생은 67명이다. 이 가운데 <그림 7>처럼 근호 안의 음수를 모두 i를 이용하여 바꾸어 계산한 학생은 48명으로 ‘참’이라고 응답한 학생의 약 72%를 차지하고 있다. 그리고 <그림 8>처럼 ‘$a<0$이고 $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$’라는 관계식을 이용하여 풀이한 학생은 9명이다. 이 학생들이 사용하는 교과서 내용에는 음수 제곱근의 곱하기 계산에 대한 특별한 언급이 없다. 학생들은 두 가지 풀이방법 가운데 자신이 더 이해하기 쉬운 방법을 택하고 있는 것으로 생각된다.

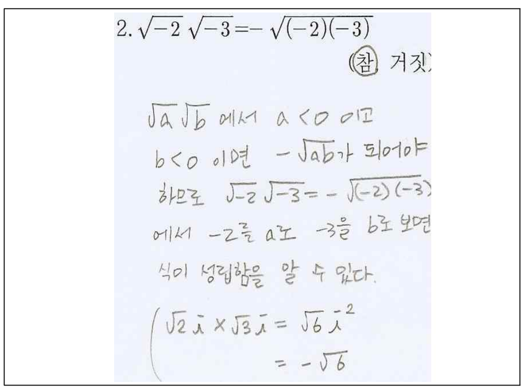


<그림 7> 학생 반응 예

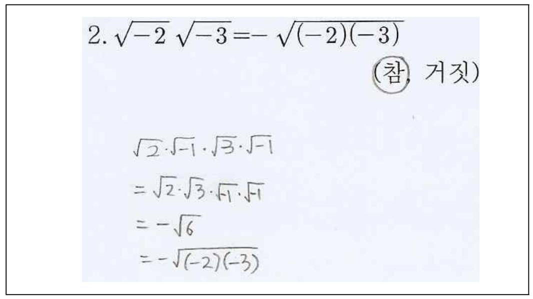


<그림 8> 학생 반응 예

그리고 무언가 미흡하다고 여겨졌는지 <그림 9>처럼 두 가지 풀이법을 모두 보여준 학생도 5명이나 있었다. 이는 표기의 일관성이 결여되면서 풀이의 일관성 또한 상실되어 풀이방법이 정돈되어 있지 않기 때문일 것이다. 아주 특이하게 <그림 10>처럼 i를 사용하지 않고 $\sqrt{-1}$을 사용한 학생도 5명이나 있었다. 이도 역시 표기법의 혼란으로 인해 생겨난 독특한 풀이 방법으로 보인다.

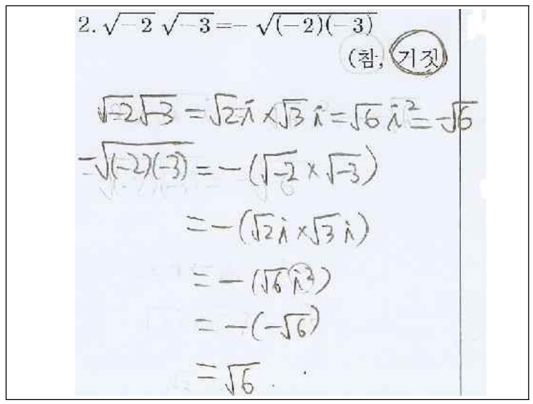


<그림 9> 학생 반응 예



<그림 10> 학생 반응 예

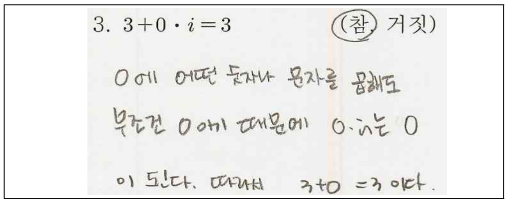
'거짓'이라고 응답한 학생은 8명인데 <그림 11>에 보이듯이 근호 안의 음수 처리에 혼란을 느껴 오류를 범하고 있다.



<그림 11> 학생 반응 예

3) 명제 3 : $3+0\cdot i=3$

'명제 3'은 실수와 복소수의 관계를 학생들이 어떻게 이해하고 있는가에 관련된 문제이다. 교과서에서는 '$0\cdot i=0$으로 정의한다'고 나와 있다. 실수 집합을 복소수 집합의 부분집합으로 이해하기 위해서는 복소수의 표기법에 대한 이해가 우선되어야하고 실수의 표기에 문제가 없다는 것을 알고 있어야 한다. 그러나 현행 교육과정에서는 이 부분을 정의에 의해 설명을 대체하고 있다. 그러므로 학생들은 복소수 개념을 전혀 이미지화하여 떠올릴 수 없으므로 단지 실수 집합 내의 계산으로 이해하고 있을 것이다.

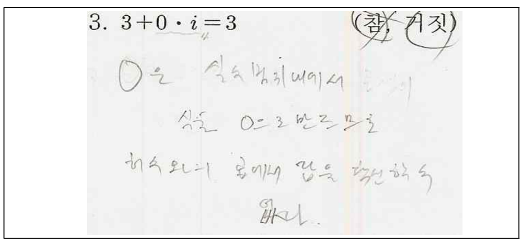


3. $3+0\cdot i=3$ (참, 거짓)

0에 어떤 숫자나 문자를 곱해도 무조건 0이기 때문에 0·i는 0이 된다. 따라서 3+0 =3 이다.

<그림 12> 학생 반응 예

‘참’이라고 응답한 학생이 74명이다. 이들은 천편일률적으로 <그림 12>에서 보여주듯이 아무런 사고의 거리낌 없이 $0\cdot i=0$으로 사용하고 있다. 그 이유도 모두 0에 어떠한 숫자나 문자를 곱해도 0이 된다고 서술하고 있다. 학생들에게 위 식은 실수 a에 대하여 ‘$3+0\cdot a=3$이다’라는 식과 다를 바가 전혀 없다. 그러므로 학생들이 생각하기에 복소수 집합에 특이한 표현으로서 실수의 집합을 포함시키고 있는 것이 아니라 실수의 집합에다 i라는 문자를 포함한 숫자로서 허수를 덧붙여서 사용하고 있는 것으로 보아야 할 것이다. 즉 높은 정답률의 비밀은 복소수 개념을 잘 이해해서가 아니라 실수의 연산을 하고 있기 때문이다.



3. $3+0\cdot i=3$ (참, 거짓)

0은 실수범위에서 식을 0으로 만드므로 허수와의 곱에서 답을 확신할 수 없다.

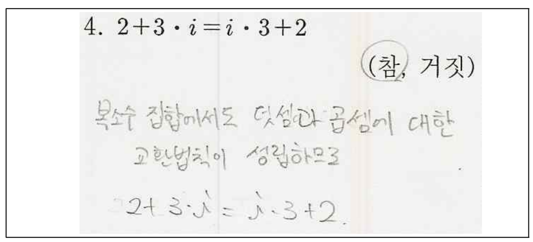
<그림 13> 학생 반응 예

‘거짓’ 응답자 1명의 서술은 <그림 13>와 같다. 그는 ‘0은 실수범위 내에서 식을 0으로 만드므로 허수와의 곱에서 답을 확신할 수 없다’고 되어 있다. 이 학생은 허수의 연산이 실수와 다른 무엇인가가 있다고 생각은 하고 있는데 그것을 구체화시켜 정리하고 있지는 못하다. 하지만 섣부르게 $0\cdot i$를 0으로 치부하지 않고 있다.

‘참’이나 ‘거짓’으로 응답한 학생 모두 복소수와 실수간의 관계 문제로 문제를 파악하지 못하고 있다. $3+0\cdot i$라는 복소수가 왜 3이라는 실수와 같아지는가를 물었는데 모두가 연산의 문제로 답변하고 있다. 이는 학생들 모두 복소수라는 숫자의 개념을 이해하고 있지 못하고 있기 때문이다. 이 점은 다음에 살펴볼 문제에서도 명확히 드러난다.

4) 명제 4 : $2+3\cdot i=i\cdot 3+2$

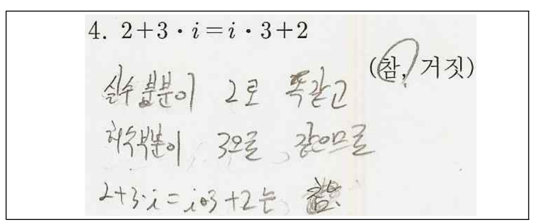
앞의 문제에서 살펴본 바로는 학생들이 복소수라는 숫자의 개념을 파악하는데 실패하였고 단지 계산의 방법만 터득하고 있다고 진단을 내릴 수 있었다. ‘명제 4’ 역시 복소수의 기본성질로서 상등에 관한 문제이다. 복소수가 순서쌍과 같이 실수부 허수부가 명확히 분리되어 표현되었다면 상등의 문제를 쉽게 해결할 수 있겠지만 복소수의 표현법은 덧셈기호를 구분기호로 사용하여 실수부와 허수부를 연결해서 표현하고 있기 때문에 순서 및 표기가 다양하게 나타날 수가 있다. 이들 다양한 표기법에 대한 정리가 상등의 문제이다. 이 명제에 대해서 학생들은 전원 ‘참’이라고 응답하였는데, 69명은 <그림 14>와 같이 덧셈 곱셈에 대한 교환법칙의 문제로 이해하여 그에 기반한 풀이를 하였다. 단 6명만이 <그림 15>와 같이 실수부와 허수부의 같음을 근거로 두 복소수를 같다고 하고 있다. 복소수의 상등문제가 교환법칙의 문제로 보인 것은 복소수에 대한 개념 자체가 없기 때문이 아닐까? 복소수의 교환법칙은 덧셈에 대하여 $z_1+z_2=z_2+z_1$이고, 곱셈에 대하여 $z_1z_2=z_2z_1$이다. ‘명제 4’는 두 복소수 간의 상등의 문제인데, 학생들은 $2+3\cdot i$라는 한 복소수 내의 ‘+’와 ‘·’ 기호를 연산기호로 착각하면서 교환법칙 운운하고 있는 것이다.



4. $2+3\cdot i=i\cdot 3+2$ (참, 거짓)

복소수 집합에서도 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하므로 2+3·i = i·3+2.

<그림 14> 학생 반응 예



4. $2+3\cdot i=i\cdot 3+2$ (참, 거짓)

실수부분이 2로 똑같고 허수부분이 3으로 같으므로 2+3·i=i·3+2는

<그림 15> 학생 반응 예

대부분 교과서는 ‘복소수의 상등’을 ‘무리수의 상등’과 연관하여 설명하는데, ‘무리수 상등’ 모델을 이용한 설명은 학생들이 문제풀이의 구조를 쉽게 파악하는 데에 도움이 되겠지만 복소수 개념을 이해하는 데는 오히려 장애로 작용한 것을 알 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

수학은 기본 개념과 공리에서 시작하는 연역적 이론이다. 기본개념에 의해 다른 모든 개념들이 정의되고 추론규칙에 따라 정리들을 증명해 나가는 순서를 밟고 있다. 그리고 개념은 정의에 의해 획득된다. 학생들은 정의를 이용해 문제를 풀고 정리를 증명하기도 한다. 따라서 정의는 이해하기 쉬운 형태로 제공되어야 할 것이다.

복소수 개념에 대한 현행 교과서의 내용전개와 서술방식 그리고 학생들의 이해상태를 알아본 결과, 교과서의 내용전개와 서술방식이 비논리적이며 혼동된 표현을 사용하고 있고 타당한 설명 없이 정의를 양산하고 있으며, 결과적으로 당연히 학생들이 올바른 복소수 개념을 갖고 있지 않다는 결론에 이르렀다. 먼저 실수 범위에서 근이 존재하지 않는 이차방정식으로부터 허수단위의 정의를 전개해 내면서도 다른 한 근의 존재에 대해서 일체 언급도 하지 않고 있어 중3에서 배운 이차방정식과의 연관고리를 상실하였다. 이는 <명제 1>의 반응에서 $i=-\sqrt{-1}$ 이 참이라고 한 학생이 75명중 13명이 나왔는데, 이는 우수한 학생들을 대상으로 설문조사를 한 것으로 본다면 비교적 많은 수의 학생들이다. 따라서 두 번째로 제시한 연구문제 ‘학생들은 복소수의 개념을 파악하고 있는가?’ 에 대하여 부정적인 면을 보였다고 볼 수 있다.

그리고 i와 $\sqrt{-1}$ 이라는 이중표기법이 아무런 설명 없이 제시되어 학생들의 복소수 개념 이미지 형성에 혼란을 가중 시키고 있다. 이중표기의 문제는 복소수의 곱셈연산에 영향을 미치고, 음수의 제곱근 표기법의 혼란으로 이어진다. 복소수 곱셈연산에서 i를 문자로 취급하는 문제에 이르러서는 실수의 문자와 혼동을 불러일으키고, 연산에 대한 이해보다는 풀이법을 익히는 수준으로 전락시켰다. <명제 2>의 반응에서 우수한 75명의 학생 중 8명의 학생들이 거짓이라고 하였으며, 참이라고 학생 중 48명만이 i를 사용하여 풀이하였다. 이는 세 번째 연구문제인 복소수 연산의 특이성을 제대로 이해하지 못한다고 볼 수 있다.

<명제 3>에 대한 학생들의 반응은 0에 어떤 것을 곱해도 0이기 때문에 $3+0\cdot i=3$는 참인 명제라 하였다. 그리고 <명제 4>에 대하여 덧셈과 곱셈의 교환법칙에 의하여 $2+3\cdot i=i\cdot 3+2$가 참인 명제라 하였다. 이로 보아 학생들은, 실수와 복소수의 관계 문제에 있어서는 전혀 복소수 개념에 대한 이미지를 그릴 수가 없으므로 복소수 집합의 일부로서 실수집합이 파악되고 있는게 아니라, 실수의 이미지를 그리면서 복소수라 이름 붙이고 있는데 지나지 않는다. 이를테면 실수 집합의 한 부분집합인 $P=\{a+b\sqrt{2} \mid a\text{와 } b\text{는 유리수}\}$ 집합과 다를 바가 전혀 없다. 그러므로 학생들에게는 i가 포함된 실수집합의 이미지를 가지고 있다고 생각된다. 따라서 학생들은 복소수 개념의 정확한 이해를 추구하려하지 않고 정의의 암기와 문제의 풀이방법 익히기에 몰두하게 된다고 결론지을 수 있겠다. 그러므로 네 번째 연구문제인 ‘복소수의 상등에 관하여, 학생들은 개념을 이해하기 보다는 성질을 암기하여 답하였다고 결론지을 수 있다.

복소수 개념을 이해한다는 것은 허수도 실수와 마찬가지의 연산법칙을 따르며, 복소수는 실수보다 대수적 의미에서 완전한 수라는 것을 이해한다는 것이며, 이차방정식 풀이의 본질을 파악하고 결국 계산대상 보다 계산규칙이 더 본질적임을 이해한다는 것이다(이동환, 2010).

복소수 단원의 학습 분량도 7차 교육과정으로 넘어오면서 학습부담의 경감을 이유로 지나치게 축소되었다. 복소수 단원은 고등학교 1학년 수학 전체 136시간 가운데 6시간 분량으로 약 4.4%에 해당된다. 학생들에게는 별로 중요하지 않은 내용으로 인식되어질 수 있다. 이는 복소수 내용 자체의 중요성에 비추어 지나치게 축소된 감이 있다. 복소수가 수체계를 완성한다는 수학내적 중요성과 여타 영역에서 광범위하게 사용되고 있다는 수학외적 유용성을 생각할 때, 지나친 내용의 축소는 학생들의 개념형성을 제한하고 여타 학습이나 현실에 연계될 수 있는 다양한 변용의 길을 차단함으로써 유연한 사고의 가능성을 막고 있다.

제언으로서 복소수의 특성을 생각할 때, 복소수의 도

입은 바로 $a+bi$ 형태의 도입 직후, 복소수 평면을 도입하는 것이 바람직해 보인다. 복소수 평면을 도입함으로써, 학생들이 보여줬던 문자로서의 'i' 개념이 실수와 다른 차원의 수라는 것으로 인식할 수 있을 뿐만 아니라, 덧셈에 대한 이해, 복소수의 상등도 자연스럽게 인지될 수 있을 것으로 기대된다. 이후 학생들은 실수와 복소수의 곱, 복소수와 i의 곱, 이런 과정을 거친 다음 일반적인 복소수의 곱으로써 확장할 것을 제안한다. 이 과정에서 학생들은 관찰을 통하여 곱셈이 복소수 평면에서 어떻게 작용하는지를 조사해 봄으로써 복소수 곱셈에 대한 형식적인 암기가 아니라 개념적 이해가 될 것으로 기대할 수 있다. 복소수개념 지도에 있어서 교과서 내용에 집착하고 한정하는 것은 오히려 학생들의 개념형성에 장애를 야기할 가능성이 있으므로, 교사들은 복소수 단원 내용의 중요성을 인지하고 학생들이 개념적이고 논리적인 사고를 할 수 있도록 단원의 내용을 재구성하고, 정확한 개념구성과 논리적 내용전개를 통하여 지도할 필요가 있다.

참 고 문 헌

계승혁・김홍종・박복현・남진영 (2008). 고등학교 수학. 서울: ㈜성지출판.

교육인적자원부 (2007). 고등학교 교육과정 해설 5. 교육인적자원부 고시 제2007-79호.

김서령・이정례・선우하식・이진호・조동석・김민정・박효정 (2008). 고등학교 수학. 서울: ㈜천재교육.

김성대 (2003). 증명지도에서 정당화의 의미와 사례연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김수한・최영기・이중권・김진호・윤오영・김경현・최현근・이향수・김용준・안미숙(2008). 고등학교 수학. 서울: (주)교학사.

김해경・서동엽・최은자・김상철・김성남・윤성식 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)더텍스트.

김혜경 (2006). 제7차 수학과 교육과정에서의 대수적 구조에 대한 지도방안 연구. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

박경미 (2007). 도형개념의 이해에 영향을 미치는 언어적 측면에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 46(3), 245-261.

박자윤 (2008). 시각화를 통한 수학적 개념이해에 관한 연구. 동국대학교 교육대학원 석사학위논문.

박재근 (2007). 복소수 개념의 역사 발생적 접근 및 응용에 관한 연구. 영남대학교 교육대학원 석사학위논문.

박제남 (2003). 교육과정을 통한 복소수의 이해. 인하교육연구 논문집, 9, 221-229.

신항균・이광연・신범영・김홍섭・김정화 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)지학사.

양승갑・신준국・윤갑진・성덕현・양경식・김창규・이승우・조성철・박상우 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)금성출판사.

양은영・이영하 (2008). 고등학교 10-가 교과서 복소수 단원에 관한 논리성 분석연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 10(3), 357-374.

우정호・최병철 (2007). 음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>. 17(1), 1-31.

유윤재 (출간중). 수학교재연구 및 지도법.

류희찬・조완영・조정묵・임미선・유익승・한명주・박원균・남선주・정성윤 (2008). 고등학교 수학. 서울: ㈜대한교과서.

윤재한・박진석・조도상・김영제・권백일・신재봉・정지현・장인선 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)더텍스트.

이강섭・황규채・송교식・양인웅 (2008). 고등학교 수학. 서울: 도서출판지학사.

이동환 (2010). 복소수 지도를 위한 수학지식 연구. 서울대학교 대학원 교육학박사학위논문.

이만근・이재실・오은영・조성오 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)고려출판.

이재학・정상권・박혜숙・홍진곤・박부성・김정배・김상훈 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)금성출판사.

이종철 (2003). 고등학교에서 순서쌍을 이용한 복소수 지도에 관한 연구. 단국대학교 석사학위논문.

이준열・최부림・김동재・서정인・전용주・장희숙・조석연 (2008). 고등학교 수학. 서울: 천재교육.

이진영 (2008). 복소수 집합의 구성에 관한 연구. 한남대학교 교육대학원 석사학위논문.

이태규 (1985). 복소수 확장에 관한 연구. 부천대학 논문

집, 163-176.

임희선 (2006). 복소수를 이용한 평면기하 지도 방안. 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문.

전수진 (2005). 중·고등학생에게 나타나는 정당화 유형 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정은주 (2004). 제7차 교육과정에 따른 복소수 단원 지도 방안에 관한 연구. 명지대학교 교육대학원 석사학위논문.

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학박사학위 논문.

채수영 (1995). 수의 구성과정을 통해 본 수체계에 대한 이해. 서강대학교 교육대학원 원우회 논문집, 87-103.

최봉대·강옥기·권언근·정용욱·양성덕·조현공 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

최용준·김덕환·이한주·위경아·김윤경 (2008). 고등학교 수학. 서울: ㈜천재문화.

최효정 (2008). 기하적 특성을 강조하는 복소수 지도. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

한길준·우호식(2001). 고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(2), 241-252.

황선욱·강병개·김수영(2008). 고등학교 수학. 서울: 좋은책신사고.

황우형·권혁진·김인수·김동화·조남일·박승렬·이채형·차순규·이병하·김혜란·김원중 (2008). 고등학교 수학. 서울: 대한교과서(주).

Complex number on textbooks and Analysis on understanding state of students

Seon-Ho Park
Sangwon High School, Dalseo-Gu, Daegu, Rep. of Korea
E-mail : zetapai@naver.com

Sung-Soo Pyo
Department of Mathematics Education, Kyungpook National University, Deagu, Rep. of Korea.
E-mail : ssoopyo@knu.ac.kr

In this study, contents of 'the 2007 revised curriculum handbook' and 16 kinds of mathematics textbooks were analyzed first. The purpose of this study is to examine the understanding state of students at general high schools by making questionnaires to survey the understanding state on contents of chapter of complex number based on above analysis.

Results of research can be summarized as follows.

First, the content of chapter of complex number in textbook was not logically organized. In the introduction of imaginary number unit, two kinds of marks were presented without any reason and it has led to two kinds of notation of negative square root. There was no explanation of difference between delimiter symbol and operator symbol at all. The concepts were presented as definition without logical explanations.

Second, students who learned with textbook in which problems were pointed out above did not have concept of complex number for granted, and recognized it as expansion of operation of set of real numbers. It meant that they were confused of operation of complex numbers and did not form the image about number system itself of complex number.

Implications from this study can be obtained as follows.

First, as we came over to the 7th curriculum, the contents of chapter of complex number were too abbreviated to have the logical configuration of chapter in order to remove the burden for learning. Therefore, the quantitative expansion and logical configuration fit to the level for high school students corresponding to the formal operating stage are required for correct configuration of contents of chapter.

Second, teachers realize the importance of chapter of complex number and reconstruct the contents of chapter to let students think conceptually and logically.

* ZDM Classification : D34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : complex number, understanding the concept of complex number