대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 28 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 28, No. 4, 599 ~ 622. Nov 2018
DOI: https://doi.org/10.29275/jerm.2018.11.28.4.599

복소수 개념에 관한 학생 오류 해석에 필요한 교사지식

최 은 아* · 강 향 임**†
*우석대학교 교수, **고려대학교 강사

The Teacher's Knowledge Needed to Analyze Student's Errors in the Concept of Complex Numbers

Choi, Eunah* · Kang, Hyangim†**
* *Professor, Woosuk University, South Korea,* eunachoi@woosuk.ac.kr
** *Lecturer, Korea University, South Korea,* hikang2002@hanmail.net

초록. 본 연구는 예비교사들이 복소수에 관한 학생들의 오류를 어떻게 확인하고 진단, 피드백하는지를 분석하여 복소수 개념에 관한 학생 오류 해석에 필요한 교사지식의 특징을 밝히는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 36명의 예비교사들을 대상으로, 복소수 개념에 대한 기본적 지식을 조사하였으며, 고등학생들이 범할 수 있는 5개의 오류 문항을 제시하여 학생 반응의 오류를 확인, 진단, 피드백의 3단계 절차로 설명하도록 하였다. 학생 오류 해석에 대한 교사반응을 분석한 결과, 오류 확인하기 단계의 교과내용지식이 학생 진단과 피드백의 방향과 정확성을 결정하는 핵심적 지식임을 확인할 수 있었다. 또한 오류 확인하기 단계에서는 교과내용지식이, 학생 진단하기 단계에서는 KCS가 주로 발현되었으며, 피드백 제시하기 단계에서는 두 지식이 복합적으로 발현되었다. 복소수에 특화된 결과로는, 복소수에 대한 개념적 이해를 도울 수 있는 복소수 표현에 대한 명확한 지식이 필요하다는 것과 확장된 복소수 체계가 기존의 실수 체계와 조화를 이루기 위해 어떤 조건이 선행되는지에 대한 지식이 요청되었다. 이는 새로운 지식체와 기존의 지식체 간의 조화와 부조화를 명확하게 인식할 필요가 있으며, 부조화를 이루는 이유를 명확히 인지할 필요가 있다는 것을 의미한다. 덧붙여, 복소수 지도에서 복소수 정의 및 연산 도입에 비판적 접근이 필요하며, 복소수의 수학 내적, 외적 가치와 유용성에 대한 지식이 요구된다.

핵심어: 예비교사, 복소수의 개념, 학생 오류, 진단과 피드백, 교과내용지식, 내용과 학생에 대한 지식

ABSTRACT. In this study, the teacher’s knowledge and its features necessary to analyze student errors about the concept of complex numbers are revealed. The instruments used for the diagnosis of and correcting student’s responses were administered to 36 pre-service teachers. The results and analysis of this study showed that. First, a teacher’s knowledge in the step of error judgement is the key to determine the direction and accuracy of diagnosis of and correcting student’s errors. Secondly, it was confirmed that there is the need for the precise knowledge about the representation of complex numbers and the knowledge about the essential prerequisites for the harmony of the complex number system and real number system. Thirdly, pre-service teachers need to have a critical approach to the definition and operations of complex numbers. Lastly, the knowledge about the internal and external value and the usefulness of complex numbers was proposed as the teacher's knowledge necessary to analyze student's errors about the concept of complex numbers.

KEY WORDS: pre-service teacher, concept of complex number, students’ errors, diagnosis and feedback, subject matter knowledge, knowledge of content and student

† corresponding author
Received: Oct 10, 2018 / Reviewed: Nov 12, 2018 / Accepted: Nov 16, 2018

I. 서론

“(음수의 제곱근은) 허구이고 명백하게 불가능하다. 그럼에도 불구하고 우리는 (이를 사용하여) 계산할 것이다”라는 16세기 수학자 카르다노의 말은 허수를 수학사에 본격적으로 등장시킨 결정적 계기였다(Cajori, 1901; Nahin, 1998). 이후에 음의 제곱근은 방정식을 포함한 다양한 계산에서 유용하게 사용되었지만, 수학자들에게 허수는 여전히 “가상의”, “미스테리한”, “존재하지 않는” 이해하기 어려운 개념이었다(Flegg, 2002). 허수에 “imaginary"라는 이름을 붙인 데카르트도, 허수 단위 i를 도입한 오일러도 허수를 존재하지 않거나 필연적으로 불가능하거나 상상의 수로 생각하였다(Nahin, 1998). 실수의 연산법칙을 복소수로 확장한 이중대수학을 연구한 드 모르간과 수많은 논란에 종지부를 찍고 복소수 개념을 정립한 가우스마저도 연구 초기에는 허수를 불합리한 존재로 생각했고, 복소수의 완비성을 의심할 정도였다(Boyer & Merbach, 1958, Nahin, 1998).

이와 같이 복소수는 역사적 발생과 발달 과정에서 당대의 수학자들에게 이해하기 어려운 미스테리한 대상이었다. 복소수에 대한 인식과 수용이 음수만큼, 아니 그보다 더 어려웠던 이유는 0보다 작은 ‘양’인 음수를 넘어서서 제곱을 했음에도 0보다 작은 ‘양’으로서 허수를 접근했기 때문이다. 19세기에 이르러 비로소 복소수를 하나의 수라는 구조적 대상으로 인식할 수 있었던 것은 수를 ‘양’, ‘크기’와 관련지어 생각했던 것을 포기하고 논리적으로 모순이 없는 형식적 차원에서 접근한 인식의 전환이 있었기 때문이었다. 이러한 복소수의 역사적 발달 과정에서 관찰되는 인식론적 장애는 복소수를 처음으로 도입하고 방정식의 허근을 학습하는 과정에서 그대로 재현될 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정에 따르면, 복소수는 고등학교 1학년 <수학>의 ‘복소수와 이차방정식’ 단원에서 처음으로 도입된다(교육부, 2015). 현행 교과서들은 공통적으로 ‘방정식 $x^2=-1$이 해가 되는 실수는 없다. 해를 갖도록 하기 위해서는 새로운 수가 필요하다’는 허수 도입의 필요성을 제시하여 허수단위 i를 도입한 후, ‘임의의 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수’를 복소수로 정의하고 있다. 이는 교육과정의 수와 연산 영역의 일반화된 지식 ‘방정식의 해의 존재를 보장하기 위해 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수로 확장된다’는 것을 반영한 설명이다. 반면에 복소수의 사칙계산에 대해서는 ‘i를 문자처럼 생각하여 계산한다’고 제시하고 있어 연산 원리를 빠르게 형식화하고 있다. 학생들이 새롭고 낯선 복소수를 온전한 수로서 인식할 충분한 여유도 없이, 마치 복소수를 문자 a대신 i가 붙은 일차식 정도로 생각하도록 유도하는 상황이다. 또한 복소수의 나눗셈에서는 왜 분모를 실수로 바꾸는지에 대한 설명이 생략되기 때문에, 학생들은 나눗셈 결과가 항상 복소수가 된다는(나눗셈에 대해여 닫혀있다는) 대수적 구조를 파악하기 어렵다. 학생들에게 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 곱하는 단지 번거로운 과정으로 인식될 우려가 있다. 이러한 기호체계에 대한 자동화된 조작은 오히려 통찰의 근원을 막히게 하는 문제를 야기한다(우정호, 1998).

그동안 복소수는 음수, 유리수 등 다른 수 개념에 비해 상대적으로 주목받지 못한 주제였다. Conner, Rasmussen, Zandieh, & Smith(2007)는 학생들의 복소수 이해에 대한 경험적 연구를 찾아

보기 힘들다고 말한다. 또한 이들은 예비교사들의 복소수 개념이 ‘$i=\sqrt{-1}$’을 넘어서지 못하는 현실을 지적하면서 예비교사들의 복소수 이해에 대한 연구의 필요성을 제기하였다. 최근 들어 국내외에서 고등학생, 예비교사, 현직교사를 대상으로 복소수에 대한 이해를 살펴보는 몇몇 연구들이 수행되었다. 국내에서는 이동환(2010), 박선호, 표성수(2012), 이정희(2013)의 연구가 대표적이며, 특히 이동환(2010)은 복소수 지도에 필요한 MKT를 도출하고 이를 반영한 문항을 설계하여 예비교사들의 교사지식을 조사하였다. 그는 예비교사들이 실수와 허수의 보완으로서의 복소수의 대수적 구조와 복소수가 가지는 대수적 완비성의 의미를 제대로 이해하지 못하고 있다고 지적하였다.

국외 연구는 크게 복소수 개념 발달의 이론적 틀을 제공한 연구와 학생들의 복소수 개념과 성질에 대한 이해를 조사한 연구로 나누어 볼 수 있다. 전자로는 역사적 분석을 통하여 복소수 개념이 ‘조작적 측면에서의 과정’에서 ‘구조적 측면에서의 대상’으로 발달해왔음을 주장한 Sfard(1991)의 연구와 ‘-1의 곱셈이 180° 회전’이라는 은유를 거쳐 i 개념을 ‘90° 회전 연산자’로 이해할 것을 제시한 Lakoff & Nuñez(2000)의 연구가 있다. 후자로는 이스라엘 고등학생을 대상으로 실수에서 복소수로의 확장 과정에서 발생하는 어려움과 이해 정도를 조사한 Tirosh & Almog(1989)의 연구, 미국 예비교사들이 복소수를 ‘하나의 수’로서 이해하지 못하고 ‘두 수의 합성’으로 인식하고 있다는 것과 i를 회전 은유보다는 대칭 은유로 해석하고 있음을 지적한 Conner et al.(2007)의 연구, 스웨덴 공과대학생들의 복소수의 개념이미지를 조사한 Nordlander & Nordlander(2012)가 있다. 이외에도 복소수에 대한 기하학적 이해와 다양한 표현 간의 변환 능력을 조사한 Danenhower(2006)의 연구와 Panaoura, Elia, & Gagatilis(2006)의 연구가 있다.

이상에서 살펴본 선행연구들은 학생들과 예비교사들이 복소수에 대한 개념적 이해보다는 ‘i가 있는 수’ 또는 ‘하나의 수가 아니라 두 성분이 합성된 값’ 등의 제한된 이해를 보이고 있음을 보여준다. 이와 관련하여 Tall & Vinner(1981)는 ‘$\sqrt{2}$는 실수이지 복소수가 아니다’라고 답한 학생들이 ‘그렇지만, $\sqrt{2}+0i$는 복소수이다’라고 답하는 인지적 갈등 상황을 지적하였으며, Vinner(1988)는 많은 학생들이 복소수를 수로 받아들이는 것을 어려워하는 이유가 숫자가 아닌 i를 수로 인정하지 못하기 때문이라고 설명한 바 있다. 이러한 학생들의 수학적 오류와 어려움은 교수・학습 과정에서 불가피한 현상이다.

이와 같은 학생들의 오류를 해석하는 활동에 대해 교사와 연구자들은 오래 전부터 그 가치를 인정해오고 있다(Peng & Luo, 2009). Shulman(1986)과 Ball, Thames, & Phelps(2008)의 연구의 교사지식 범주에도, LMT 프로젝트(LMT, 2010)에서 수학수업의 질을 측정하기 위해 개발한 MQI(Mathematical Quality of Instruction)에서도 학생들의 오류와 어려움을 해석하고 적절하게 반응하는 하위요인이 제시되어 있다. 만약 교사의 복소수에 대한 내용지식과 수학적 언어의 부족함으로 인해 오류에 대한 미흡한 해석과 적절치 못한 피드백이 제공된다면 학생들은 계속해서 잘못된 이해와 실수들을 발생시킬 것이다. 이와 같은 오류 해석의 중요성에도 불구하고, 지금까지 복소수에 대한 학생들의 오류 해석에 필요한 교사지식을 집중적으로 살펴본 연구는 찾아보기 어렵다. 소수의 연구(이정희, 2013; 문진수, 김구연, 2015)만이 복소수에 대한 교사지식을 광범위하게 조사하는 검사 문항의 일부로 오류 해

석 문항을 포함하고 있을 뿐이다.

이에 본 연구는 예비교사들이 복소수 관련 학생들의 오류에 대해 어떻게 확인하고 진단하고 피드백하는지를 분석하여 복소수 개념에 관한 오류 해석에 필요한 교사지식의 특징을 밝히는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 Peng & Luo(2009)와 Shalem & Sapire(2012)의 연구를 참조하여 학생들의 오류 해석에 필요한 교사지식을 분석할 3단계 틀을 설정하였다. 분석 결과는 복소수 지도에 필요한 교과내용지식과 내용교수지식을 밝히는 것에 기여할 것으로 본다. 또한 교사들에게는 학생들의 오류를 해석하고 교정할 수 있는 유연한 교사지식을 제공하고, 학생들에게는 자신들의 오류를 극복하여 개념을 재조직할 수 있는 기회를 제공할 것으로 본다.

II. 이론적 배경

1. 복소수 개념과 그 이해에 관한 선행 연구

수학교육 분야에서의 복소수는 음수, 유리수 등 다른 수 개념에 비해 상대적으로 주목받지 못한 주제였다고 할 수 있다. Conner, Rasmussen, Zandieh, & Smith(2007)는 복소수를 주제로 한 연구가 주로 복소수의 역사적 발달을 다루고 있어서 학생들의 복소수 이해에 대한 경험적 연구를 찾아보기 힘들다는 것을 언급하고 있다. 다행히 최근 10년여 동안에는 소수이긴 하지만 고등학생, 예비교사, 현직교사를 대상으로 복소수의 이해를 살펴본 연구들이 국내외에서 수행되었다. 그동안에 수행된 복소수 이해에 대한 선행연구를 네 가지 범주로 나누어 살펴보도록 한다.

먼저 복소수의 개념적 발달의 이론적 틀을 제공한 연구들을 들 수 있다. 대표적으로 Sfard(1991)는 복소수 개념 발달의 역사적 분석을 통해 다른 수 개념의 역사적 발달과 동일하게, 복소수 개념이 ‘조작적 측면에서의 과정’에서 ‘구조적 측면에서의 대상’으로 발달되어왔음을 주장하였다. 마치 뺄셈이라는 과정이 음수라는 대상의 발달을 이끌었고, 나눗셈이라는 과정이 유리수 개념을, 제곱근을 계산하는 과정이 무리수 개념을 이끌었듯이, 음수의 근호를 구하는 과정이 복소수 개념의 발달을 가져왔다고 설명한다. 따라서 Sfard는 복소수 개념에 대한 이해는 i를 음수의 제곱근을 구하는 ‘과정’으로서 이해하는 ‘조작적 개념’과 연산이 수행될 수 있는 잘 갖추어진 수학적 ‘대상’, 즉 하나의 수로서 이해하는 ‘구조적 개념’이 상호보완적으로 작용하는 ‘이중개념’으로서 이해하는 것이 중요하다고 강조한다. Penrose(2005) 또한 역사적으로 복소수가 새로운 수로서 인정받게 된 것과 같이, 학생들의 학습과정에서도 복소수를 a와 bi의 합으로서가 아니라 온전한 하나의 대상으로서 $a+bi$를 개념화하는 것이 중요하다고 말한다. 반면 Lakoff & Nuñez(2000)는 복소수의 개념적 발달을 기술하기 위해 수와 그 연산에 대한 은유 사용을 이야기한다. -1의 곱셈이 회전이라는 은유를 거쳐 음수를 공간상의 회전 조작으로 개념화하면 -1의 곱셈은 180° 회전을 의미한다. 이 회전 은유를 $i^2=-1$에 적용하면, 90° 회전은 $(0,1)$을 좌표로 하는 $\sqrt{-1}$임을 도출할 수 있다는 것이다. 이러한 설명 틀은 수직선, 좌표평면, 수와 수 연산에 대한 은유를 사용한 회전을 혼합한 것이다. 이상의 연구들은 복소수 개념에 대한 학생들의 심리적 발달과 이해에 필수적인 아이디어들을 제공해준다는 측면에서 의미가 있다.

다음으로, 학생 또는 예비교사들의 복소수 개념에 대한 이해를 조사한 연구들을 찾아볼 수 있다. Tirosh & Almog(1989)는 수 체계의 확장은 학생들로 하여금 새로운 수 개념에 대한 적응, 조절 능력을 요구한다고 가정하면서, 이스라엘 고등학생을 대상으로 실수에서 복소수로의 확장 과정에서 발생하는 어려움과 이해 정도를 조사하였다. 이들은 복소수가 수인지 아닌지에 대한 판단은 학생들이 가지고 있는 수 개념으로부터 나온다고 보았고, 이에 따라 '수는 자릿수를 가진 숫자로 표현된다', '수는 양 또는 음의 양을 표현한다', '수는 수직선 위의 점으로 표현된다' 등의 수 개념을 가진 학생들의 경우에 '복소수는 수가 아니다'라고 반응하였음을 확인하였다. 이들은 이와 같은 장애를 극복하기 위한 방안으로 학생들로 하여금 수를 확장하는 과정에서 얻는 것과 잃는 것을 발견하게 해야한다는 교수학적 함의점을 제시하였다. Conner, Rasmussen, Zandieh, & Smith(2007)는 예비교사들이 복소수 단원 수업 이후에 '복소수는 수가 아니다'라는 문장에 대해서는 명백한 거짓이라고 답하였으나, 복소수를 '단일한 존재'가 아니라 여전히 '두 수의 합성'으로 파악하는 학생이 다수 존재한다는 것을 지적하였다. 또한 Lakoff & Nuñez(2000)의 '수를 회전 연산자로 인식한다'는 가정을 검토하는 문항에 대해서는 예비교사들이 -1을 곱하는 것을 회전보다는 대칭으로 접근하고 있음을 확인하였다. Nordlander & Nordlander(2012)은 Tall & Vinner(1981)의 개념정의와 개념이미지를 이론적 틀로 하여 스웨덴 공과대학생들의 개념이미지를 조사하였다. 조사 결과, '수학적 인공물, 이차원 수, 수학 기호, 손에 잡히지 않는 미스테리' 등 복소수에 대한 개념이미지 범주를 확인하였다.

국내 연구로는 복소수 개념에 대한 이해를 예비교사를 대상으로 조사한 이동환(2010)의 연구와 고등학교 1학년 학생을 대상으로 한 박선호, 표성수(2012)의 연구, 현직 수학교사를 대상으로 살펴본 이정희(2013)의 연구가 대표적이다. 이들은 조사 대상들이 공통적으로 복소수 개념과 성질, 대수적 구조의 특징에 대한 이해가 미흡함을 지적하였다. 특히 이동환(2010)은 교수학적 분석을 바탕으로 복소수 지도에 필요한 교사지식, 즉 MKTc(Mathematical Knowledge for Teaching Complex number) 5가지를 도출하고, 이를 반영한 과제를 설계하여 예비교사들의 교사지식을 조사하였다. 5개의 MKTc는 실수의 대수적 결함을 보완하는 허수의 역할을 이해하는 것, 복소수의 이상적 성질을 바탕으로 간결하게 만든 법칙, 원리, 성질을 이해하는 것, 복소수가 체라는 사실이 대수적 완비성을 보장하지 않음을 이해하는 것, 복소수의 대수적 구조를 이해하고 복소수 연산 지도관점을 정립하는 것, 방정식과 복소수의 대수적 구조와의 관계를 이해하는 것이다. 이러한 MKTc를 반영한 검사를 통해, 그는 예비교사들이 실수와 허수를 대립관계로 봄으로써 실수와 허수의 보완으로서의 복소수의 대수적 구조를 이해하지 못하고 있다는 사실과 복소수체가 대수적으로 닫혀있다(algebraically closed)는 의미를 제대로 이해하지 못하고 있음을 보고하였다.

이상의 연구들이 복소수 개념과 성질에 대한 이해를 조사한 연구라면, 복소수에 대한 기하학적 이해와 다양한 표현 간의 변환 능력에 주목한 연구가 있다. Danenhower(2006)는 복소함수론을 수강하는 캐나다 대학생들을 대상으로, 복소수 분수 표현 $\frac{a+ib}{c+id}$를 직교좌표 표현 $x+iy$과 지수 표현 $re^{i\theta}$로 변환하는 능력을 조사하였다. 학생들은 직교좌표 표현으로의 변환에는 능숙한 반면에 지수 표현으로의 변환에는 미숙한

모습을 보였으며, 기하학적 추론과 지수 표현을 활용하지 못하였다. 이는 학생들이 단지 대수적 계산을 위해 기하학적 대상을 사용하고 있다는 것과 i와의 곱셈을 동적인 회전 연산자로 인식하지 못하고 정적인 대상으로 제한적으로 사고하고 있음을 드러낸다고 볼 수 있다. 반면에 Panaoura, Elia, & Gagatilis(2006)는 그리스 고등학생들의 복소변수 방정과 부등식의 대수적 표현과 기하학적 표현사이의 변환 능력을 조사한 결과, 학생들이 대수적 표현을 기하학적 표현으로 변환하는 것에 더 능숙하긴 했지만, 대수적 접근 사용 시 과제 수행에 좀 더 오랜 시간동안 지속적으로 머물고 있다는 것을 관찰하였다. 이는 학생들이 복소수의 기하학적 표현이 대수적 계산을 상당부분 줄이는 역할을 할 수 있다는 것을 인식하지 못한다는 것을 의미한다.

마지막으로, 학생들이 복소수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 조사하는 차원을 넘어서 학생들의 복소수에 대한 이해를 촉진할 수 있는 교수방법을 알아본 연구가 있다. 바로 Nemirovsky, Rasmussen, Sweeney, & Wawro(2012)의 연구로, 이들은 강의실 바닥을 복소평면으로 하여 복소수의 연산을 학생들의 신체적 행동으로 나타내는 방법으로 예비교사들이 복소수에 대한 추론 능력을 개발시킬 수 있는지를 교수실험하였다. 이들은 예비교사들이 i를 복소수의 덧셈과 곱셈과 관련된 신체적 행동(제스처)들을 유발하는 대상으로서 인식하게 된 과정과 결과를 보여주었다. 이들의 연구 결과는 두 복소수의 곱셈의 기하학적 해석의 강조가 학생들이 복소수 곱셈에 대한 정확한 추론을 형성하는 것에 기여하고, i의 곱셈을 동적인 과정으로 인식하도록 돕는다는 것을 보여준다는 점에서 의미가 있다.

2. 학생의 오류 해석에 필요한 교사지식

수학적 오류는 교수・학습 과정에서 불가피하게 발생할 수밖에 없는 현상이다. 수학교육에서 학생들의 오류를 해석하는 활동은 긴 역사를 가지고 있으며, 교사들과 연구자들은 오래 전부터 그 가치를 인정해오고 있다(Peng & Luo, 2009). 교사지식에 대한 연구를 촉발시킨 Shulman(1986) 또한 "missing paradigm"의 내용에 학생들의 오개념을 어떻게 다루는지에 관한 교사지식으로서의 PCK를 이야기하였다. 학생들이 가지고 있는 선개념 속의 오류를 교정하여 학생들의 이해가 올바르게 재조직될 수 있게 하는 전략을 아는 것이 교사에게 필요한 지식임을 주장한다.

수학교사에게 필요한 지식을 교수를 위한 수학지식(MKT)으로 개념화하고, 이를 교과내용지식(SMK)과 내용교수지식(PCK)으로 분류한 후 다시 6개의 하위 영역의 교사지식으로 범주화한 Balll과 동료들의 연구에서도 학생들의 오류를 해석하는 교사 지식을 찾아볼 수 있다(Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Bass, 2008). 먼저, SMK 영역의 일반내용지식 CCK는 문제의 수학적 해법을 개념적 또는 절차적으로 올바르게 설명하는 지식이므로, 교사들로 하여금 학생들의 일반적인 수학적 오류 여부를 판단할 수 있게 해준다. 가르치는 상황에 특화된 전문화된 내용지식 SCK는 학생들의 답변을 수학적으로 해석하여 타당한 정도를 평가하며 오류의 원인이 된 수학적 단계를 확인하는 과정에 작용한다. 학생의 표준화되지 않은 해법에서 오류를 판단하고 패턴을 찾는 것도 SCK에 기반하여 이루어진다. 반면에 PCK 영역의 내용과 학생에 관한 지식 KCS는 학생들이 특정 내용의 학습에서 일반적으로 흔하게 범하는 오류를 예측하거나 학생들이 어떤 추론 과정을 거쳐 오류에 이르렀는지를

설명할 수 있는 지식이다. 이 지식은 오류의 원인을 학생의 심리적 요인과 사회적 맥락에서 찾는다는 점에서 SCK와 차이가 있다. 내용과 교수에 관한 지식 KCT는 학생들의 오류 교정을 위하여 어떤 방법들과 절차가 효과적일지를 판단하는 방법적 지식이라고 할 수 있다. 이와 같이 학생들의 오류 진단과 교정에 필요한 교사 지식은 여러 가지의 범주의 교사 지식이 동시에 발현되어야 하는 복합적 지식이라고 할 수 있다.

그런데 실제 수업에는 교사지식 외에도 여러 가지 상황 변수가 작용한다고 예측되는 바, 교사의 MKT가 질 높은 수학수업의 충분조건이라고 예측하기에는 다소 무리가 있다. 이에 교사 지식과 수업의 질, 학생의 수학성취도 사이의 관련성을 확인하는 연구가 Hill과 Ball, 그 동료들에 의해 후속 연구로 수행되었다(LMT, 2006, 2010, 2011). LMT 프로젝트에서는 수학수업의 질을 측정하기 위해 MQI(Mathematical Quality of Instruction)를 개발하여 수정·보완하였는데, 6개의 평가 차원 중에서 수학적 오류와 직접적으로 관련된 두 개 차원을 확인할 수 있다(LMT, 2010). ‘학생과 수학에 반응하기(working with student and mathematics)’ 차원에는 학생들의 수학적 산출물을 이해하고 반응하는 것과 학생들의 오류와 어려움을 꼼꼼하게 교정해주는 하위 요인이 제시되어 있으며, ‘오류와 부정확성’ 차원에는 수학적 오류나 심각한 수학적 부주의, 언어나 표기에서의 부정확성, 명료성의 부족, 전반적인 오류와 부정확성 등의 하위 요인이 구성되어 있다. 특히, LMT는 교사의 수학 내용 지식과 수학적 언어의 부족함으로 인해 학생들이 학습 기회를 제한받게 되면, 교정되지 못한 수학적 오류로 인하여 학생들이 잘못된 이해와 실수들을 발생시킨다는 것을 우려하고 있다(LMT, 2011).

한편 수학을 가르치는데 필요한 교사지식을 밝히고 범주화한 선행연구들을 바탕으로, 학생들의 오류 해석에 필요한 교사지식에 집중하여 이를 심층적으로 살펴본 연구들을 찾아볼 수 있다. Peng & Luo(2009)는 교사지식에 관한 선행연구들이 오류 해석에 관한 일관성 있는 수학 교사 지식을 제공하지 못하고 있을 뿐 아니라 오류 해석 과정과 밀접하게 연결되지 못하고 있음을 지적하면서, 오류 해석에 필요한 교사지식을 검사하는 좀 더 포괄적인 틀이 필요함을 제기하였다. 이들은 학생 측면에서 ‘수학적 오류의 본성’ 차원과 교사 측면에서 ‘오류 해석의 단계’ 차원으로 나누고, 다시 전자 차원은 수학적 오류, 논리적, 오류, 전략적 오류, 심리적 오류로 범주화하였으며, 후자 차원은 확인하기, 분석하기, 평가하기, 교정하기로 범주화하고 있다. 이에 따라 수열의 극한에 대한 기본 성질 문제와 삼각부등식 문제에 대한 학생들의 답변과 이를 분석한 교사의 반응을 사례로 제시하여 오류 해석에 필요한 교사지식을 분석하고 있다. 또한 Shalem & Sapire(2012)는 South Africa에서 ‘국가 수준 또는 기타 평가에서 학생들의 수행을 해석할 수 있는 능력과 이를 바탕으로 수업을 개선하는 능력’이 교사들에게 요구되고 있음을 언급하면서, 학생들의 오류에 대한 설명과 진단과 관련된 교사지식을 측정할 수 있는 평가 도구의 필요성을 제안하였다. 이들은 Ball과 Hill, 그의 동료들이 제안한 교사지식의 범주(Ball et al., 2008)를 바탕으로, 오류 해석에 관한 교사지식의 여섯 가지 준거를 제시하고 있다. 먼저 CCK 영역에서는 ‘올바른 답에 대한 절차적 이해와 개념적 이해’라는 두 가지 기준을 제시하고 있으며, SCK 영역에서는 수학적 오류를 평가하고 오류의 수학적 원인을 설명하는 것에 초점을 맞춘 ‘오류의 인식’ 기준을 제시하였다. KCS 영역에서는 학생들이 오류를 범하게 된 학생들의 생각을 추측하여

설명하는 ‘오류와 관련된 학생의 사고를 추측하여 진단하기’ 기준과 더불어 ‘일상의 경험과 연결하여 학생의 오류 원인 설명하기’, ‘오류 원인을 다양하게 설명하기’ 기준을 제시하고 있다. 반면에 KCT 영역은 수업설계와 실제 교수 과정에서만 관찰 가능하다고 보아 별도의 준거를 제시하지는 않았다. 이후 Shalem, Sapire & Sorto(2014)는 표준화된 검사에서 나타난 학생들의 오류를 해석하고 그 원인을 추론하는 교사지식을 분석하는 후속 연구를 통해, 오류의 원인에 대한 추론에서는 수학내용지식과 내용교수지식이 복합적으로 발현되는 반면에, 오류의 판단과 분석, 설명에는 교과내용지식이 주도적으로 사용된다는 것을 확인하였다. Ding(2008) 또한 동치분수를 주제로 하여, 범주화된 교사지식이 학생들의 오류와 어려움에 대처하는 교사들의 교수학적 결정에 미치는 영향을 조사한 바 있다.

반면에 국내 연구에서는 오류 해석에 대한 교사지식을 독립적으로 분석한 연구를 찾아보기 어렵다. 이러한 경향은 교사지식에 관한 국내 연구가 주로 교사들의 수업을 분석 또는 PCK를 조사하는 연구와 특정 수학적 개념에 관한 교사들의 MKT 또는 특정 범주의 교사지식을 분석하는 연구 위주로 수행되어 왔다는 점에 기인한다. 교사들의 오류 해석을 다룬 대부분의 연구는 교사지식을 광범위하게 조사하는 검사 문항의 일부로 오류 해석 문항을 일부 포함하고 있음을 확인할 수 있다(이정희, 2013; 문진수, 김구연, 2015).

이에 본 연구는 오류 해석에 필요한 교사지식을 체계적이고 심층적으로 살펴보고자 Peng & Luo(2009)와 Shalem & Sapire(2012)의 분석틀을 참조하여 오류 해석에 관한 교사지식에 대한 새로운 틀을 설정하였다. 이를 위해 수학적 오류의 본성 차원을 SMK로, 오류 해석 차원을 PCK로만 대응시키는 Peng & Luo의 틀의 단점과, 오류 원인을 일상 경험과 연결하거나 다양하게 설명하기 등 ‘복소수의 개념 이해’라는 본 연구 주제에 들어맞지 않는 범주를 포함하고 있는 Shalem & Sapire의 틀의 단점을 보완하였다. 본 연구가 설정한 오류 해석에 필요한 교사지식에 대한 이론적 틀은 3단계로 단순화하여 구성되었다. 먼저 1단계 ‘오류 확인하기’는 학생들의 반응에 수학적 오류가 있는지를 판단하고, 오류의 원인을 수학적으로 해석하는 과정이다. 2단계 ‘학생 진단하기’는 학생들이 오류를 범하게 된 학생들의 생각을 추측하여 진단하는 과정이다. 3단계 ‘피드백 제시하기’는 학생의 오류를 교정하기 위해 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 올바른 수학적 설명을 제시하는 과정이다. 이와 같이 3단계로 나누어 예비교사들의 오류 해석에 관한 지식을 분석한 결과는 복소수 개념을 도입하고 지도하는데 필요한 교과내용지식과 내용교수지식을 밝히는 것과도 연결될 것이다. 또한 교사들에게는 학생들의 오류를 해석하고 처방할 수 있는 유연한 교사지식을 제공하고, 학생들에게는 자신들의 오류를 극복하여 개념을 재조직할 수 있는 기회를 제공할 것으로 본다.

III. 연구방법

1. 검사도구

본 연구에서는 예비교사들이 복소수 관련 학생들의 오류에 대해 어떻게 확인하고 진단하고 피드백하는지를 분석하여 복소수 개념에 대한 오류 해석에 필요한 교사지식의 특징을 밝히고자 하였다. 본 연구에서 개발한 검사도구는 A형 복소수 개념 검사와 B형 오류 해석 검사로 나누

어진다. A형 검사는 예비교사들의 오류 진단과 해석에 대한 지식을 분석하기 위해서는 예비교사들의 복소수 개념에 대한 기본적 지식을 조사할 필요가 있다고 판단하여 수행하였다. A형 검사문항은 *Table* 1에서 보는 바와 같이, 복소수가 수인지 아닌지 판단하기, 복소수 정의하기, 복소수에 대한 이미지 나타내기, 복소수의 유용성 말하기로 구성하였다.

***Table* 1.** questions of test tools of type A

항목	문항
수인지 판단하기	1. 복소수는 수입니까? 아닙니까? 그렇게 판단에 대한 이유를 쓰시오.
정의하기	2. 복소수의 정의를 쓰시오.
이미지 나타내기	3. ‘복소수’하면 떠오르는 이미지를 가능한 상세히 표현하시오(마인드맵 가능).
유용성 말하기	4. 복소수는 왜 중요합니까? 복소수가 갖는 수학 내적, 외적 가치를 쓰시오.

B형 오류 해석 검사는 복소수에 대한 선행 연구인 Tirosh & Almog(1989), 이동환(2010), 박선호, 표성수(2012)의 연구를 참고하여 5개의 문항으로 구성하였다. *Table* 2에서 보는 바와 같이, 각 문항은 주어진 학생의 반응을 해석한 자신의 생각을 3단계로 나누어 기술하는 것이다. 1번 문항은 복소수 개념에 대한 오류, 2번 문항은 기존 체계의 성질을 일반화한 오류, 3번 문항은 복소수의 대소관계에 대한 오류, 4번 문항은 논리적 전개의 오류, 5번 문항은 복소수의 대수적 완비성에 대한 오류에 해당한다. 이 중에서 5번 문항은 고등학교 교육과정을 벗어나는 내용이기는 하지만, 고등학생들이 얼마든지 의문을 갖고 제기할 수 있는 질문이라는 점에서 검사 문항에 포함시켰다. 각각의 검사 문항은 Peng & Luo (2009)와 Shalem & Sapire(2012)의 연구를 참조하여 연구자들이 설정한 오류 해석 3단계로 나누어 답하도록 제시되었다. 1단계 질문은 ‘오류 확인하기’로, 주어진 반응이 오류인지 아닌지를 판단하고 그렇게 판단한 수학적 근거를 쓰도록 하였다. 2단계 질문은 ‘학생 진단하기’로, 이 단계에서는 학생의 진술에 대한 원인을 추측하여 기술하도록 하였다. 3단계 질문은 ‘피드백 제시하기’로, 주어진 반응을 보인 학생에게 적절한 설명을 제공하도록 하였다. 개발한 검사도구는 2명의 수학교육 전문가에게 자문을 받았으며, 수학교육과 4학년 학생 4명에게 예비조사를 실시하

***Table* 2.** step-by-step questions of test tools of type B

단계별 질문	학생 반응	출처
[1단계] 학생 반응의 옳고 그름을 수학적 근거와 함께 서술하시오. [2단계] 학생이 이러한 생각을 하게 된 원인을 추측하여 서술하시오. [3단계] 학생에게 어떻게 설명할 것인지 서술하시오.	1. 복소수는 제곱해서 음수가 되는 수이다.	자체 제작
	2. 교과서에 제시된 ‘$0i=0$으로 정한다’는 당연한 것을 약속하고 있으므로 불필요하다.	박선호, 표성수(2012)
	3. 부등식 $i<i+4$ 는 참이다.	Tirosh & Almog(1989)
	4. ‘$a>0$에 대해 $(\sqrt{a}\,i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$와 $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a})^2i^2=-a$이므로, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다’는 옳다.	박선호, 표성수(2012)
	5. 방정식 $x^2+1=0$의 해로서 허수 i를 도입했으므로, 방정식 $x^2-i=0$의 해를 위해 새로운 수를 도입해야 한다.	이동환(2010)

여 문항의 어휘 등을 수정한 후 최종 확정하였다. 개발한 검사도구는 2명의 수학교육 전문가에게 자문을 받았으며, 수학교육과 4학년 학생 4명에게 예비조사를 실시하여 문항의 어휘 등을 수정한 후 최종 확정하였다.

2. 연구 대상

본 조사는 연구자들의 수학교육학 관련 강의를 수강하고 있는 학생 중에서 조사에 참여하여 정보를 제공하는 것에 동의한 36명의 예비교사들을 대상으로 하였다. 연구대상자들은 수도권의 교육대학원생 11명과 지방의 수학교육과 3학년 학생 25명이다. 교육대학원생 모두 수학과 출신으로 학부에서 대수학, 복소해석학 등의 교과내용학을 수강하였고, 대학원 입학 후 최근에 수학교과 교재연구 및 지도법을 수강한 상태였다. 수학교육과 학생의 경우는 3학년 1학기에 현대대수학1, 복소해석학1을 수강하였고, 2학기 현재 수학 교과 교재연구 및 지도법에서 수와 연산 영역을 수강한 상태였다. 따라서 본 연구의 검사도구에 대한 교육대학원생과 학부생의 학습 경험의 차가 크지 않다고 판단하였다. 사전에 연구대상자들의 오류에 대한 교수 신념을 확인해 본 결과, 2명만이 '예방해야 한다'를 선택하였고, 나머지 34명은 '처방해야 한다'를 선택하였다. 대부분의 예비교사들은 학생들의 오류는 필연적이므로 학습과정에서 오류를 수정하는 경험을 통해 보다 견고한 지식을 얻을 수 있다는 생각을 가지고 있었다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

검사는 2018년 9월에 실시하였으며, A형과 B형의 지필 검사를 실시한 후, 지필 검사에서 의미 있는 반응을 보인 9명을 선정하여 면담하였다. 연구의 결과 분석은 1차 지필 검사에서 수집한 검사지와 2차 면담에서 수집한 녹음파일 그리고 연구자의 연구 노트를 바탕으로 이루어졌다.

분석항목은 복소수 개념에 대한 기본적 이해, 오류 확인하기 단계의 교사지식, 학생 진단하기 단계의 교사지식, 피드백 제시하기 단계의 교사지식으로 구성하였다. 복소수 개념에 대한 기본적 이해 항목에 대해서는 A형 검사 4개 문항에 대한 응답을 범주화하여 유형별 특징을 분석한다. 오류 확인하기 단계의 교사지식 항목에서는 B형 검사 5개 문항의 1단계 응답에 대해 수학적 오류를 정확하게 판단하는지를 양적, 질적으로 분석한다. 학생 진단하기 단계의 교사지식 항목에서는 B형 검사 5개 문항의 2단계 응답에 대해, 1단계에서 오류를 적절히 판단한 경우와 그렇지 못한 경우로 나누어 학생들의 오류 원인을 진단하는 반응을 분류하는 방식으로 분석한다. 피드백 제시하기 단계의 교사지식 항목에서는 B형 검사 5개 문항의 3단계 응답에 대해, 1단계와 2단계에서 적절한 반응을 보인 사례를 중심으로, 학생에 대한 이해와 교육과정 지식, 교과내용지식을 반영한 경우에 초점을 두어 분석한다. 특히, 1번 문항은 A형 검사에서 복소수 정의하기에 대한 응답과 어떻게 연결되어 있는지에 초점을 두어 비교 분석할 것이며, 2번 문항은 기존의 실수 체계에서 성립하던 성질이 새로운 복소수 체계에서 여전히 성립하기 위한 필요조건을 제시하는지를 확인하는 방법으로 분석한다. 3번 문항은 실수에서 성립하던 대소 관계가 복소수에서 성립하지 않는 근거를 수학적으로 제시할 수 있는지를 확인할 것이다. 예를 들어, 양의 복소수 집합을 가정하고 모순을 유도하는 방법을 생각할 수 있다. 즉 실수의 부분 집합인 양수의 집합 P의 정의를 복소수로 확장하여, 양의 복소수

의 집합 P를 만들었다고 가정해보자. 허수 i는 0이 아니므로, i 또는 $-i$는 P의 원소가 되어야 한다. 그런데 i가 P의 원소라면, i와 i의 곱이 P의 원소가 되어야 하지만 -1이 되므로 i는 P의 원소가 아니다. 만약 $-i$가 P의 원소라면, $-i$와 $-i$의 곱은 P의 원소가 되어야 하지만 -1이 되므로 P에 속할 수가 없다. 따라서 양의 복소수의 집합 P란 존재할 수가 없게 된다. 즉 복소수 체계에서 대소 관계를 생각할 수가 없는 것이다. 4번 문항은 음수의 제곱근을 구하는 상황에서 이미 구한 것으로 취급하는 논리적 모순을 지적할 수 있는지를 확인할 것이다. 5번 문항은 수체계가 복소수로 확장되면서 대수적으로 닫힘체, 즉 수학의 기본정리가 성립하게 되었다는 점을 제시할 수 있는지를 확인할 것이다.

연구자들은 예비교사들의 반응을 귀납적으로 분석하고 심층적인 서술을 함으로써 그 의미를 해석하는 질적 사례 연구를 수행하였다(Denzin & Lincoln, 1994). 따라서 수집된 자료는 예비교사들의 반응에 포함된 핵심적인 표현과 키워드를 중심으로 범주화하여 분석하였다. 분석의 효율성을 위해 예비교사들을 두 그룹으로 나누어 교육대학생을 P1에서 P11까지 표기하고 학부생을 P12에서 P36까지로 표기하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 복소수 개념에 대한 기본적 이해

예비교사들의 복소수 개념에 대한 기본적 지식은 학생 반응의 오류 진단과 해석을 위한 교사 지식에 토대가 된다. 이에 예비교사들이 복소수에 대해 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 A형 복소수 개념 검사도구를 통해 4개 문항을 조사하였다. 먼저, 복소수가 수인지 아닌지에 대한 질문에 대하여 '수이다'라고 대답한 경우가 31명으로 압도적으로 많았다. 그러나 그 이유에 대해서 적절한 근거를 제시하지 못한 경우를 다수 찾아볼 수 있었다. '방정식의 해의 존재를 보장하는 수이기 때문에', '연산이 가능하기 때문에', '인공적이고 형식적으로 수 체계에서 실수에서 확장된 수이기 때문에' 등은 적절한 이유 범주로 구분하였다. 반면에 '복소수 이름 자체에 '수'가 들어갔기 때문에'라든지 '존재하지는 않지만 문자의 계수로 쓰이기 때문에', '표현 방법이 있어서' 등의 판단 이유는 다소 부적절하다고 판단하였다. 복소수가 수가 아니라고 답한 5명의 답안은 '복소수는 수가 아니라 단지 계산체계이기 때문에(P33)', '수에 대해 성립하는 일반적인 성질이 성립하지 않기 때문에(P3)', '실수는 수이지만 허상의 수인 허수를 함께 표현한 것이기 때문에(P9, P30)', '수직선에 나타낼 수 없으므로(P20)' 등이 있었다. 특히 P3은 실수가 만족하는 모든 연산과 법칙을 복소수도 만족한다는 것, 즉 대수적 닫힘체로서의 복소수의 성질을 인식하지 못하고 있었다. 또한 P20은 '수는 수직선의 점으로 나타낼 수 있는 값'이라는 인지 도식을 가지고 있다고 볼 수 있는데, 이러한 인지도식을 가진 학생들은 복소수를 수로 인정하지 않는다는 Tirosh & Almog(1989)의 연구 결과와 일치하는 사례이다.

복소수의 정의에 대해서는, '실수부와 허수부가 결합해서 만들어진 수'를 포함하여 'a, b가 실수일 때, $a+bi$꼴로 나타낼 수 있는 수'라고 정확하게 제시한 경우가 8명에 불과하였다. 대부분의 예비교사들은 '제곱해서 음수가 되는 수를 포함하는 수', '가상의 수', '실수보다 큰 수 체계', '방정식 $x^2+1=0$의 해를 포함하는 수' 등

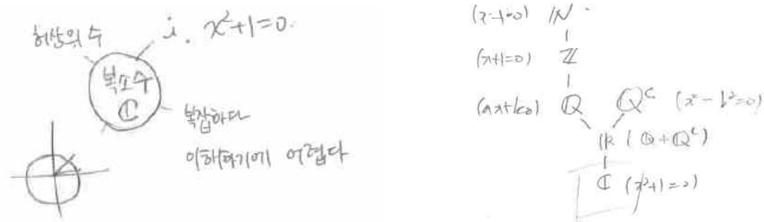


***Figure* 1.** mind-mapping of the concept image for complex numbers of P27(left) and P22(right)

개념 정의가 아닌 비형식적인 기술을 제시하고 있었다. 물론 이러한 기술 모두 복소수의 속성에 해당하긴 하지만, 장차 복소수를 지도할 예비교사로서 복소수의 형식적 정의에 대한 지식은 필수적이라고 할 수 있다.

한편 예비교사들의 복소수에 대한 개념 이미지를 핵심적인 표현과 키워드를 중심으로 분석한 결과, 가장 두드러진 답변 유형은 '상상의, 존재하지 않는, 복잡한, 어려운, 인공적인, 가짜의, 추상적인' 등 복소수에 연상되는 수식어들을 제시한 경우였다. 다음으로는 복소수와 관련된 수학적 개념과 표현을 제시한 경우가 많았는데, '실수, 허수, i, $a+bi$, $x^2+1=0$, 허근, $b^2-4ac<0$, 복소평면, $e^{i\theta}$, $r(\cos\theta+\sin\theta)$, 극형식, 이차원 수' 등이 제시되었다. 특이하게 P34는 '실수가 앞모습이라면, 허수는 뒷모습, 복소수는 완벽한 모습'이라는 시적인 표현을 제시하기도 하였다. 일부 학생들은 *Figure* 1과 같은 마인드맵으로 나타내기도 하였다. 전반적으로 Nordlander & Nordlander(2012)의 연구에서 나타난 인공적인 수, 수학 기호 i가 있는 수, 손에 잡히지 않는 미스테리 등의 개념이미지 범주는 쉽게 찾아볼 수 있었으나, 이차원 수를 제시한 경우는 상대적으로 찾아보기 힘들었다. 예비교사 모두 대수학과 복소해석학을 수강한 상태임에도 불구하고 복소평면이나 복소수의 지수함수 표현과 극형식 표현을 제시한 학생은 소수의 학생에 불과하였다. 이는 예비교사들이 가지고 있는 복소수 개념에 대한 이미지가 고등수학의 학습 경험과 별개로 고등학교에서 처음 복소수를 접한 수준에 머물러 있음을 보여준다.

복소수가 수학 내적, 외적으로 어떤 가치와 유용성을 가지는가에 대한 마지막 질문은 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)의 수학과 교과역량 중 '태도 및 실천 역량'과 '창의・융합 역량'을 강조하는 차원에서 제시한 문항이었다. 분석 결과, P3을 비롯한 7명만이 수학 내적 측면인, '방정식의 해를 보장한다'는 측면에서 가치가 있다고 답했으며, P8을 비롯한 6명은 수학 외적 측면인, '전기, 물리, 항공 분야에서 활용된다고 알고 있다'는 응답을 하였다. 나머지 대부분의 반응들은 '잘 모르겠다'였다. 복소수가 가지는 대수적 완비성의 가치와 양자역학, 전기학 분야에서 활용되는 복소수의 유용성에 대한 예비교사들의 지식이 많이 부족한 것을 확인할 수 있었다.

2. 오류 확인하기 단계의 교사지식

복소수에 대한 학생들의 오류 해석하기는 첫 번째 단계인 '오류 확인하기' 단계로 시작된다. 오류 확인하기 단계는 학생들의 반응에 수학적

오류가 있는지를 판단하고, 오류의 원인을 수학적으로 해석하는 과정이다. B형 오류 해석 검사도구의 각 문항에 대해 오류라고 판단한 사례와 아니라고 판단한 사례로 분류하고 예비교사들이 제시한 판단 근거의 핵심적인 표현을 중심으로 분석하였다.

먼저 1번 문항 '복소수는 제곱해서 음수가 되는 수이다'라는 학생 반응에 대해, 대다수의 예비교사가 오류라고 판단하였지만, 수학적 근거의 적절성에는 차이를 보였다. 4명만이 '제곱해서 음수가 되는 수는 순허수이다. 복소수는 $a+bi$ 꼴로 표현되는 수이므로 제곱했을 때 양수도 음수도 아닌 경우가 있다'라고 답하였고, 대부분의 예비교사들(27명)은 반례를 보이는 방식으로 근거를 제시하였다. 예를 들어, P5는 '$(1+i)^2=2i$ 경우는 허수를 제곱했지만 음수인지 양수인지 판단할 수 없기 때문에'라고 하였다. 특히 P7은 '실수 3은 복소수이지만, 제곱하면 양수이기 때문에'라는 반례를 제시하였다. 만약 P7과 같은 반응은, 모든 복소수를 제곱하였을 때 양수 또는 음수로 판단 할 수 있을 것이라는 위태로운 주장으로 해석된다. 즉 불완전한 반례로 볼 수 있으므로 수학적으로 부적절한 근거라고 하겠다. 오류가 아니라고 판단한 4명(P6, P17, P23, P27) 중 P17은 '복소수 x가 $x^2=-1$을 만족하므로 복소수의 제곱은 음수이기 때문에'라고 기술하고 있었다. P17은 '복소수$=i$'라는 제한된 인지도식을 가지고 있다고 할 수 있으며, 복소수의 외연이 $a+bi(a,b$는 실수)로 확장되지 못한 상태라고 할 수 있다.

2번 문항은 기존 체계의 성질을 일반화한 오류를 판단하는 문항으로, '교과서에 제시된 '$0i=0$으로 정한다'는 당연한 것을 약속하고 있으므로 불필요하다'라는 학생 오류에 대해 예비교사들이 어떻게 판단하는지를 조사하였다. 이 문항에 대하여 30명의 예비교사들이 오류하고 판단하였고, 6명은 오류가 아니라고 판단하였다. 그러나 오류라고 판단을 내린 경우에도 판단의 근거가 부적절한 사례들이 다수 관찰되었다. P5를 비롯한 9명만이 '실수에서 성립하는 성질인 $0\times a=0$을 새로운 수인 허수가 만족하는지 알 수 없기 때문에 정의할 필요가 있다'는 설명을 제시하였다(*Figure* 2 참조).

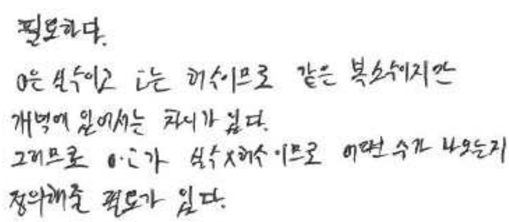


***Figure* 2.** error judgment of P5 for Question 2

반면에 오류라고 판단을 내렸음에도 9명은 부적절한 설명을 제시하였으며, 13명은 그 이유를 제시하지 못하였다. 부적절한 설명으로는 '당연한 것도 정의해야 하기 때문에', '교과서에 불필요한 것은 없기 때문에' 등이 있었다. P6을 비롯한 6명의 예비교사는 '0에 어떤 수를 곱하여도 항상 0이기 때문에 불필요하다'는 반응에 동의하고 있었다. 이러한 사례는 i가 실수가 아닌 새로운 수라는 것을 인식하는 것과 실수 체계의 성질과 구분하여 새로운 복소수 체계의 성질을 검토해야 함을 인식하는 것이 별개임을 보여준다. 실수 체계에서 성립한 성질을 새로운 복소수 체계에서 어떤 가정 또는 증명도 없이 무조건적으로 일반화하는 것에 대해 엄밀하게 그 논리성을 확인해보는 수학적 태도가 필요하다고 할 수 있다.

복소수의 대소관계에 대한 오류 문항인 3번에

대해서 예비교사 8명이 오류가 아니라고 판단하였다. $i < i+4$가 참이라고 답한 P18을 비롯한 8명의 예비교사들은 ‘양변의 동일한 i에 대해 우변에만 4를 더했기 때문에’, ‘양변에서 i를 똑같이 뺀 식 $0 < 4$가 참이 되기 때문에’와 같은 수학적으로 잘못된 근거를 제시하였다. 약 29%에 해당하는 오답 비율은 이스라엘 고등학생을 대상으로 조사한 Tirosh & Almog(1989) 연구에서의 오답 비율 96%와는 상당한 차이를 보이고 있다. 반면에 오류라고 판단한 대부분의 예비교사들(28명)은 그 근거로 ‘복소수의 경우에는 대소관계를 정할 수 없다’와 같은 일반적인 진술을 제시하였다. 일부 예비교사들은 ‘허수는 크기가 없으므로 대소 관계를 정할 수 없다’는 식의 동어반복적인 진술을 하기도 하였다. 대부분의 답안에서 복소수가 왜 대소 관계를 정할 수 없는지에 대한 세부적인 설명이 제시되지 않은 관계로, 오류가 있다고 판단한 P14와 다음과 같은 인터뷰를 진행하였다.

연구자: 부등식 $i < i+4$는 참이다는 학생 반응에 틀리다고 하셨어요.
P14: 수직선에서 왼쪽에 있냐 오른쪽에 있냐 두 개를 비교했을 때 더 왼쪽에 있는 것이 오른쪽에 있는 것보다 작은 수! 이렇게 배웠거든요. 처음에 배울 때! 제 기억에는 그렇습니다.
연구자: 네...
P14: 그런데 i는 수직선에 찍을 수가... 물론 i랑 $i+4$가 어찌 보면 숫자를 비교할 수도 있을 것 같아요. 똑같은 i에 얘는 4를 더 한 거니까 더 크다고 생각할 수는 있지만... 표현을 못하기 때문에 못한다고 생각...
연구자: 표현을 못한다는 것은 무슨?
P14: 수직선요. 수직선에 표현할 수 없기 때문에 크기 비교를 못해요.
연구자: 그럼 수직선에 표현할 수 있느냐 없느냐가 크기 비교를 할 수 있느냐 없느냐를 판단하는 근거가 된다는 거네요?
P14: 네.

인터뷰에서 P14는 복소수의 대소 관계를 정할 수 없는 이유가 ‘수직선에 나타낼 수 없기 때문’이라고 답함으로써 대소 관계를 수직선 표현과 동일시하는 이해를 보여주고 있다. 물론 수직선은 실수를 일대일 대응시켜 시각화한 수학적 모델이므로 실수의 대소관계에서는 P14의 생각이 틀리지 않다. 다만 이러한 제한된 이해는 주어진 수가 지수나 로그, 삼각함수 등과 같은 함수적 표현으로 제시된 경우나 문자를 사용한 다항식의 대소관계에 적용하기 어렵다는 단점이 있다. 최소한 대소관계 $a > b$이 $a-b > 0$와 동치임을 이해하고 적용할 수 있어야 할 것이다. 또한 실수의 대소 관계를 수직선상의 위치로 기하적으로 해석했듯이, 복소수의 대소관계를 복소평면상의 위치로 기하적으로 해석하는 시도는 한계에 부딪힐 것이다. 복소수 $a+bi$의 크기, 즉 절댓값을 $\sqrt{a^2+b^2}$로 정의했을 때, $i+4$의 절댓값은 $\sqrt{17}$이고, i의 절댓값은 $\sqrt{1}$이므로 $i < i+4$라고 할 수 있는가? 따라서 복소수에서 대소 관계를 정할 수 없는 이유는 고등수학에서 순서 공리로 설명하는 것이 타당하다. 그러나 복소수의 대소 관계를 정할 수 없는 이유를 복소수가 순서체가 아님을 근거로 제시한 사례는 P22 단 한 명에 불과하였으며, P8과 P35는 3단계 ‘피드백 제시하기’ 답안에서 위와 유사한 과정을 유도하고 있다. 이는 대수학과 복소해석학 등 고등수학에 대한 학습 경험이 복소수 개념의 깊이 있는 이해로 연결되는 것은 아니라는 것을 보여준다.

4번 문항은 ‘$a > 0$에 대해 $(\sqrt{a}\,i)^2 = (\sqrt{a})^2 i^2 = -a$와 $(-\sqrt{a}\,i)^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a$이므로 $-a$의 제곱

근은 $\pm\sqrt{a}i$라는 것은 옳다'는 학생 반응에 대해 논리적 전개 오류를 판단하는 문항이었다. 이 문항에 대해 논리적 오류가 있다고 판단한 사례는 7명에 불과하였다. P17은 '$\sqrt{a}$일 때 $a \in R$, $a < 0$일 수 없기 때문에', P31은 '제곱근의 정의에 모순이 생기기 때문에, 즉 a의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$이고 이것은 $a > 0$ 일 때만 성립하기 때문에'라는 근거를 제시하였다. 두 경우 모두 근호 안의 음수는 논리적으로 모순이라는 근거로 오류 판단을 하고 있음을 알 수 있다. 나머지 5명 또한 '지수법칙은 밑수가 0보다 커야하고 1이 아니어야 하는데 i는 대소 관계를 알 수 없으므로' 등의 부적절한 근거를 제시하였다. 결국 음수의 제곱근을 구하는 상황에서 이미 구한 것으로 취급하는 논리적 모순을 지적하는 사례는 없었다. 논리적으로 문제가 없다고 답한 29명 중에서, '맞는 것 같다'고 기술한 P13과 다음과 같은 인터뷰를 진행하였다.

연구자: (문항 4를 가리키며) 이것이 맞는 것 같다고 하셨잖아요.
P13: 네네.
연구자: 계산과정이 맞다는 말씀이세요? 아니면 음의 제곱근을 구하는 방법이 맞다는 말씀이세요?
P13: 음...저...이걸 쓸 때에는 그냥 방법이 맞아서 맞다고 생각한 것 같아요.
연구자: 음. 제곱근을 구하는 방법이요?
P13: 네네. 방법요.
연구자: 그럼... 마이너스 a의 제곱근이 이것 말고는 없다는 건가요?
P13: 네. 두 개밖에 없잖아요. 제곱근은... 플러스, 마이너스 하나씩요.
연구자: 그건 루트 a에서 a가 양수일 때 아니었을까요?
P13: 네... 근데 음수여도 똑같잖아요...

인터뷰에서 P13은 $-a$의 제곱근도 양수 a의 제곱근과 마찬가지로 당연히 두 개라고 생각하고 있었다. 이 항목에 대한 인터뷰가 끝날 때까지 음수의 제곱근을 이미 구한 것으로 취급한 논리적 오류를 인식하지 못하는 모습을 보였다. 음수 $-a$의 제곱근을 구하는 과정은 다음과 같을 것이다. $-a$의 제곱근을 x라 놓으면, 방정식 $x^2 = -a$가 성립한다. 이 방정식을 풀면, $\dfrac{x^2}{a} = -1$, $\dfrac{x^2}{a} = i^2$, $\dfrac{x}{\sqrt{a}} = \pm i$로부터 $x = \pm\sqrt{a}i$를 유도할 수 있다. 아쉽게도 논리적 학생 반응의 오류를 지적한 7명의 사례에서도 위와 같은 답변은 찾아볼 수 없었다.

마지막으로 5번 문항 '방정식 $x^2+1=0$의 해로서 허수 i를 도입했듯이, 방정식 $x^2-i=0$의 해를 위해 새로운 수를 도입해야 한다'에 대해 오류가 있다고 판단한 사례가 24명, 오류가 없다고 판단한 사례가 6명이었다. 무응답 사례가 6명으로 조사 문항들 중에서 무응답 빈도가 가장 높았던 문항이기도 하였다. 이 문항에 대해 새로운 수를 도입해야 한다고 답한 예비교사들은 '방정식을 풀면 $x = \pm\sqrt{i}$가 나오는데 허수라고 할 근거가 없다', '근호 $\sqrt{a}$에서 $a > 0$로 정의했기 때문에 근호 안에 i가 들어간 수란 존재하지 않는다', '제곱해서 -1이 나오는 수가 실수에 없어서 i를 만들었듯이, 제곱해서 i가 나오는 수는 새로 만들어야 한다'라는 근거를 제시하였다. 그런데 오류로 판단한 예비교사 중에는 '새로운 수를 계속 도입하면 혼란을 야기하기 때문에 새로운 수를 도입할 필요가 없다(P9)'는 부적절한 의견도 찾아 볼 수 있었다. 그러나 상당수의 예비교사들은 복소수의 대수적 닫힘체로서의 성질을 언급하고 있었다. '기존의 복소수 체계로 충분히 모든 방정식의 해를 구할 수 있

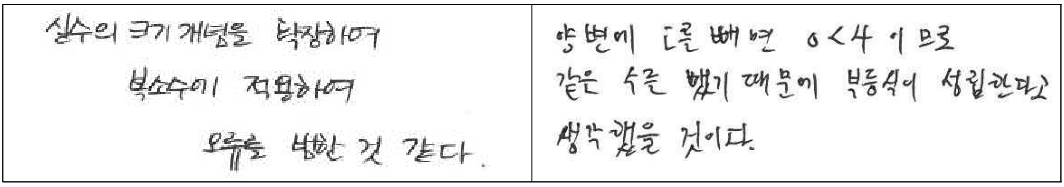


***Figure* 3.** diagnosis of P11(left) and P5(right) for Question 3

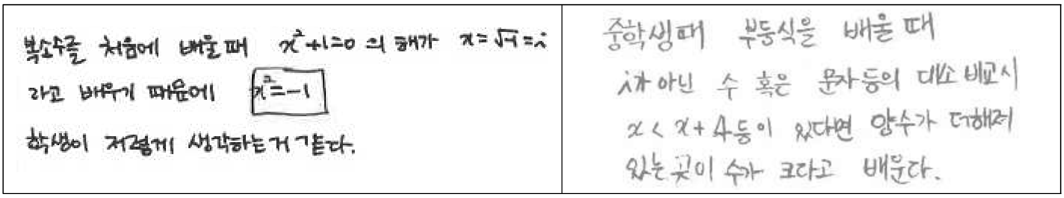
다', '대수학의 기본정리가 성립한다' 등 복소수의 대수적 완비성을 의미하는 적절한 진술을 하는 경우가 해당되었다. 본 연구에서 약 67%에 해당하는 예비교사들이 이 문항을 오류라고 판단한 것은 거의 비슷한 비율로 조사된 이동환(2010) 연구 결과보다는 다소 상승한 수치이다. 수학적으로 적절한 판단 근거를 제시한 비율 또한 이동환(2010) 연구에서는 약 7%에 불과하였던 것이 본 연구에서는 약 33%로 증가한 것으로 조사되었다. 이에 대해서는 현대대수학에서의 '대수학의 기본정리'에 대한 지식과 수학 교과교재연구 및 지도법에서의 '수의 확장과 방정식의 해의 관계'에 대한 지식이 상대적으로 잘 형성된 것으로 해석하였다.

3. 학생 진단하기 단계의 교사지식

오류 해석의 첫 단계인 '오류 확인하기' 단계가 학생들의 반응에 수학적 오류가 있는지를 판단하고 오류의 원인을 수학적으로 해석하는 과정이라면, 2단계 '학생 진단하기'는 학생들이 어떤 추론 과정을 거쳐 오류에 이르렀는지를 추측하여 설명하는 과정이다. 2단계는 오류의 원인을 학생의 심리적 요인과 사회적 맥락에서 찾는 과정이라고 할 수 있다.

예비교사들이 2단계 '학생 진단하기'에서 보인 특징들을 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 1단계에서 각 문항에 대한 오류의 원인을 정확히 판단한 경우는 학생 오류의 원인에 대해서도 적절히 진단하고 있는 것으로 조사되었다. 전반적으로 1단계 오류 확인하기에서 학생 반응의 오류를 수학적 근거와 함께 정확하게 지적한 예비교사들이 2단계에서 부적절한 진단을 내린 경우는 찾아보기 어려웠다. 예를 들어, 부등식 $i < i+4$에 대해서 오류라고 판단한 28명은 '실수의 크기 개념을 그대로 복소수에 적용했을 것 같다'거나 '동일한 i에 우변에만 양수 4를 더했다고 생각했을 것 같다', '부등식의 양변에서 i를 똑같이 빼서 참인 부등식을 얻었을 것 같다' 등의 추측을 제시하였다(*Figure* 3 참조).

둘째, 1단계에서 오류 판단을 적절히 제시하지 못한 경우뿐 아니라 오류 판단 자체를 제대로 하지 못한 경우에도 2단계에서 적절한 진단을 내리는 경우가 다수 있었다. 이로 인해 오류 해석 3단계 중에서 학생 진단하기 단계가 예비교사들이 적절한 답변을 제시한 비율이 가장 높았던 단계이기도 하였다. 이번 검사에서 오류가 있다고 판단한 사례가 가장 적었을 뿐 아니라 논리적 모순을 정확하게 지적해낸 사례가 없었던 4번 문항에 대해서도 대부분의 예비교사들은 학생들의 사고 과정에 대해서만큼은 적절하게 추측하고 있었다. 이 문항에서 논리적 오류를 지적하였으나 적절한 판단 근거를 제시하지 못했던 7명은 학생 오류의 원인에 대해서 '어떤 수의 제곱근을 구할 때, 그 수의 범위를 생각하지 못한 것 같다', '실수만 생각해서 지수법칙을 사용해


복소수를 처음에 배울때 $x^2+1=0$ 의 해가 $x=\sqrt{-1}=i$
라고 배우기 때문에 $\boxed{x^2=-1}$
학생이 저렇게 생각하는거 같다.

중학생때 부등식을 배울 때
i가 아닌 수 혹은 문자등의 대소 비교시
$x < x+4$ 등이 있다면 양수가 더해져
있는 곳이 수가 크다고 배운다.

***Figure* 4.** diagnosis of P5 for Question 1(left) and diagnosis of P18 for Question 3(right)

왔기 때문에 복소수에서도 지수법칙 $(ab)^2=a^2b^2$ 이 성립할 것이라고 생각한 것 같다' 등의 추측을 제시하였다. 그런데 이와 같은 학생 반응에 대한 진단 내용은 오류 판단 자체를 제대로 하지 못한 예비교사들도 동일하게 나타났다. P26을 비롯한 일부 학생들은 '복소수에서도 지수법칙이 성립할 것이라고 생각했기 때문에'라고 답하였다. 이외에도 다수의 학생들이 '$+\sqrt{a}\,i$와 $-\sqrt{a}\,i$를 제곱했을 때 모두 $-a$가 되므로 $-a$의 제곱근이 $\pm\sqrt{a}\,i$라고 생각했을 것이다'이라고 추측하였으며, P8은 1단계와 동일한 답안인 '$x^2=-a$로부터 $x=\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$이기 때문에 맞다고 생각했을 것이다'라고 추측하였다.

셋째, 예비교사들이 학생의 사고를 진단하는 과정에서 학생들의 선행지식 또는 교육과정 지식을 사용하는 사례들이 관찰되었다. *Figure* 4에서 보는 바와 같이, P19는 '복소수는 제곱해서 음수가 되는 수이다'라는 학생 반응에 대해서 학교수학에서 복소수를 도입하는 방식과 그로 인해 학생들이 가지게 된 선행 개념에 기반하여 학생 사고의 원인을 추측하였다. 또한 P18은 부등식 $i < i+4$이 참이라는 학생 반응에 대해서, 부등식의 성질에 대한 중학교 교육과정과 이에 대한 학생들의 학습경험을 연계하여 추측하고 있었다. 이외에도 5번 문항 '방정식 $x^2-i=0$의 해로서 새로운 수를 도입해야 한다'는 학생 반응에 대해서 '중고등학교에서 계수가 실수인 이차방정식만을 다루기 때문에', '제곱근 안에 실수가 들어가는 경우만 학습했기 때문에'와 같은 선행지식 또는 교육과정과 연계한 진술을 확인할 수 있었다.

넷째, 예비교사들은 학생을 진단하는 과정에서 내용교수지식, 특히 KCS를 주도적으로 발현하고 있었다. Ball et al.(2008)에 따르면, KCS는 학생들이 특정 내용의 학습에서 일반적으로 흔하게 범하는 오류를 예측하거나 학생들이 어떤 추론 과정을 거쳐 오류에 이르렀는지를 설명할 수 있는 지식이다. 앞에서 제시된 다수의 사례를 통해서도 예비교사들이 복소수 학습에서 흔하게 발생할 수 있는 오류들을 정확하게 예측하는 모습을 확인할 수 있다.

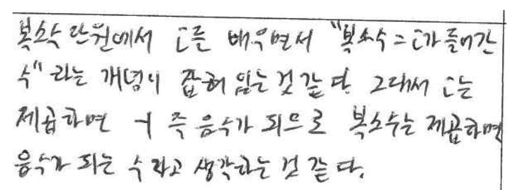

복소수 단원에서 i를 배우면서 "복소수 = i가 들어간
수"라는 개념이 잡혀 있는 것 같다. 그래서 i는
제곱하면 -1 즉 음수가 되므로 복소수는 제곱하면
음수가 되는 수라고 생각하는 것 같다.

***Figure* 5.** diagnosis of P5 for Question 1

특히, *Figure* 5의 P5의 경우에는 실제로 고등학생들이 흔하게 가지고 있는 오개념인 '복소수 $=i$가 들어간 수'를 언급하면서 복소수의 제곱을 i의 제곱과 동일시하고 있다는 상당히 깊이 있는 진단을 기술하고 있다. 이외에도 '복소수와 순허수를 혼동하는 것 같다(P9)', '$0 \cdot a=0$ $(a \in R)$에서 문자 a대신 i를 써도 된다고 생각한 것 같

다(P29)', '$i < i + 4$에서 복소수 i를 x와 같은 문자와 똑같이 생각한 것 같다(P22)' 등의 사례는 예비교사들이 복소수 학습에서 일반적으로 발생하는 오류들을 정확히 예측하고 있을 뿐 아니라 학생들이 어떤 추론 과정을 거쳐 오류에 이르렀는지를 잘 설명하고 있음을 보여준다. 아마도 예비교사들은 고등학교에서 처음 복소수를 학습했던 경험을 떠올렸을 것이고, 본인들이 직접 그 과정에서 겪었을 복소수 개념 관련 오개념과 어려움, 이를 극복했던 개인적 학습 경험들이 2단계 학생 반응 오류들을 진단하는 지식의 토대가 되었을 것이라고 해석하였다.

4. 피드백 제시하기 단계의 교사지식

오류 해석의 3단계 '피드백 제시하기'는 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 주어진 문제에 대한 올바른 수학적 설명을 하는 과정이다. 오류 해석 검사의 5문항에 대해 예비교사들이 보인 특징들을 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 예비교사들은 오류 확인하기의 수학적 근거와 학생 진단하기 결과를 통합하여 학생들의 오류를 교정할 수 있는 설명을 제시하고 있었다. *Figure* 6에서 보는 바와 같이, P18과 P1이 제시한 피드백 진술은 각각 1단계와 2단계에 진술한 내용을 포함하는 것이다. P18의 경우는 전반부에, P1은 후반부에 학생 오류의 원인을 진단한 내용을 각각 서술하고 있다.

이는 1단계에서 오류 여부와 그 수학적 근거를 확인하게 하고, 2단계에서 학생이 오류에 이르게 된 원인을 추측하게 한 후 최종적 단계에서 학생들에게 필요한 피드백을 제시하게 했던 3단계 절차가 예비교사들의 오류 해석과 처방에 효과적일 수 있음을 보여준다. 예비교사들은 제시된 검사도구에서 오류 해석의 3단계를 모두 거치도록 요청받았으며, 이를 단계적으로 수행함으로써 오류를 분석, 진단, 처방하는 체계적인 오류 해석을 경험하였다.

둘째, 예비교사들이 제시한 피드백 진술은 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 제공되었다. 예비교사들이 피드백 대상이 고등학생임을 염두에 두고 처방하고 있다는 것을 그들이 사용한 용어와 수식, 어휘, 문체 등에서 포착할 수 있었다. 일부 예비교사들은 1단계에서 제시한 오류 판단에 대한 수학적 근거를 3단계에서 학생이 이해할 수 있도록 진술 내용을 변환하기도 하였다. 예를 들어, *Figure* 7의 P36은 오류 확인하기 단계에서 제시했던 일반적 표현과 제곱이 음수가 되는 일반적 조건 유도하기 전략을 피드백 제시하기 단계에서는 구체적인 복소수 표현과 반례 제시하기 전략으로 변환하고 있다. 이는 P36이 피드백 대상인 고등학생의 이해 수준에 맞추어 수학적 표현과 전략을 유연하게 선택하고 이를 반영하였음을 보여준다.

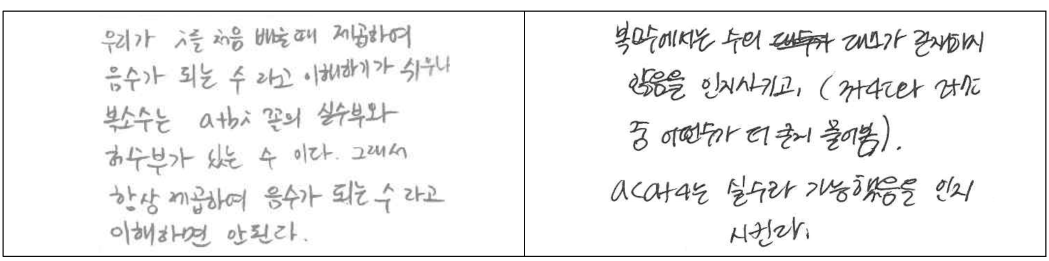


***Figure* 6.** feedback of P18 for Question 1(left) and feedback of P1 for Question 3(right)

1단계	3단계
그렇지 않다. $(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 이므로 $ab \neq 0$ 이라면 음수라 할 수 없다.	만약 $2+i$ 라면 이는 복소수 이지만, $(2+i)^2 = 4+(-1)+4i$ $= 3+4i$ 이므로 음수가 아니다.

***Figure* 7.** error judgment and feedback of P36

셋째, 오류에 대한 부적절한 수학적 근거는 3단계에서 잘못된 피드백 형태로 학생들에게 직접적으로 전달되고 있었다. 1단계에서 오류 판단 과정에서 드러난 복소수 개념에 대한 미흡한 교과내용지식이 학생들이 오류를 교정하여 복소수에 대한 개념적 이해를 도모할 기회를 방해하는 것이다. 예를 들어, *Figure* 8의 P19와 *Figure* 9의 P24는 각각 복소수의 대소관계와 복소수의 대수적 완비성에 대한 수학내용지식 부족으로 교정이 필요한 학생에게 오히려 잘못된 피드백을 제공하고 있다.

1단계	3단계
참이다. 같은 수에 양수인 4를 더했기 때문에 원래 수보다 더한 값이 더 크다.	양변에 $-i$를 더한다. $i+(-i) < (i+4)-i$ $0 < 4$.

***Figure* 8.** error judgment and feedback of P19

2번 문항	3번 문항
복소수의 연산에서 실수와 복소수 사이에는 모든 연산이 정의되지 않는다.	i는 4와는 다른 수체계이다. i와 숫자 4를 더해서 연산을 하고, i보다 크다고 정리하는 것은 올바르지 않다.

***Figure* 9.** feedback of P24 for Question 2 and 3

LMT(2011)도 지적한 바와 같이, 교사의 수학내용지식과 수학적 언어 등이 부족하여 학생들의 학습 기회를 제한하게 되면, 교정 받지 못한 수학적 오류들은 복소수뿐 아니라 이후의 수학 학습에서 오개념과 오류들을 지속적으로 발생시킬 것이다. 더군다나 복소수 개념은 역사적 발달 과정에서 상당한 인식론적 장애를 발생시켜온 바, 복소수를 학습하는 과정에서 재현될 수 있는 오개념과 오류들이 학생들의 인지구조 내에 고착되지 않도록 신속하고 정확한 교정이 필요할 것이다.

요컨대 오류를 피드백하는 과정에서는 예비교사들의 수학내용지식과 내용교수지식이 복합적으로 발현되고 있음을 알 수 있다. 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 용어와 수식 등의 수학적 표현을 제시하고 전략을 선택하는 것은 내용교수지식과 관련이 있다. 그런데 오류 해석에서 보다 기초를 이루는 것은 수학내용지식이라고 할 수 있다. 복소수의 개념과 성질, 대수적 완비성 등에 대한 복소수를 가르치는데 필요한 교과내용지식이 미흡하다면, 학생들의 오류를 확인하고, 진단하고, 피드백하는 과정 및 결과는 부적절할 것이며, 이는 학생들의 학습에 장애로 이어질 뿐이다.

V. 결론

본 연구는 복소수에 관한 학생들의 오류를 예비교사들이 어떻게 확인하고 진단, 피드백하는지를 분석하여 복소수 개념에 관한 오류 해석에 필요한 교사지식의 특징을 밝히는 것을 목적으로 하였다. 학생 오류 해석에 대한 예비교사들의 반응을 분석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 오류 확인하기 단계의 교과내용지식이

학생 진단과 교정의 방향과 정확성을 결정하는 핵심적 지식임을 확인할 수 있었다. 1단계에서 제시되었던 오류에 대한 부적절한 수학적 근거는 학생의 원인 진단과 오류 피드백 과정에서 잘못된 피드백 형태로 학생들에게 직접적으로 전달되고 있었다. 이는 오류 판단 과정에서 드러난 복소수 개념에 대한 미흡한 교과내용지식이 학생들의 복소수에 대한 개념적 이해에 장애 요인이 된다는 것을 의미한다. LMT(2011)도 지적한 바와 같이, 교사의 수학내용지식의 부족은 학생들의 수학적 오류들을 교정받지 못한 채로 고착시킴으로써 이후의 수학 학습에서 오개념과 오류들을 지속적으로 발생시킬 위험이 있다. 복소수의 개념과 성질, 대수적 완비성 등에 대한 복소수를 가르치는데 필요한 교과내용지식이 미흡하다면, 학생들의 오류를 확인하고, 진단하고, 피드백하는 과정 과 결과가 적절하지 못할 것이며, 이는 학생들의 학습에 장애로 이어질 가능성이 높다.

둘째, 각 단계에서 두드러지게 발현되는 지식의 범주가 관찰되었다. 오류 확인하기 단계에서는 교과내용지식이, 학생 진단하기 단계에서는 KCS가 주로 발현되었으며, 피드백 제시하기 단계에서는 두 지식이 복합적으로 발현되었다. 물론 일부 예비교사들은 학생 진단하기에서 교육과정지식을 동원하기도 하였으나, 주로 학생들의 선행지식에 기반하여 학생들이 오류에 이르게 된 사고과정을 추측하였으며, 복소수 학습에서 일반적으로 발생하는 오류들을 정확히 예측하는 모습도 관찰되었다. 이에 대해서 예비교사 본인들이 과거 복소수 학습 과정에서 직접 겪었을 복소수 관련 오개념과 오류, 이를 극복했던 경험들이 학생을 진단하는 지식의 토대가 되었을 것이라고 해석하였다. 또한 예비교사들은 본인이 1단계에서 제시한 수학적 근거를 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 제시하였으며, 일부 예비교사들은 용어와 수식, 해결 전략 등을 변환하여 설명하는 모습을 보였다.

셋째, 복소수에 대한 개념적 이해를 도울 수 있는 복소수 표현에 대한 명확한 지식이 교사지식으로서 요구된다. 예를 들어, 복소수가 '$a+bi$ 꼴로 나타내어지는 수'라는 정의가 고등학교 교과서에 명확히 제시되어 있음에도 불구하고, A형 복소수 개념 검사에서 $a+bi$꼴을 사용하여 복소수의 정의를 언급한 사례가 8명(22.2%)에 불과하였다. 이러한 결과는 B형 오류 해석 검사에서 '복소수는 제곱해서 음수가 되는 수'라는 학생 오류에 대해 부적절하게 피드백하는 결과로 이어짐을 확인할 수 있다. 즉 P7이 반례를 통해 제곱해서 양수가 되는 실수를 보여주겠다고 한 것은 '모든 복소수는 양수 또는 음수'라는 또 다른 오개념으로 이어질 수 있기 때문에 부적절하다. $a+bi$에서 $a=0$인 경우와 $b=0$인 경우, $a\neq 0$, $b\neq 0$인 경우를 모두 고려하여 제곱해서 음수와 양수를 판단할 수 없는 수, 허수인 복소수가 존재한다는 것으로 교정이 필요하다. 다른 예로, P17은 '복소수= i'라는 제한된 인지도식을 가지고 있음으로써 복소수의 외연이 $a+bi$ (a,b는 실수)로 확장되지 못한 상태라고 할 수 있다. 복소수와 같이 매우 추상적인 개념의 경우에는 표현에 의존할 수밖에 없기 때문에 복소수 표현에 대한 명확한 교사지식이 필요하다.

넷째, 확장된 복소수 체계가 기존의 실수 체계와 조화를 이루기 위해 어떤 조건이 선행되는지에 대한 교사지식이 요청된다. 이는 새로운 지식체와 기존의 지식체 간의 조화와 부조화를 명확하게 인식할 필요가 있다는 것을 의미한다. 예를 들어, 복소수 도입 맥락에서 '$0i=0$으로 정한다'는 약속이 왜 필요한지에 대한 근거를 논리적으로 제시한 예비교사가 9명(25%)에 불과했다. 심

지어 6명은 이런 정의가 불필요하다고 답하였다. 다른 예로, $i < i+4$가 참이라는 학생의 반응에 오류로 판단한 32명의 예비교사들 중 대다수가 학생이 왜 오류를 범했는지에 대한 원인을 바르게 지적하면서도 왜 기존의 실수 체계에서 성립하던 대소 관계를 새로운 복소수 체계에서 적용할 수 없는가에 대한 적절한 수학적 근거를 제시하지 못했다. 실수 체계에서 성립한 성질을 새로운 복소수 체계에서 어떤 가정 또는 증명도 없이 무조건적으로 일반화하는 것에 대해 엄밀하게 그 논리성을 확인해보는 수학적 태도가 필요한 것이다.

다섯째, 복소수 지도에서 복소수 정의 및 연산 도입에 비판적 접근이 필요하다. 본 연구의 검사 문항에 내포된 오류를 제대로 파악하지 못한 채, 학생 반응에 동의해버리는 사례가 상당수 존재하였다. '$0i = 0$으로 정한다는 것은 불필요하다'는 것에 대해 비판적으로 접근하지 못한 채 오류가 없다고 판단하거나, 음수 $-a$의 제곱근이 $\pm\sqrt{a}\,i$임을 유도하는 과정의 논리적 오류를 지적하지 못한 채 오류가 없다고 판단하는 것이 그 사례들이다. 기존에 성립했으니까 이번에도 당연히 성립한다거나 계산과정의 오류가 없으니 옳다는 식의 판단보다는 비판적인 관점에서 복소수 정의와 연산을 파악하는 것이 필요하다.

여섯째, 수학 내적 관점과 수학 외적 관점에서 복소수의 가치를 인식하고, 복소수의 유용성을 이해하는 것이 필요해 보인다. A형 복소수 개념 검사에서 이에 대해 질문했을 때, 약 19%(7명)만이 수학 내적 차원에서 '방정식의 해를 보장한다'는 측면을 이야기하였고, 약 17%(6명)은 수학 외적 차원에서 '전기, 물리, 항공 분야에서 활용된다'고 응답하였다. 80%가 넘는 대부분의 반응은 '잘 모르겠다'였다. 복소수가 가지는 대수적 완비성의 가치와 양자역학, 전기학 분야에서 활용되는 복소수의 유용성에 대한 예비교사들의 지식이 많이 부족한 것을 확인할 수 있었다. 이러한 미흡한 지식은 B형 오류 해석 검사에서 부적절한 오류 판단과 피드백으로 이어짐을 확인할 수 있다. 예를 들어, 약 33%의 예비교사들이 '방정식 $x^2 - i = 0$의 해를 위해 새로운 수를 도입해야 한다는 의견을 제시한 것이다. 복소수 체계는 제곱근을 비롯한 모든 연산에 닫혀있는 대수적 닫힘체로서 더 이상 확장이 필요 없는 대수적으로 완비된 집합이다. 고등학교 과정에서 복소수를 배운다는 것은 방정식이 그 차수만큼의 해를 갖는다는 사실을 암묵적으로 지도하고 있는 것이다. 물론 방정식 $x^2 - i = 0$이 고등학교 교육과정을 벗어나는 내용이기는 하지만, 얼마든지 고등학생들이 의문을 갖고 제기할 수 있는 질문이라는 점에서 교사들은 이에 답할 수 있는 교과내용지식이 준비되어 있어야 한다. 복소수의 가치 및 유용성에 대한 지식은 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)의 '태도 및 실천 역량'과 '창의 · 융합 역량'을 강조하는 차원에서도 복소수 지도에 필요한 교사지식이라고 할 수 있다.

본 연구는 사전에 연구대상자들의 오류에 대한 교수 신념을 확인해 보았으며, 그 결과 약 94%(34명)가 '처방해야 한다'를 선택하였음을 기술한 바 있다. 대부분의 예비교사들은 학생들의 오류는 필연적이므로 학습과정에서 오류를 수정하는 경험을 통해 보다 견고한 지식을 얻을 수 있다는 생각을 가지고 있었다. 이러한 신념은 오류를 긍정적인 관점에서 접근하여 또 다른 학습의 기회로 생각하고 있다고 보여진다. 하지만 교사들이 오류에 대해 제대로 된 판단을 내리지 못하거나 학생의 사고과정과 원인을 추측하지 못하고 부적절한 피드백을 제공한다면, 학생들의 오류는 교정의 기회를 잃어버리고 학습의 가장

큰 장애가 될 것이다.

이상의 연구 결과로부터 학교수학에서의 복소수 지도와 관련하여 몇 가지 시사점을 생각해볼 수 있다. 복소수의 개념적 이해를 위해서, Tirosh & Almog(1989)도 강조했듯이, 실수에서 복소수로의 확장 과정에서 얻게 되는 성질과 잃게 되는 성질을 논의하게 할 필요가 있다. 이는 비단 복소수뿐 아니라, 자연수에서, 정수, 유리수, 실수, 복소수로 확장하는 모든 과정에서 공통적으로 유용한 질문이 될 것으로 보인다. 기존의 수 체계에서 성립하던 성질이 새로운 수 체계에서도 여전히 성립하는지, 아닌지를 따져보는 과정은 새로운 수 개념에 대한 깊이 있는 이해를 가져다 줄 것이다. 또한 복소수 개념의 역사적 발달 과정에서 수학자들이 어떠한 오류와 어려움에 직면하고 이를 극복했는지를 분석하는 것은 학생들의 학습과정에서 발생할 수 있는 오개념과 오류들을 적절하게 교정할 수 있는 좋은 방안이 될 것이다. 또한 학생 오류 해석에 필요한 교사지식 범주를 포함하여 복소수 지도에 필요한 교사지식을 체계적으로 탐색하고 정립할 필요가 있다. MKTc 5가지를 도출한 이동환(2010)의 연구 결과는 이에 대한 방향성을 밝혀주는 좋은 기초 자료가 될 것이다. 마지막으로 복소수 개념 학습에서 표현의 중요성을 강조해야 한다. 특히 복소평면을 비롯한 복소수의 기하적 측면의 지도를 다시 한번 고민해볼 필요가 있다. Common Core State Standards Initiative(2010)의 고등학교의 수학 규준에도 복소수와 그 연산을 복소평면에 표현하는 것을 포함하고 있다. 복소수는 매우 추상적인 개념으로 표현에 의존할 수 밖에 없는데, 역사적으로 복소수에 대한 수많은 논란에 종지부를 찍고 복소수를 하나의 수로서 인정하였던 계기는 가우스 평면에 의한 기하적 표현이었음을 고려해 볼 가치가 있다.

본 연구는 복소수에 대한 학생 오류의 해석에 초점을 맞추어 일부 예비교사들의 반응을 분석한 질적 사례 연구에 해당한다. 따라서 본 연구 결과를 일반화하여 해석하기는 어렵지만, 복소수 지도에 필요한 교사지식에 대한 기초 자료가 되기를 바라며, 복소수에 대한 학생들의 개념적 이해에도 도움이 되기를 바란다.

참고문헌

Park, S. H. & Pyo, S. S. (2012). Complex number on textbooks and Analysis on understanding state of students *The Mathrmatical Education, 51*(1), 1-19.

박선호, 표성수(2012). 교과서에 표현된 복소수와 이에 대한 학생들의 이해 실태 분석. **수학교육, 51**(1), 1-19.

Mun, J. S. & Kim, K. Y. (2015). Measuring and Analyzing Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching [MKT] of Functions. *School Mathematics, **17**(*3), 469-492.

문진수, 김구연(2015). 중등 수학교사의 함수에 대한 지식 (MKT) 측정 및 분석. **학교수학, 17**(3), 469-492.

Shin, H. Y. (2008). *Abstract Algebra for Teachers*. Seoul: Kyowoosa.

신현용(2008). **교사를 위한 추상대수학**. 서울:교우사.

Woo, J. H. (1998). *Educational basics for the school mathematics*, Seoul: Seoul national university publisher.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

Lee, D. H. (2010). *Study on mathematical knowledge* *for teaching complex numbers*. Unpublished doctorial dissertation, Seoul National University.

이동환(2010). **복소수 지도를 위한 수학지식 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Lee, J. H. (2013). *A Study on the Mathematical Knowledge of Mathematic Teachers for Teaching Complex Numbers and Equation*. Unpublished master's thesis, Korea National University of Education.

이정희(2013). **복소수와 방정식에 대한 현직 교사의 수학적 지식(MKT) 분석**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

銀林浩(2001). どうしたら**數學**ができるようになるか: 中學校編お母さんとお父さんの教育相談. 日本評論社.

전재복 역(2010). **수학공부 이렇게 하는 거야**. 서울:경문사.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 43-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1958). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Cajori, F. (1901). *A history of elementary mathematics*. Macmillan.

Common Core State Standards Initiative(2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM).

http://www.corestandards.org/ssets/CCSSI_Math%20Standards.pdf(2018.10.05.)

Conner, E., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Smith, M. (2007). Student understanding of complex numbers. *Electronic Proceedings for the 10th Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, USA.

Danenhower, P. (2006). Introductory complex analysis at two British Columbia universities: The first week-complex numbers. *Research in collegiate mathematics education VI*, 139-169.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Sage publications, inc.

Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about equivalent fractions. In Kulm, G. (Ed.), *Teacher Knowledge and Practice in Middle Grades mathematics*. (pp. 147-171). Rotterdam, Netherlands: Sense.

Flegg, G. (2002). *Numbers: Their history and meaning*. Courier Corporation.

Krantz, S. G. (2010). *An episodic history of mathematics : mathematical culture through problem solving*(Vol. 19). Maa.

남호영, 장영호 공역(2015). **문제해결로 살펴본 수학사.** 서울:경문사.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Learning Mathematics for Teaching Project (2006). *A coding rubric for measuring the mathemathical* *quality of instruction*(Technical report LMT1.06). Ann Arbot, MI: University of Michigan, School of Education.

Learning Mathematics for Teaching Project (2010). *Mathematical Quality of Instruction*(MQI) coding tool. Harvard Graduate School of education. Retrieved from http://hub.mspnet.org/media/data/MQI_062410_Summer_Final.pdf?media_000000006941,pdf(2018.10.05.)

Learning Mathematics for Teaching Project (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 25-47.

Nahin, P. J. (1998). *An Imaginary Tale*. The Story of, 1.

Nemirovsky, R., Rasmussen, C., Sweeney, G., & Wawro, M. (2012). When the classroom floor becomes the complex plane: Addition and multiplication as ways of bodily navigation. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 287-323.

Nordlander, M. C., & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(5), 627-641.

Panaoura, I., Elia, A., & Gagatilis, G. (2006). Geometric and Algebric approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 37*(6), 681-706.

Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics, 29*(3), 22-25.

Penrose, R. (2005). *The Road to Reality*, Alfred A.

Shalem, Y., & Sapire, I. (2012). Teachers' knowledge of error analysis. Johannesburg: Saide.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Smith, S. M. (1996). *Agnesi to Zeno : over 100 vignettes from the history of math*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
황선욱 역(2006). **수학사 가볍게 읽기.** 파주: 청문각.

Soto-Johnson, H., & Troup, J. (2014). Reasoning on the complex plane via inscriptions and gesture. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 109-125.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

Tirosh, D., & Almog, N. (1989). Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers. *In Proceeding of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education Paris*, France (Vol. 3, pp. 221-227).

Whithehead, (1948). *An introduction to mathematics*. Courier Dover Publications.
오채환 역(2009). **수학이란 무엇인가?.** 파주: 궁리출판.