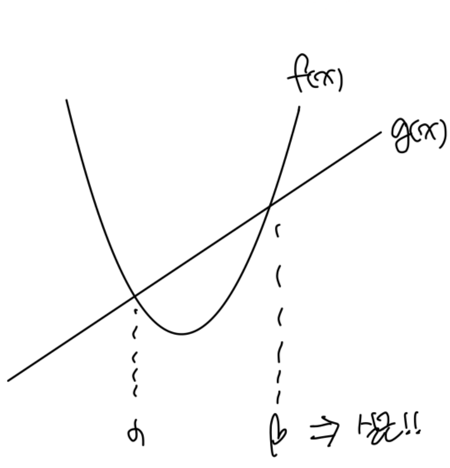
수학, 알고 있니?

이차방정식 해석하기

이차방정식에 대한 기본기

모르면 큰일나는 내용입니다!



안녕하세요 수알입니다

이번 시간에는

이차방정식과 함수의 관계에 대해 공부하겠습니다

이미 $f(x)=f(3)$에 대해 다룬 칼럼에서

어느정도 설명한 내용을 기반으로 공부할 예정이라

꼭 저 칼럼을 먼저 공부하고 오시기 바랍니다

이차방정식의 기본부터 시작해서

함수와 이차방정식의 해석 방식을 배우고

직선과의 교점을 방정식의 실근과 연관지어

1편에서 배운 함수 식세우기를 복습해보는 시간을 가집니다

그럼 시작하겠습니다.

이차방정식의 실근은 어떻게 구할까요?

가장 기본적인 이차방정식부터 해결해봅시다

$$x^2 = a$$

라는 이차방정식이 있습니다

[제곱해서 a가 되는 수] 이므로

$\pm\sqrt{a}$ 입니다

우리는 이를 [a의 제곱근] 이라고도 하죠

모든 이차방정식의 풀이는 위를 기반으로 해결하는게 근본입니다

$x^2 - 4x - 10 = 0$ 을 풀어볼까요?

먼저 인수분해가 하고싶겠지만

근본!은 완전제곱식 = a 꼴을 만드는 것입니다

즉, $(x-2)^2 = 14$ 로 만들어줍니다

$$x - 2 = \pm\sqrt{14}$$

$x = 2 \pm \sqrt{14}$ 로 해결해줍니다

여기서 근의 공식도 유도됩니다

$ax^2 + bx + c = 0$ 을

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 로 정리되는 것입니다

핵심은 완전제곱식 = a 꼴로 정리한다는 것입니다!

일반적으로 인수분해가 되는 이차방정식의 경우에는

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

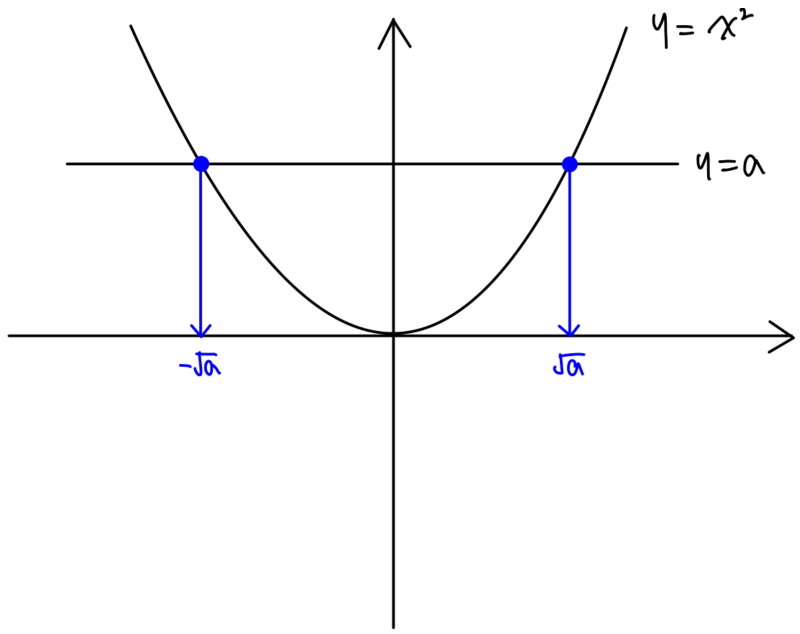
으로 표현하여 방정식의 해를

$x = \alpha, \beta$ 로 구할 수 있습니다

이번엔 위의 두 케이스를 함수의 관점에서 해석해보겠습니다

방정식 $x^2 = a$ 의 실근은

$y = x^2$ 과 $y = a$ 의 교점의 x좌표이므로

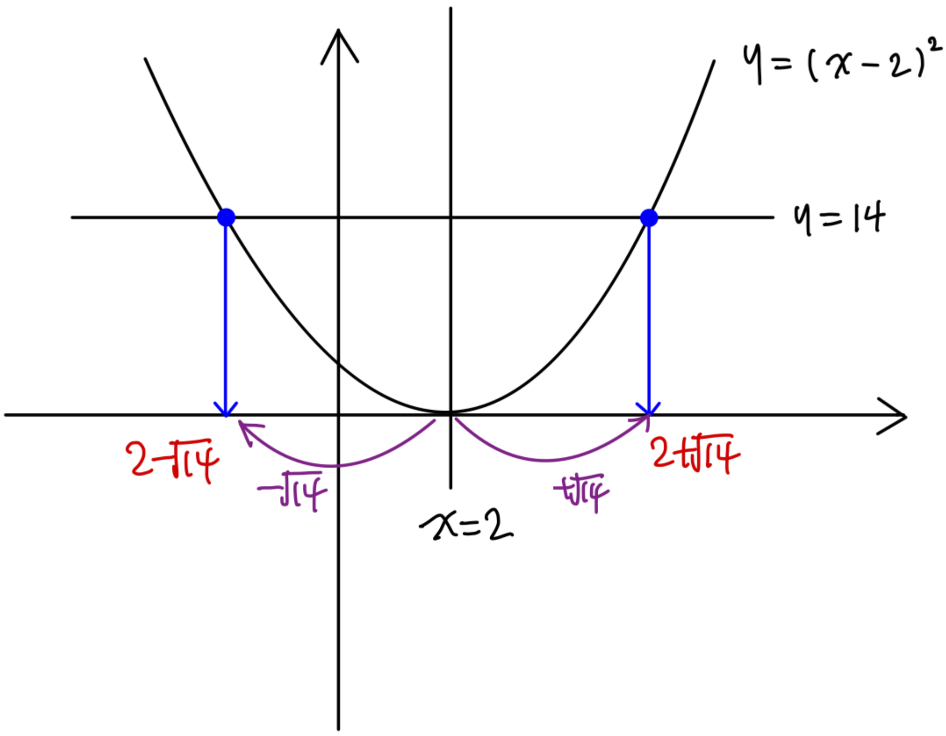


위 그림과 같이 $\pm\sqrt{a}$ 가 방정식의 근입니다

방정식 $x^2-4x-10=0$ 의 실근은

$y=x^2-4x-10$ 과 $y=0$ 의 교점의 x좌표로 이해해도 되지만

$y=(x-2)^2$ 과 $y=14$ 의 교점의 x좌표로 이해해보겠습니다



이를 통해, 위 그림과 같이

$x=2\pm\sqrt{14}$ 로 근의 공식을 쓰지 않고 구할 수 있습니다

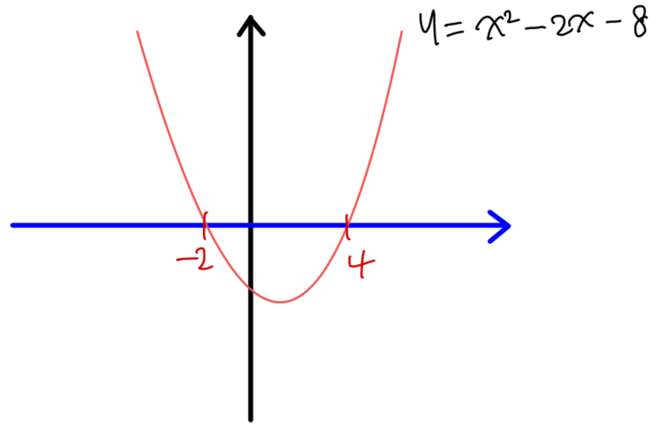
방정식 $x^2-2x-8=0$ 은 인수분해가 쉽게 되는 꼴이므로

$(x-4)(x+2)=0$ 으로 표현할 수 있어야 하고

이를 함수관계를 이용해 표현하면

$y=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ 와 $y=0$ (x축) 의 교점의 x좌표로 이해할 수 있고

그림으로 나타내면 다음과 같습니다



여기까지 이차방정식의 실근을 어떻게 구하는지

그리고 함수관계로 어떻게 이해할 수 있는지 공부했습니다

그럼 우리가 자주 쓰는 판별식은 도대체 무엇일까요?

무엇을 판별하는 것일까요?

바로 이차방정식의 실근의 갯수!를 판별하는 것입니다

우리.. 의미를 알고 쓰자구요

앞서 근의 공식을 배웠습니다

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ 로 표현됩니다

이때, $\sqrt{\ }$ 안에는 0보다 크거나 같은 것만이 실제 존재 가능합니다

즉, b^2-4ac 가 0과 비교해서

큰 지 ($b^2-4ac>0$)

같은 지 ($b^2-4ac=0$)

작은 지 ($b^2-4ac<0$)

에 따라 실근의 갯수가 달라집니다

그래서 판별식을 D라고 표현하고

$D=b^2-4ac$ 가 되는 것입니다

D > 0 인 경우 근의 공식에 따라 실근이 $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ 로 두개이고

D=0 인 경우 실근은 $-\frac{b}{2a}$ 로 한개이며

D < 0 인 경우 실근이 존재하지 않는 것입니다

다시 한 번!! 판별식은 [이차방정식의 실근의 갯수] 를 판별하는 것입니다

다음은 근과 계수와의 관계입니다

이차방정식의 실근을 구하지 않고도

두 근의 합과 두근의 곱을 계수만 가지고!알 수 있다는 것인데요

두 근이 α, β 인 이차방정식을 세워보면

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 입니다

이를 전개하면,

$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ 입니다

이를 일반적인 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$ 과 계수비교 하면

$-a(\alpha+\beta)=b$ 이고

$a\alpha\beta=c$ 이므로

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 이고

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 입니다

이 두가지를 이용하면

곱셈공식의 변형을 이용해

$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha-\beta$ 등도 구해낼 수 있습니다

이번엔 직선과 이차함수의 위치관계와

이차방정식의 실근의 갯수에 대해 공부하겠습니다

이차함수와 직선의 위치관계는 세가지로 나눌 수 있습니다

1. 서로 다른 두 점에서 만난다

2. 한 점에서 만난다 (접한다)

3. 만나지 않는다

< x축과의 관계 >

$y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = 0$ (x축) 의 교점의 갯수로 위치 관계를 파악해봅시다

교점의 갯수는 결국

방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 실근의 갯수와 같습니다

즉, 판별식을 통해

D > 0 => 실근 2개 => x축과 이차함수가 서로 다른 두 점에서 만난다

D=0 => 중근 => x축과 한 점에서 접한다

D < 0 => 실근이 없다 => x축과 만나지 않는다

와 같이 해석할 수 있습니다

<직선과의 관계>

$y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = mx + n$ 의 교점의 개수로 위치 관계를 파악해봅시다

교점의 개수는

방정식 $ax^2 + bx + c - (mx + n) = 0$ 의 실근의 개수와 같고

이를 정리하여

$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ 의 판별식을 통해 교점의 개수를 판단할 수 있습니다

D > 0 => 실근 2개 => 직선과 이차함수가 서로 다른 두 점에서 만난다

D=0 => 중근 => 직선과 이차함수가 한 점에서 접한다

D < 0 => 실근이 없다 => 이차함수와 직선이 만나지 않는다

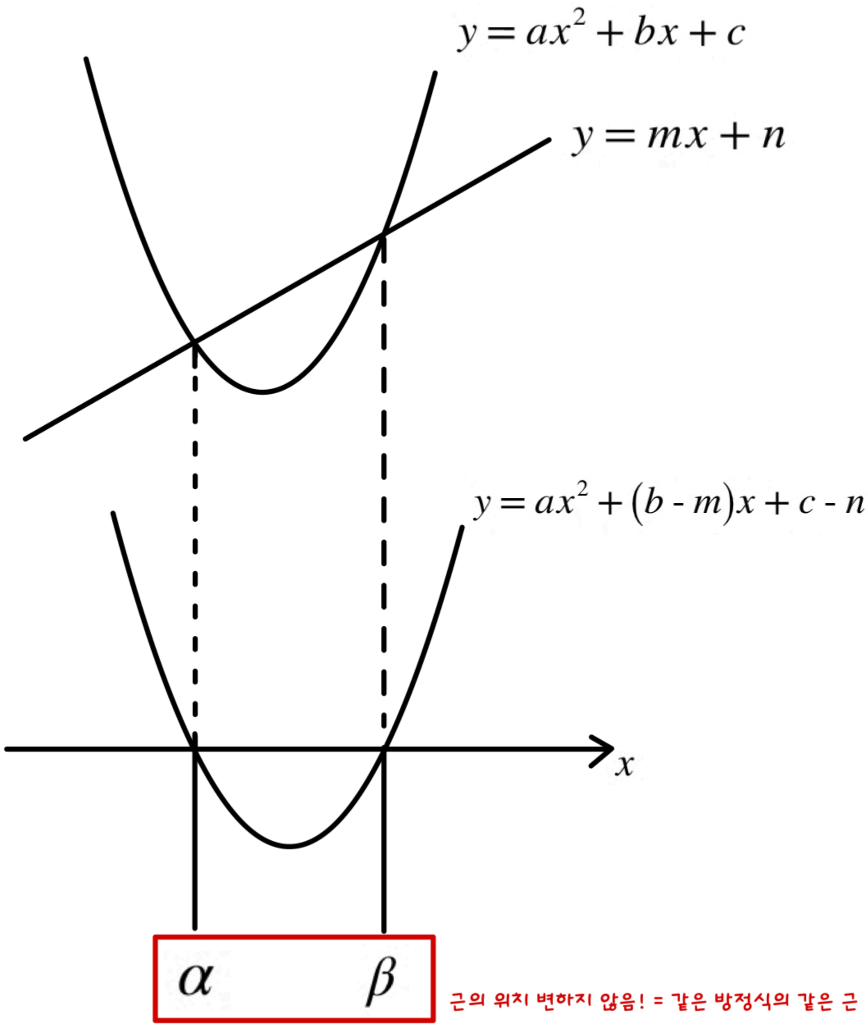
해와 같이 해석할 수 있습니다

여기서 위 방정식

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 의 실근 (α, β) 은

$ax^2+bx+c=mx+n$ 의 실근과 같으므로

이를 그림으로 표현해보면



와 같이 나타내어지고, 마치 $y=mx+n$ 이 x축 역할처럼 보이는 것을 알 수 있습니다

여기서 두 근의 중점인 위치에서 접선의 기울기가 m인 것도 이해해봅시다

증명 방법은 여러가지가 있는데

$y=ax^2+bx+c$ 의 접선의 기울기가

m 이 되는 위치를 찾아보면

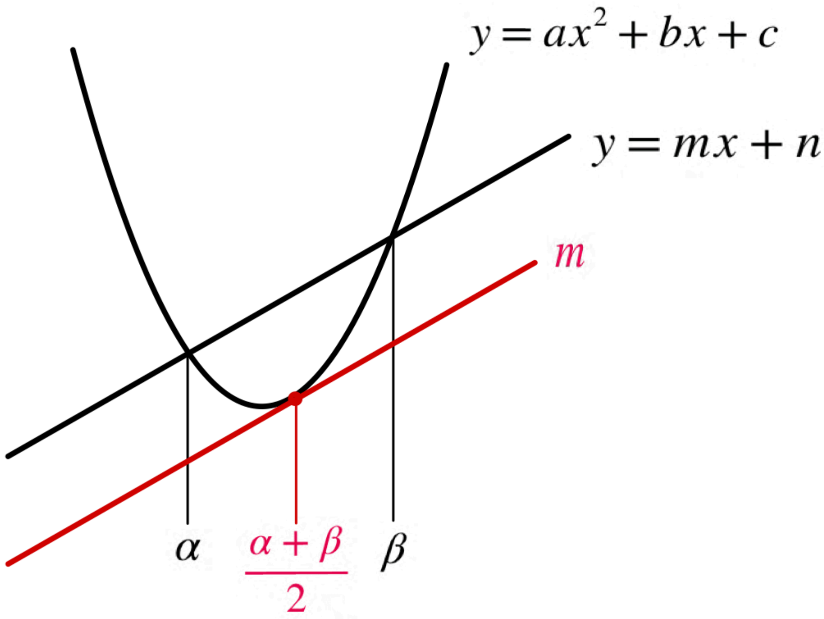
$$2ax+b=m$$

$x=-\dfrac{b-m}{2a}$ 인데,

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 여기에서

$\alpha+\beta=-\dfrac{b-m}{a}$ 이므로

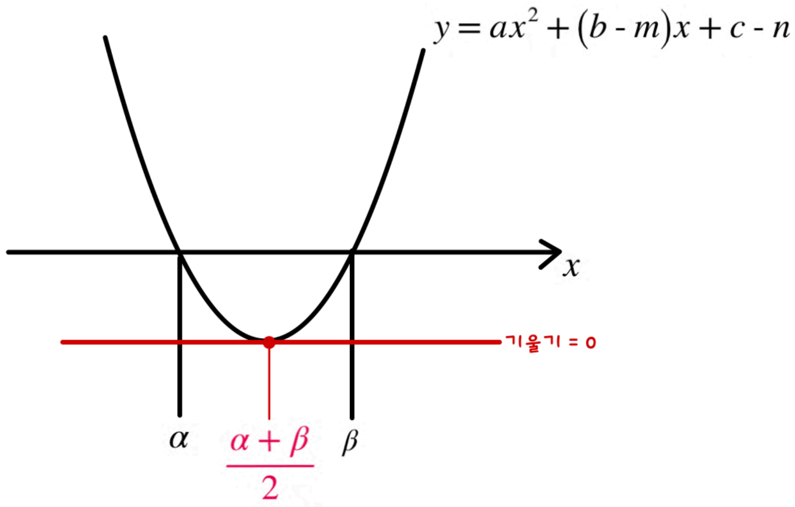
$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 라는 것을 알 수 있습니다



또는 직선이 x축 역할을 한다는 것을 알고 있으므로

직선이 x축 역할을 할 때 접선의 기울기가 0인 x좌표는 두 근의 중점이므로

기울기 m인 직선이 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 에서 접한다고 해석해도 좋습니다



수2에서 다양한 응용이 있지만 간단한 예시 하나를 들어보면

삼차함수 f (x) 가 x축과 3에서만 만난다고 해봅시다

이 때 f (x) 의 식은

$f(x) = p(x-3)(x^2+ax+b)$ 로 나타낼 수 있고

x^2+ax+b 는 절대 0이 되어서는 안되므로

판별식을 써보면

$a^2-4b<0$ 를 만족해야 합니다

이렇게 상황에 맞는 조건을 써줄 수 있어야 합니다!

정리하면,

첫 째, 이차방정식의 실근은 [완전제곱식 = 숫자]꼴 또는 인수분해를 통해 구한다. 근의 공식을 써도

상관은 없다

둘 째, 이차방정식의 실근을 이차함수와 x축, 이차함수와 직선, 이차함수와 이차함수의 교점의 x좌표로

이해할 수 있어야 한다

셋 째, 이차함수와 직선의 위치 관계는 교점의 갯수로 판단하고

이는 이차함수=직선으로 만들어진

이차방정식의 실근의 갯수와 같으므로 [판별식]을 사용하여 판단한다

넷 째, 이차함수와 직선의 관계는 이차함수와 x축의 관계로 바꿔줄 수 있는데

이 때, 원래의 직선이 x축과 같은 역할을 한다고 이해하는 것이 편하다

다음 시간에는 이차방정식의 근의 분리에 대해 공부하겠습니다

-끝-