수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x) = e^x(2\sin x+\cos x) + e^x(2\cos x-\sin x)$

$f'(0) = 1\cdot1 + 1\cdot2 = 3$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right) = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3} = 2+10 = 12$

26. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

$f(e)-g(e) = a^e - 2\log_b e = 0$ —— ① 이어야 한다.

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e} = f'(e)-g'(e)$ 이므로

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$, $g'(x) = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\ln b}$

$a^e\ln a - \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{\ln b} = 0$ —— ② 이다.

① 에서 $a^e = \frac{2}{\ln b}$ 이다. 이를 ②에 대입

$a^e\ln a - \frac{a^e}{e} = 0$

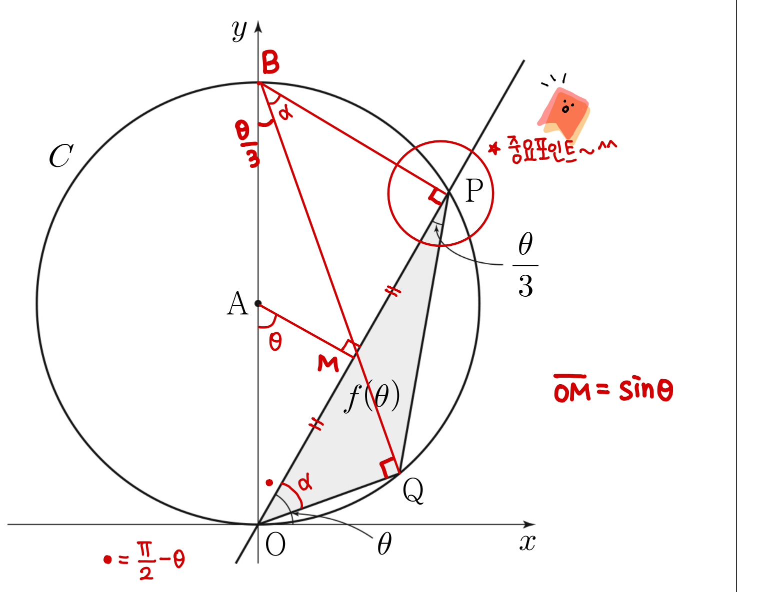
$a^e \neq 0$ 이므로 $\ln a = \frac{1}{e}$ 이다

$\therefore a = e^{\frac{1}{e}}$

$e = \frac{2}{\ln b}$, $\ln b = \frac{2}{e}$ 이므로 $b = e^{\frac{2}{e}}$

$a\times b = e^{\frac{3}{e}}$

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0,\ 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \dfrac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



$\overline{OM} = \sin\theta$

① $\dfrac{2}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{4}{9}$ ④ $\dfrac{5}{9}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

선분PQ의 길이를 구하면 $f(\theta)$를 구할수 있다.

삼각형 POQ는 반지름 1인 원에 내접하므로 **사인법칙** 적용하기 편리하다~^^

$\dfrac{\overline{OQ}}{\sin\frac{\theta}{3}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\sin\alpha} = 2$ 이다.

직각삼각형 BOP에서 $\dfrac{\theta}{3} + \alpha + \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\alpha = \dfrac{2}{3}\theta$ 이다

따라서 $\overline{PQ} = 2\sin\frac{2}{3}\theta$ 이다.

삼각형 POQ의 넓이 $f(\theta)$는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{PQ} \times \sin\dfrac{\theta}{3}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot 2\sin\dfrac{2}{3}\theta \cdot \sin\dfrac{\theta}{3}$

$\lim\limits_{\theta\to0+} \dfrac{f(\theta)}{\theta^3} = 2 \cdot \lim\limits_{\theta\to0+} \dfrac{\sin\theta}{\theta} \cdot \dfrac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta} \cdot \dfrac{\sin\frac{\theta}{3}}{\theta}$

$= 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$

MATH

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \dfrac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ◥ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

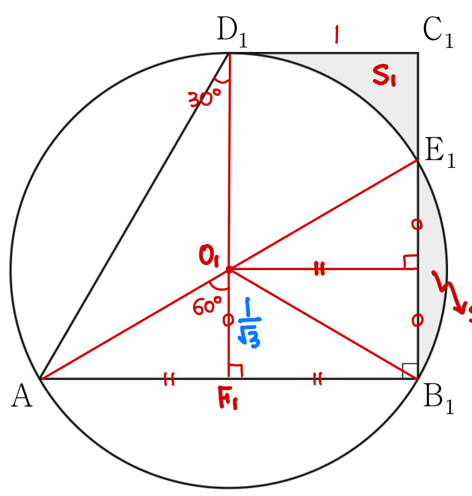
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \dfrac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ◥ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

직각삼각형 D_1AF_1에서 $\overline{AF_1} : \overline{D_1F_1} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로 $\angle AD_1F_1 = 30°$ 이다.

따라서 이 원의 반지름은 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

R_1



$S_2 =$ 부채꼴 $E_1O_1B_1$ 넓이 $-$ 삼각형 $E_1O_1B_1$ 넓이

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1$

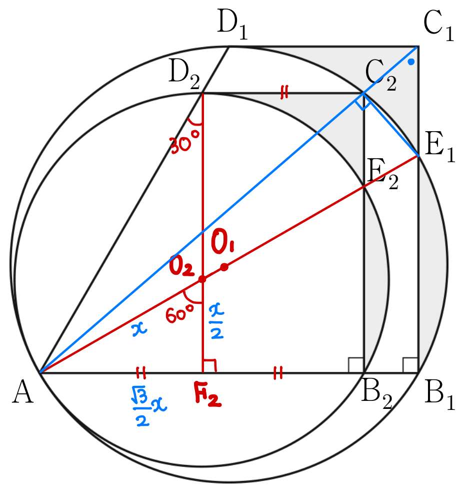
$= \dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

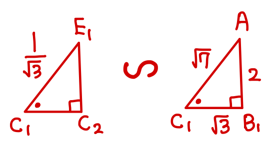
$S_1 =$ 사각형 $D_1O_1E_1C_1$ 넓이 $-$ 부채꼴 $D_1O_1E_1$ 넓이

$= \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2}{9}\pi$

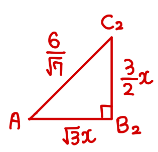
R_2





닮음비 $1 : \sqrt{21}$

$\therefore \overline{C_1C_2} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$



$3x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 = \dfrac{36}{7}$

$x^2 = \dfrac{48}{49}$ $\therefore x = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

따라서 중심이 O_2인 원의 반지름 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ 이므로

두 원 O_1, O_2의 닮음비 $\dfrac{2}{\sqrt{3}} : \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = 7 : 6$ 이다.

⋮ ⋮

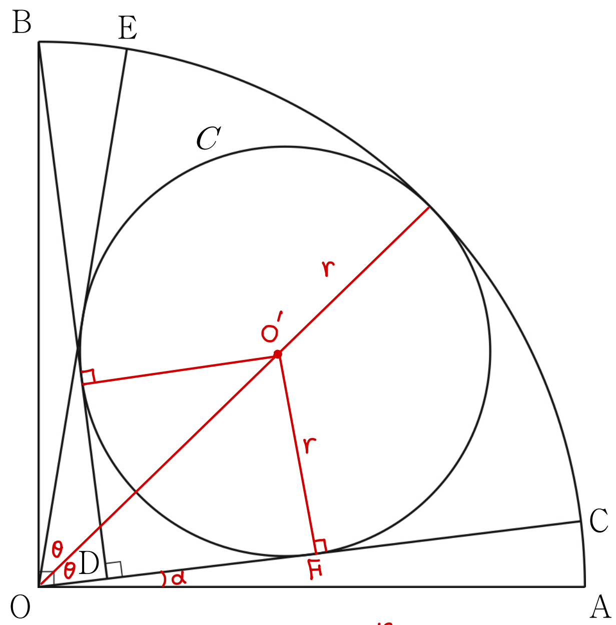
① $\dfrac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\dfrac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\dfrac{49}{100}\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{8}\sqrt{3}$

$R_1 = S_1 + S_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{36}{49}} = \dfrac{49\sqrt{3}}{78}$

단답형

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle COE)=\frac{7}{25}$이다.
$\sin(\angle AOE)=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]



먼저 $\overline{OO'}=8-r$ 이므로 $\sin\theta=\frac{r}{8-r}$ 이다.

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ 이므로 $\cos2\theta=\frac{7}{25}$ 을 대입, 정리하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $r=3$ 이다.

MATH

$\sin(\angle AOE)=\sin(2\theta+\alpha)=\sin2\theta\cos\alpha+\cos2\theta\sin\alpha$ 이다.

그렇다면 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$를 구하자~^^

여기서 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\overline{OO'}=5$ 이므로 $\overline{OH}=4$ 이다.

또한 $\overline{DH}=3$ 이므로 $\overline{OD}=1$ 이다.

직각삼각형 BOD에서 $\overline{BD}=3\sqrt{7}$ 이 되어 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{8}$ 이다.

$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\sin\alpha=\frac{1}{8}$

$\sin2\theta=\frac{24}{25}$ 이므로

$\sin(\angle AOE)=\frac{24}{25}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{7}{25}\cdot\frac{1}{8}=\frac{7+72\sqrt{7}}{200}$ 이다

$p=\frac{7}{200}$, $q=\frac{72}{200}$ 이므로

$200(p+q)=79$ 이다.

30. $x\geq0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\leq x\leq1)\\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\leq2)\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{미분}}$ $2^x\cdot\ln2$, $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{2}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

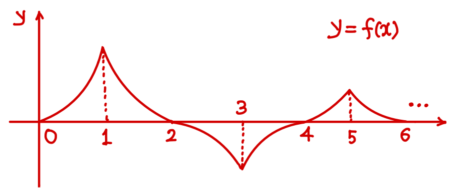
$$g(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

조건 (가), (나)를 만족하는 그래프 ~^^



$g(x)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\underbrace{\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{우미분계수}}+\underbrace{\lim_{t\to0-}\frac{f(x+t)-f(t)}{t}}_{\text{좌미분계수}}$ (여기서 $t=-h$ 이다)

MATH

따라서 미분가능한 점에서는 $2f'(x)$ 이다. 미분가능하지 않는 점에서는 각각 구하여야 합니다!!~*

먼저 범위에 따른 함수 $f(x)$가 구해보자~^^

$f(x)$:

$2\leq x\leq3$: $-\frac{1}{2}\left(2^{x-2}-1\right)$ → $-\frac{1}{2}\cdot2^{x-2}\cdot\ln2$

$3\leq x\leq4$: $-\frac{1}{2}\left\{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1\right\}$ → $-\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\cdot\ln\frac{1}{2}$

$4\leq x\leq5$: $\frac{1}{4}\left(2^{x-4}-1\right)$ → $\frac{1}{4}\cdot2^{x-4}\cdot\ln2$

$5\leq x\leq6$: $\frac{1}{4}\left\{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}-1\right\}$ $\xrightarrow{\text{미분.}}$ $\frac{1}{4}\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}\cdot\ln\frac{1}{2}$

$6\leq x\leq7$: $-\frac{1}{8}\left(2^{x-6}-1\right)$ → $-\frac{1}{8}\cdot2^{x-6}\cdot\ln2$

$7\leq x\leq8$: $-\frac{1}{8}\left\{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}-1\right\}$ → $-\frac{1}{8}\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}\cdot\ln\frac{1}{2}$

⋮

이제 $x=k$ (k: 자연수) 에서 미분가능하지 않을 가능성이 높기 때문에 $g(k)$를 구해서 함수 $g(x)$을 정리~^^

$g(1)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\ln\frac{1}{2}+2^1\cdot\ln2=0$

$g(2)=-\frac{1}{2}\cdot2^0\cdot\ln2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ln\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\ln2$

$g(3)=-\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2\cdot\ln2=0$

$g(4)=\frac{1}{4}\cdot2^0\cdot\ln2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ln\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\ln2$

$g(5)=\frac{1}{4}\cdot4\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot2\cdot\ln2=0$

$g(6)=-\frac{1}{8}\cdot2^0\cdot\ln2+\frac{1}{4}\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ln\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}\ln2$

⋮

정리!!

함수 $g(x)$!!~*

K: 자연수

$g(2K-1)=0$

$g(2K)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^K\cdot\ln2$

$x\neq 2K-1$, $2K$ 일때 $2f'(x)$ 이다.

다음페이지 계속~!!

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\lim\limits_{t \to 0+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \mathbf{h(n)}$ 이라고 놓자

$h(1) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1}{2} - 2 \cdot 2 \cdot \ln 2 + 0 = \mathbf{-8\ln 2}$

$h(2) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2^0 \cdot \ln 2 - 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\ln 2 = \mathbf{-2\ln 2}$

$h(3) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \ln 2 + 0 = \mathbf{4\ln 2}$

$h(4) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^0 \cdot \ln 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4}\ln 2 = \mathbf{\ln 2}$

$\vdots$

h(5), h(6)을 구하면 더 정확할수 있지만~ ㅋㅋ

홀수, 짝수에 따라 각 **등비수열** 임을 예측할수 있다. (시험장에서 시간이 남는다면 더 해보면 좋겠죠)

함수 h(n) 값을 정리하면 ~^^

$h(2m-1) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \ln 2$

$h(2m) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \ln 2$

m: 자연수.

이다.

(i) $-8\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\frac{1}{2^{27}}$ $\therefore m = 28$

$n = 2 \cdot 28 - 1 = \mathbf{55}$

(ii) $-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{2^{24}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} = -\frac{1}{2^{25}}$ $\therefore m = 26$

$n = 2 \cdot 26 = \mathbf{52}$

$55 + 52 = \mathbf{107}$