#1 로그값은 역수가, 밑과 진수를 교체한 것과 같다

#2 등비수열은 2개의 정보가 있으면 결정된다

#3 눈을 똑바로 뜨자

#4 미분가능한 함수의 극대, 극소는 도함수의 부호 변동을 보는 것이 기본 / 삼차함수는 비율관계 쓸 수 있으면 쓰자

#5 평균변화율을 하나의 함수식으로 바라볼 수 있다, 상수항을 몰라도 도함수는 모두 안다

#6 직선이 합성된 지수로그함수는 단조함수다 (증가만 하거나 감소만 하거나)

#7 접선 이야기 나오면 접점의 x좌표를 t라 잡고 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 작성하자

#8 주기가 6이고 (2, 3)을 지남

#9 FTC (미적분학의 기본 정리) 에 의해 $F'(x)=f(x)$인 F에 대해 $F(x)-F(0)$으로 펼칠 수 있음

#10 지수함수와 로그함수가 같이 나오면 일단 역함수 관계 의심, 그래프를 통해 직관적으로 상황을 파악해보자

#11 [sin(x)]^2+[cos(x)]^2=1을 이용해 cos(x)에 관한 이차방정식을 해결한다고 생각해보자

#12 S_1은 삼차함수 넓이 공식, S_2는 이차함수 넓이 공식을 적용할 수 있는 상황 / 넓이 공식을 사용할 수 있다는 것은 '교점의 x좌표들을 갖고 식을 작성해 정적분 처리 가능'하다는 뜻

#13 비율을 살펴볼 때는 x축, y축에 평행한 직선들을 그려 직각삼각형을 잡고 살펴보면 좋다 / 그래프의 교점은 방정식의 해 / 삼각함수는 대칭성과 주기성이 특징

#14 ㄱㄴㄷ 문제는 주로 ㄱ을 통해 상황을 대략적으로 파악하고 ㄴ을 통해 핵심을 파악한 후 ㄷ에서 모든 것을 묻는 감성 / t가 정해지지 않았으므로 1, 2와

비교할 때 어떻게 될 것인지가 궁금한 부분일 것 -> g가 t에 따라 다르게 작성됨을 파악 후 구간 별로 차분히 식 작성해보기

#15 $a_5<1$ or $a_5>=1$일 때로 case 분류하여 a_6 잡고 a_5값 잡아 생각해보자 / 귀납적으로 정의된 수열은 대충 $a_1=1$ 같은 거 집어넣고 어떤 식으로 다음 항이 결정되는지 관찰해보면 좋음

#16 인수분해 or 분모 분자를 x-2로 나누어 각각 미분계수의 정의 적용 or 로피탈의 정리

#17 x에 x-1, y에 y-a 대입

#18 n차 다항함수식을 작성해보자

#19 시간에 대한 함수인 위치, 속도, 가속도는 서로 부정적분-도함수 관계 / 물체의 운동 방향이 바뀌려면 순간적으로 속도가 0 됨

#20 (가) 등차수열은 정의역이 자연수 집합인 일차함수 (직선) / 등차수열의 첫 번째 항부터 n번째 항까지의 합은 정의역이 자연수 집합인 이차함수 (포물선)

(나) 만약 S_m과 S_{2m}의 부호가 같다면 모순, 다를 것

#21 (가) 한 점으로부터 거리가 같은 두 점이 주어진 점에서 '원' 떠올릴 수 있음

(나) 삼각형의 한 각의 크기는 0도 초과, 180도 미만임과 cos값이 양수임을 고려할 때 각 OPA와 OQA 모두 예각. 예각일 때 cos함수는 일대일함수이므로 두 각이 일치함을 의미 / 삼각형에서 어떤 각의 삼각함숫값과 대응하는 변의 길이를 알고 있으므로 sin법칙 (외접원) 떠올려야 -> 원은 원의 중심에서 정의가 되기에 어떤 작업을 할 때 원의 중심에서 생각을 시작해야함 -> 원의 중심에서 현에 수직이등분선

하지만 이러한 기본적인 작업들을 해봤음에도,, shortcut은 잘 생각해보면 OP, OQ 길이 구한 상태에서 바로 나머지 표현 가능

#22 (가) 대충 도함수 갖고 뭘 하든 문제없다는 보증, 그런데 아래 조건 보면

$g'(x)$가 '연속'임을 이용해야할 것 같음

(나) $-2<x<2$에서는 g가 거의 결정됨. (다) 조건 고려해주면 미분가능한 g가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $g'(1)=0$이고 a값 결정. $-2<x<2$ 바깥에서는 $g'(x)$가 $f(x)$나 $-f(x)$를 따라가야함

함수 g'가 연속이므로 f or $-f$는 $(2, 1)$과 $(-2, 3)$을 지나야함. 또한 $-2<x<2$ 바깥에서 F의 함숫값은 음수일 수 없으므로 x축보다 위에 있거나 순간적으로 닿아야함. 가능한 경우를 생각해보다보면 f가 감소하다가 두 점 $(2, 1)$와 $(-2, 3)$을 지나고 $x>2$ 어딘가에서 x축에 접하는 상황을 떠올려야함. 계산해주면 f 결정되고 이후는 FTC에 따라 대칭성 활용하면 끝

#23 A-A 꼴이므로 lim 분배 불가, 유리화 해주자

#24 차분히 미분

#25 급수가 수렴하면 일반항이 0으로 수렴

#26 극한이 존재하고 (분모)->0이므로 (분자)->0 / $-f(0)+g(0)$ 해줘서 미분계수의 정의 쓰거나 분모 분자를 $x-e$로 나누고 $f-g$를 하나의 함수로 바라보아 각각 미분계수의 정의 적용

#27 접선과 현이 이루는 각 -> 원 내부로 확장하기 / 원에 내접하는 사각형 -> 마주보는 각끼리의 합이 180도

#28 원은 원의 중심에서 생각 시작. 사다리꼴이므로 엇각/동위각에 의해 각 DCE도 직각. AB의 수직이등분선 올리면 D랑 만나고 수직이등분선 위에 원의 중심 존재 (원 관련 성질, 중학 도형) / 원끼리 접할 때는 원의 중심끼리 이으면 좋음, 원 위의 점과 중심 연결 / 다각형이 원 혹은 다각형과 한 점에서 만나면 그것을 이용하면 좋음. 이때 직선의 기울기 or 닮음 or tan값이 활용될 때가 종종 있더라

#29 '접한다'하면 일단 수선 내리고 직각 표시 해보자. 원 외부의 한 점에서 원에 접선 2개 그었으면 그 점과 원의 중심 잇고 합동인 직각삼각형 2개 확인하자. 대칭성은 항상 이용하자, 어떤 조건을 보았을 때 그 조건의 필요조건만 확인하지말고 필요충분조건을 확인하자. 원이 나왔으면 중심각과 원주각의 관계를 이용할

생각을 하자. 원끼리 접하면 원의 중심끼리 이은 직선이 접점을 지난다.

이후 각 AOC와 각 BOE가 일치함을 알 수 있고 삼각형 BOD에서 각 AOC에 대한 cos값을 얻어 덧셈정리

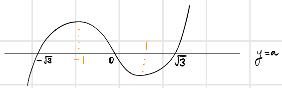
#30 구간 [0, 2]에서 f의 그래프를 그려보면 대충 증가하다 감소하는 x=1 대칭 함수를 확인할 수 있다. 이 모양 그대로 x축 대칭하고 크기는 0.5배 해가며 다음 구간 [2, 4]을 이어가는 방식이므로 점점 0으로 수렴하는 형태의 함수를 확인할 수 있다.

함수 g는 평균변화율과 관련이 있을 것으로 예상되므로 정점 (x, f(x))를 활용해 식을 작성해주면 x에서의 평균변화율의 우극한값에 좌극한값을 더한, 다시 말해 우미분계수에 좌미분계수를 더한 값임을 알 수 있다. 만약 x에서 미분 가능하다면 단순히 2f'(x)가 될 것임을 알 수 있지만, 미분 가능하지 않다면 직접 확인해볼 필요가 있겠다.

해보면 (나) 조건에 의해 f가 길이가 2인 구간마다 규칙성을 지니고 출력됨을 확인할 수 있음에 따라 g값 또한 규칙성을 갖는다. 파악 후 아래 조건을 만족하는 n값을 찾아주면 된다.

#4

$f(x) = 2x(x^2-3) + a$



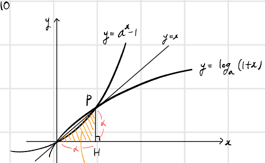
#7

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\begin{cases} f(0)=a_0 \\ f'(0)=a_1 \end{cases} \longrightarrow$ $(0, f(0))$ 에서의 접선의 방정식 : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$= a_1x + a_0$

#10



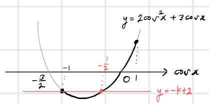
$\frac{1}{2}\cdot\alpha^2 = 2$, $\alpha = 2$

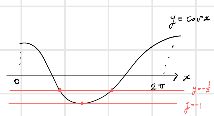
#11

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = k$

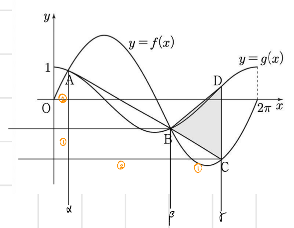
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x = -k+2$

$x(2x+3)$ 꼴





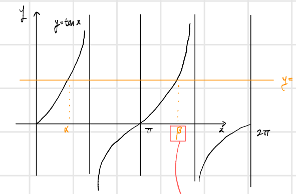
#13



방정식 $\tan x = \overline{AC}$의 근 α, β, γ가 $|\beta-\alpha| : |\gamma-\beta| = 2:1$ 만족

방정식 $\tan x = \frac{1}{k}$ 의 근

$k\cdot\sin x = \cos x$, $\tan x = \frac{1}{k}$ $(\cos x \neq 0)$

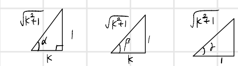


$\beta = \alpha+\pi$

$\gamma - \beta = \frac{\pi}{2}$,

$\tan\alpha = \tan(\alpha+\pi)$
$= \tan\beta$
$= \frac{1}{k}$

$\tan(\beta+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\beta}$
$= \tan\gamma$
$= -k$



$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\sin\gamma = -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

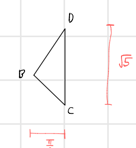
$\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\beta = -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

점 P의 y좌표를 y_P라 할 때, $|y_A - y_B| : |y_B - y_C| = 2:1$

$\Leftrightarrow k\sin\alpha - k\sin\beta : k\sin\beta - k\sin\gamma = 2:1$

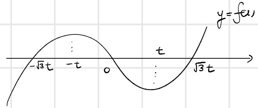
$\Leftrightarrow \frac{2k}{\sqrt{k^2+1}} : \frac{k(k-1)}{\sqrt{k^2+1}} = 2:1$

$\therefore \boxed{k=2}$

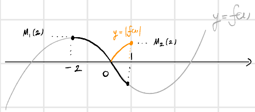


#14

$f(x) = x(x^2 - 3t^2)$



ㄱ.



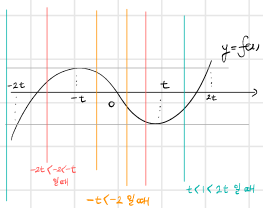
ㄴ.

$g(t) = M_1(t) + M_2(t)$

$f(-t) = (-t)^3 - 3t^2 \cdot (-t)$

$= 2t^3$

$=$ f의 극댓값



	$M_1(t)$	$M_2(t)$
$t>2$	$f(-2)$	$f(-2)$
$t=2$	$f(-2)=f(-t)$	$f(-2)=f(-t)$
$1<t<2$	$f(-t)$	$f(-t)$
$t=1$	$f(-t)$	$f(-t)$
$\frac{1}{2}<t<2$	$f(-t)$	$\lvert f(-2)\rvert$
$t=\frac{1}{2}$	$f(-t)$	$\lvert f(-2)\rvert$
$0<t<\frac{1}{2}$	$f(1)$	$\lvert f(-2)\rvert$

ㄷ.

$$g(t) = \begin{cases} \vdots \\ f(-t) + |f(-2)| & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \\ f(1) + |f(-2)| & \left(\frac{1}{2} - \varepsilon < t < \frac{1}{2}\right) \\ \vdots \end{cases}$$

ε은 아주 작은 양수

$$\longrightarrow \begin{cases} 2t^3 - 6t^2 + 8 & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \\ -9t^2 + 9 & \left(\frac{1}{2} - \varepsilon < t < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow g'(t) = \begin{cases} 6t^2 - 12t & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \\ -18t & \left(\frac{1}{2} - \varepsilon < t < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

#18

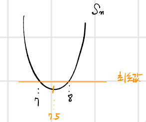
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$

$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \cdots + a_0 x) - 2x^3 + 1}{x^2} = 5, \quad \begin{cases} n = 2 \\ a_2 = 2 \\ a_1 = 5 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 2x^2 + 5x + C$$

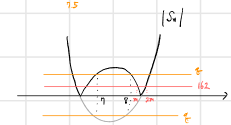
#20

(가)

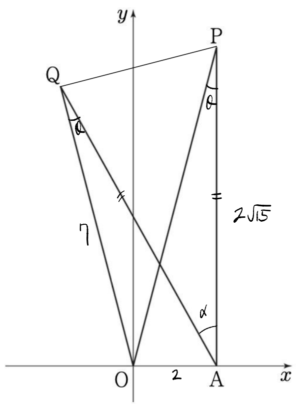


$S_n - q = p(n-7)(n-8) \quad (p>0)$

(나)



#21



△ OPA, OQA 에서 cos 법칙 ⟶ $\overline{OP}=8$, $\overline{OQ}=7$

△ OPA에서 피타고라스의 정리 성립 ⟶ $\angle OAP = \frac{\pi}{2}$

△OQA에서 cos 법칙, $\cos(\angle OAQ) = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\square OAPQ = \triangle APQ + \triangle OAQ$

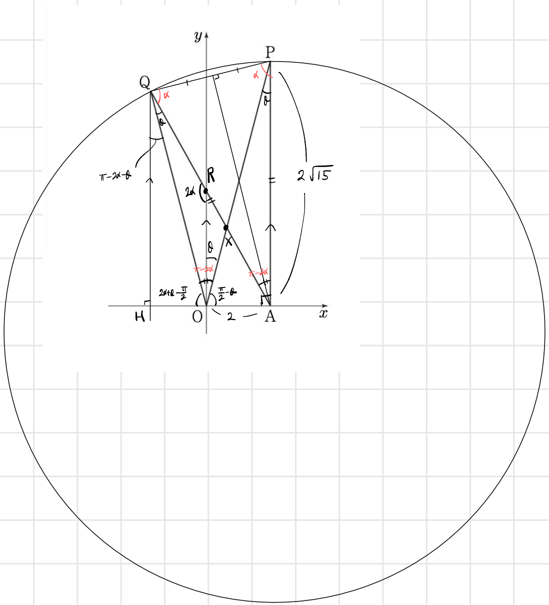
$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{15})^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle OAQ\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \sin(\angle OAQ)$

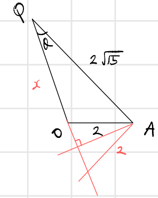
$= 30 \cdot \cos(\angle OAQ) + 2\sqrt{15} \cdot \frac{7}{8}$

$= 30 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{7\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{11}{2}\sqrt{5}$

#21 (의식의 흐름 ver.)

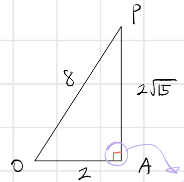




$2^2 = x^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\cdot x\cdot 2\sqrt{15}\cdot\cos\theta$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$

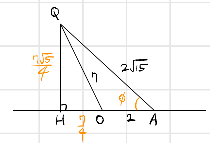
$\Leftrightarrow x = 7$ (∵ 짧은 쪽) $\cdots$ $\overline{OP} = 8$ (∵ △OAP에서 cos법칙, $\overline{OP} > \overline{OQ}$)



$\overline{PA} \parallel \overline{QH}$, $\angle AQH = \angle PAQ$

$\triangle RXO \backsim \triangle PXA$ (AA) 이므로 $\angle ORX = \angle XPA = \theta$

α를 θ에 대해 나타내서 $\sin(\pi - 2\alpha) = \sin f(\theta)$ 감성으로 처리해보려 했는데... 실패!



$\cos\phi = \dfrac{2^2 + (2\sqrt{15})^2 - 7^2}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $\overline{OH}$와 $\overline{QH}$ 결정

$\boxed{\pi - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi}$

$\square OAPQ = \triangle APQ + \triangle OAQ = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{15})^2\cdot\sin(\pi - 2\alpha) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{15}\cdot\frac{7}{8}$

$= 30\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \frac{7\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{15\sqrt{15}}{4} + \frac{7\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{11}{2}\sqrt{15}$

$\triangle AQP$, $\angle APQ = \angle AQP = \alpha$

$\triangle OQP$, $\angle OQP + \angle OPQ + \angle POQ = \pi$

$\Leftrightarrow (\alpha + \theta) + (\alpha - \theta) + \angle POQ = \pi$

$\Leftrightarrow \angle POQ = \pi - 2\alpha$

$\triangle XQO \backsim \triangle XPA$ (AA), $\angle POQ = \angle PAQ$

#22

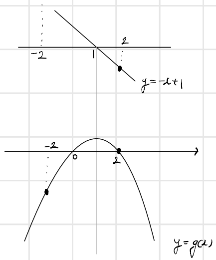
(나) $-2<x<2$, $\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(x) = -x+a \end{cases}$

$x\le -2$ or $x \ge 2$, $g'(x)=f(x)$ or $g'(x)=-f(x)$

(다) g가 (가)에 의해 미분가능한 함수이므로,

$g'(1) = g'(b) = 0$

(나)에서 $g'(x)\big|_{x=1} = -x+a\big|_{x=1} = 0$, $\boxed{a=1}$



(나) $x\le -2$ or $x \ge 2$ 에서 $|g'(x)| = f(x) \ge 0$

$\Leftrightarrow g'(x)=f(x)$ or $g'(x)=-f(x)$

(다)에서 1 외에 방정식 $g'(x)=0$의 근이 존재해야하고

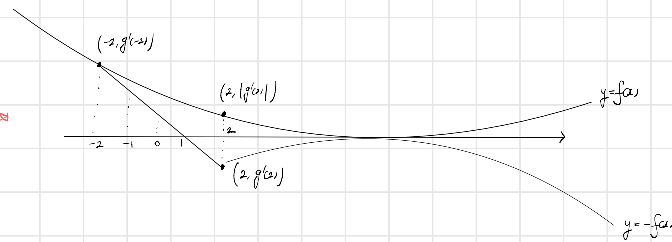
(가)에서 g'이 실수 전체의 집합에서 연속이려면

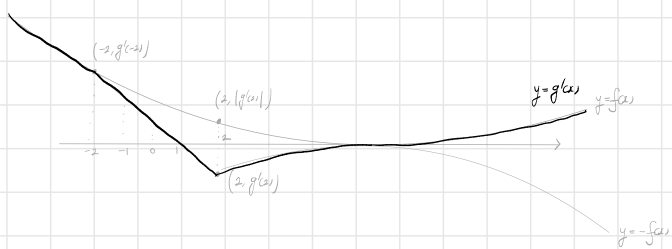
$\begin{cases} f(-2)=|g'(-2)|=3 \\ f(2)=|g'(2)|=1 \end{cases}$

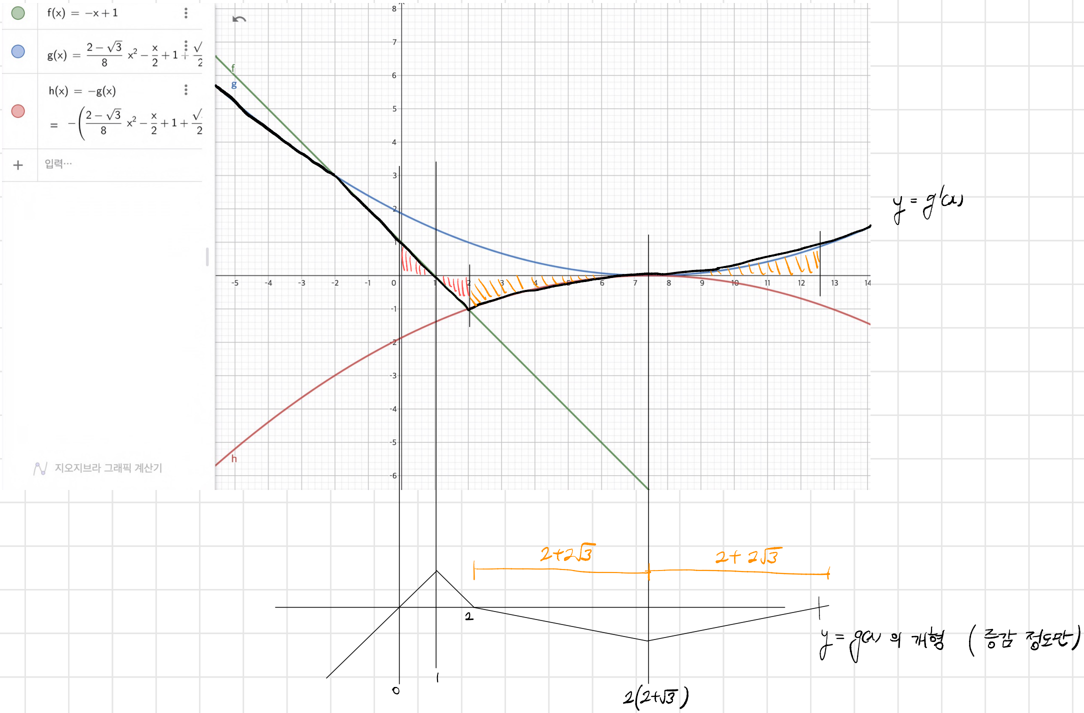
$\downarrow$

$f(x)=ax^2-\frac{1}{2}x-4a+2 \quad (a>0)$

$D: \left(-\frac{1}{2}\right)^2-4a\cdot(-4a+2)=0$

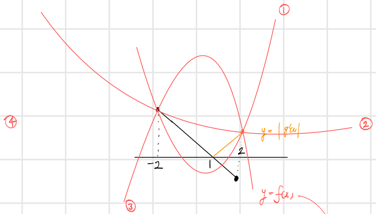






$g(b)-g(a)=\int_a^b g'(x)dx$ 에 의해 개형 잡아주면 방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근

What if, (나) $|x| \geq 2$, $g'(x) = f(x)$ 였다면?



① : 모순
② : f의 최솟값이 음수여야
③ : 가능
④ : 가능

g' 이 연속함수이므로 $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(-2) = 3 \end{cases} \longrightarrow f(x) = ax^2 - \frac{1}{2}x - 4a + 2 \quad (a \neq 0)$

$= a\left(x - \frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{65}{16}a + 2$

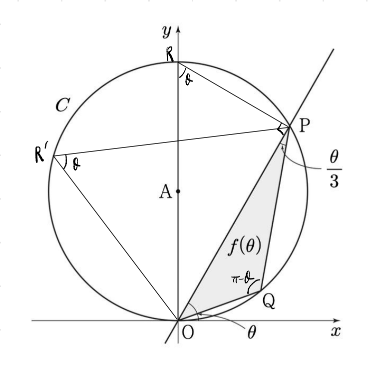
② $\begin{cases} a > 0 \\ 2 < \frac{1}{4a} \\ -\frac{65}{16}a + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{32}{65} < a < \frac{1}{8}$, $\frac{32}{65} > \frac{1}{8}$ 이므로 모순

③ $\begin{cases} a < 0 \\ -2 < \frac{1}{4a} < 2 \\ -\frac{65}{16}a + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{8}$

④ $\begin{cases} a < 0 \\ \frac{1}{4a} \leq -2 \\ -\frac{65}{16}a + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq a < 0$

$\therefore a < 0$

#27



$\angle POR = \frac{\pi}{2} - \theta$

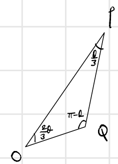
$\triangle POR$, $\angle ORP = \theta$ ($\because \angle OPR = \frac{\pi}{2}$, 지름이 빗변인 원에 내접하는 삼각형)

정확히는 한 변이 지름인

호 OP에 대한 원주각 $\angle ORP = \angle OR'P$

원에 내접하는 사각형 $\square OQPR'$, $\angle OR'P + \angle OQP = \pi$

$\boxed{\angle OQP = \pi - \theta}$

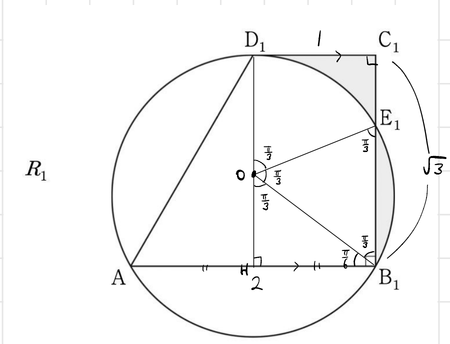


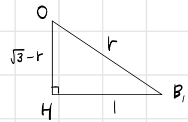
$\overline{OP} = 2 \cdot 1 \cdot \sin(\pi - \theta)$

$\frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{\theta}{3}}$, $\overline{OQ} = 2\sin\frac{\theta}{3}$ ($\because$ sin법칙)

$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cdot \sin\frac{2}{3}\theta$

#28





$(\sqrt3 - r)^2 + 1^2 = r^2$

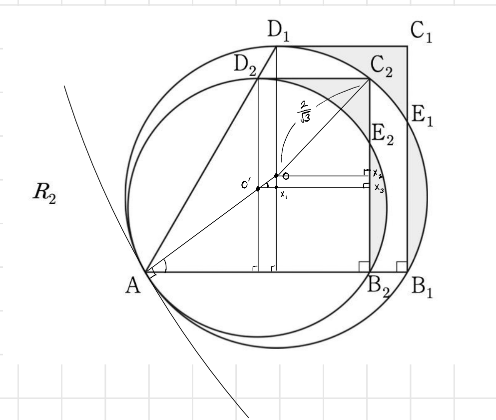
$\boxed{r = \frac{2}{\sqrt3}}$

$S_1 = \square D_1HB_1C_1 - \left(\text{부채꼴 } OD_1E_1 + \triangle OB_1E_1 + \triangle OHB_1\right)$

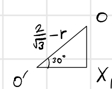
$+ \text{부채꼴 } OB_1E_1 - \triangle OB_1E_1$

$= \sqrt3 - \left(\frac12\cdot\frac43\cdot\frac\pi3 + \frac12\cdot\frac43\cdot\sin\frac\pi3 + \frac12\cdot\frac1{\sqrt3}\cdot1\right) + \frac12\cdot\frac43\cdot\frac\pi3 - \frac12\cdot\frac43\cdot\sin\frac\pi3$

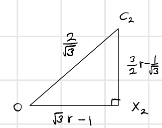
$= \boxed{\frac{\sqrt3}{6}}$



작은 원의 반지름을 r이라 하자. (모든 원은 서로 닮음)



$\overline{O'X_1} = \left(\frac{2}{\sqrt3} - r\right)\cdot\cos30° = 1 - \frac{\sqrt3}{2}r$



$\overline{OX_2} = \overline{O'X_3} - \overline{O'X_1}$

$= \frac{\sqrt3}{2}r - \left(1 - \frac{\sqrt3}{2}r\right)$

$= \sqrt3 r - 1$

$\overline{C_2X_2} = \overline{C_2X_3} - \overline{X_2X_3}$

$= r - \overline{OX_1}$

$= r - \left(\frac{1}{\sqrt3} - \frac12 r\right)$

$= \frac32 r - \frac{1}{\sqrt3}$

$\triangle OX_2C_2$, $(\sqrt3 r - 1)^2 + \left(\frac32 r - \frac{1}{\sqrt3}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2$

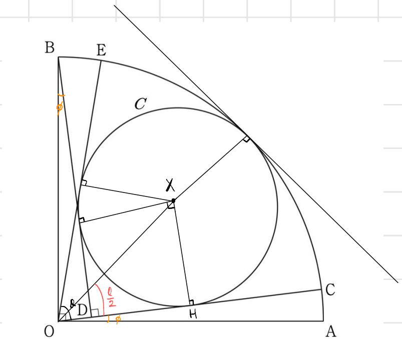
$\Leftrightarrow \frac74 r^2 - \sqrt3 r = 0$, $\boxed{r = \frac{4\sqrt3}{7}}$

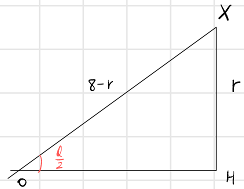
닮음비 $\frac{2}{\sqrt3} : \frac{4\sqrt3}{7} = 1 : \frac67$

넓이비 (공비) $\boxed{1 : \frac{36}{49}}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\sqrt3}{6}}{1 - \frac{36}{49}}$

#29



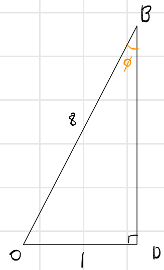


$\cos\theta = \frac{7}{25}$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{7}{25}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\triangle OHX$, $\sin(\angle XOH) = \frac{r}{8-r}$

$\Leftrightarrow \boxed{r=3}$



$$\boxed{\sin\phi = \frac{1}{8}\ ,\ \cos\phi = \frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

$\overline{OH} - \overline{DH} = (8-r)\cos\frac{\theta}{2} - r$

$$\sin(\angle AOE) = \sin(\theta+\phi)$$

$$= \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

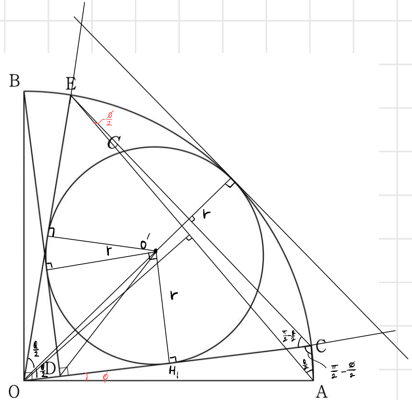
$$= \frac{24}{25}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{7}{25}\cdot\frac{1}{8}$$

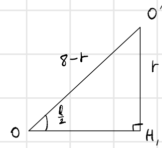
$$= \frac{72\sqrt{7}+7}{200}$$

$$200 \times \frac{72+7}{200} = 79$$

$\therefore 79$

#29 (prototype ver.)



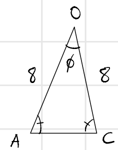


$$\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\frac{7}{25}$$

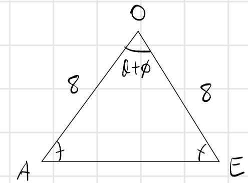
$$\Leftrightarrow\ 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

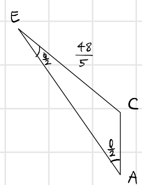
$$\Rightarrow\ \triangle OH_1O',\ \frac{r}{8-r}=\sin\frac{\theta}{2}\ \longrightarrow\ \boxed{r=3}$$



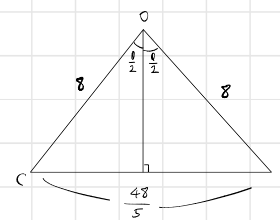
$$\angle OCA=\angle OAC=\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}$$



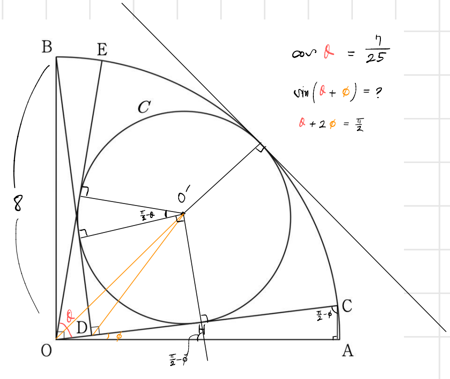
$$\angle OAE=\angle OEA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}$$



호 AC에 대해, $\angle AOC=2\angle AEC$



#29 (의식의 흐름 ver.)

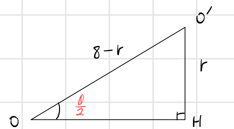


$\cos\theta = \frac{7}{25}$

$\sin(\theta+\phi) = ?$

$\theta + 2\phi = \frac{\pi}{2}$

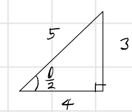
원 C의 반지름을 r이라 하자.



$\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = \frac{7}{25}$

$\Leftrightarrow \ 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{7}{25}$

$\Rightarrow \ \sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} \quad \left(0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$

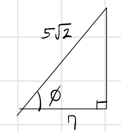


$\frac{r}{8-r} = \sin\frac{\theta}{2}, \quad \boxed{r=3}$

$\tan\phi = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$= \frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{1}{7} \quad \left(\because \tan\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}\right)$



$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

$= \frac{24}{25}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}} + \frac{7}{25}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}$

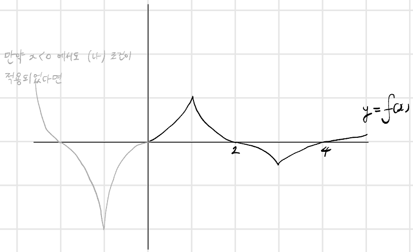
$= \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ..?

오류 : $\angle BOE = \angle AOC$ 가 아니었음 ⟶ 직관적으로 대칭성 이용할 때 주의

(실제로는 $\angle BOE = \frac{\pi}{2} - (\theta+\phi)$ 여서 $\sin(\angle BOE) = \cos(\theta+\phi)$

$\neq \cos\phi$

#30



(가) $f(x) = \begin{cases} 2^{x}-1 & (0 \le x \le 1) \\ 2^{-x+2}-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$

(나) $f(x) = \begin{cases} -2^{x-3}+\frac{1}{2} & (2 \le x \le 3) \\ -2^{-x+3}+\frac{1}{2} & (3 < x \le 4) \end{cases}$

$= \begin{cases} 2^{x-6}-\frac{1}{4} & (4 \le x \le 5) \\ 2^{-x+4}-\frac{1}{4} & (5 < x \le 6) \end{cases}$

$= \begin{cases} -2^{x-9}+\frac{1}{8} & (6 \le x \le 7) \\ 2^{-x+5}+\frac{1}{8} & (7 < x \le 8) \end{cases}$

$\vdots$

$g(x) = \lim_{h\to0+}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]$

$= \lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \begin{cases} 2f'(x) & \left(\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\ ? & \left(\lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ne \lim_{h\to0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2^{x}\cdot\ln2 & (0<x<1) \\ 2^{-x+2}\cdot\ln2\cdot(-1) & (1<x<2) \end{cases}$

$= \begin{cases} -2^{x-3}\cdot\ln2 & (2<x<3) \\ -2^{-x+3}\cdot\ln2\cdot(-1) & (3<x<4) \end{cases}$

$= \begin{cases} 2^{x-6}\cdot\ln2 & (4<x<5) \\ 2^{-x+4}\cdot\ln2\cdot(-1) & (5<x<6) \end{cases}$

$\vdots$

$\vdots$

$x=n$ (n은 자연수) 에서 $f(x)$ 미분 불가능

$\begin{cases} \text{구간 } [1, 1+h] \text{ 에서 } f(x) \text{ 연속} \\ \text{구간 } (1, 1+h) \text{ 에서 } f(x) \text{ 연속} \\ \lim_{x\to1+} f(x) \text{ 존재} \end{cases}$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to1+}f'(x) = -2\ln2$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to1-}f'(x) = 2\ln2$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{x\to2+}f'(x) = -\frac{1}{2}\ln2$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{x\to2-}f'(x) = -\ln2$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{x\to3+}f'(x) = \ln2$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{x\to3-}f'(x) = -\ln2$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{x\to4+}f'(x) = \frac{1}{4}\ln2$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{x\to4-}f'(x) = \frac{1}{2}\ln2$

$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{t\to 0+}\left[g(n+t)-g(n-t)\right]+2g(n)$$

$$=\lim_{x\to n+}g(x)-\lim_{x\to n-}g(x)+2g(n).$$

$$\lim_{x\to 1+}g(x)-\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)-\lim_{x\to 1-}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=2\lim_{x\to 1+}f'(a)-2\lim_{x\to 1-}f'(a)=-8\ln 2$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 2+}g(x)-\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)-\lim_{x\to 2-}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=2\lim_{x\to 2+}f'(a)-2\lim_{x\to 2-}f'(a)=\ln 2$$

$$\lim_{x\to 3+}g(x)-\lim_{x\to 3-}g(x)=\lim_{x\to 3+}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)-\lim_{x\to 3-}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=2\lim_{x\to 3+}f'(a)-2\lim_{x\to 3-}f'(a)=4\ln 2$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 4+}g(x)-\lim_{x\to 4-}g(x)=\lim_{x\to 4+}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)-\lim_{x\to 4-}\left(\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=2\lim_{x\to 4+}f'(a)-2\lim_{x\to 4-}f'(a)=-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\vdots$$

$$g(1)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$$

$$g(2)=-\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$g(3)=0$$

$$g(4)=\frac{3}{4}\ln 2$$

$$\vdots$$

$$\lim_{t\to 0+}\left[g(1+t)-g(1-t)\right] + 2g(1) = -8\ln 2 + 2\cdot 0 = -8\ln 2$$

$$\lim_{t\to 0+}\left[g(2+t)-g(2-t)\right] + 2g(2) = \ln 2 + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\ln 2\right) = -2\ln 2$$

$n=3,\quad 4\ln 2 + 2\cdot 0 = 4\ln 2$

$n=4,\quad -\frac{1}{2}\ln 2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\ln 2\right) = \ln 2$

$n=5,\quad -2\ln 2 + 2\cdot 0 = -2\ln 2$

$n=6,\quad \frac{1}{4}\ln 2 + 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\ln 2\right) = -\frac{1}{2}\ln 2$

$\vdots$

$$a_n = \frac{\lim_{t\to 0+}\left[g(n+t)-g(n-t)\right] + 2g(n)}{\ln 2},$$

$$\begin{cases} a_{2n-1} = (-8)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1)^n\cdot 2^{4-n} = 2^{-24}, & n=28 \\ a_{2n} = (-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1)^n\cdot 2^{2-n} = 2^{-24}, & n=26 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\{a_n\}$ 기준 $n=55,\ 52$