제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 + 4$

$f'(1) = 6 + 4 = 10$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2, \quad a_2 a_4 = 36$$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$a^2 r^4 = 4r^4 = 36 \Rightarrow r^4 = 9$

$\frac{a_7}{a_3} = r_4 = 9$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \le -1) \\ x^2 - 5x - a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-2 + a = 1 + 5 - a$

$2a = 8$

$\therefore a = 4$

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f'(x) = 6x^2+6x-12$
$= 6(x+2)(x-1)$

$M = f(-2) = -16+12+24+1$
$= 21$

$m = f(1) = 2+3-12+1$
$= -6$

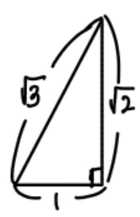
$\therefore M+m = 15$

6. $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = 2\cdot\tan^2\theta = 4$

$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{2}$



$\Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_1}-\cancel{\dfrac{1}{a_2}}+\cdots+\cancel{\dfrac{1}{a_n}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

$= -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = -\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{4}$

$n=12 \Rightarrow \dfrac{1}{a_{13}} = -\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore a_{13} = -3$

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$f(0)=0,\ f'(0)=1$

$f(1)=0,\ f'(1)=1$

$f'(x)-1=3a(x)(x-1)$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)=3ax^2-3ax+1$

$=3a(x^2-x)$

1. $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x$

$f(1)=0$ 대입 $\Rightarrow f(1)=a-\frac{3}{2}a+1=0$ $\therefore a=2$

$f(2)=16-12+2=6$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

$a(t)=-12t^2+24t$

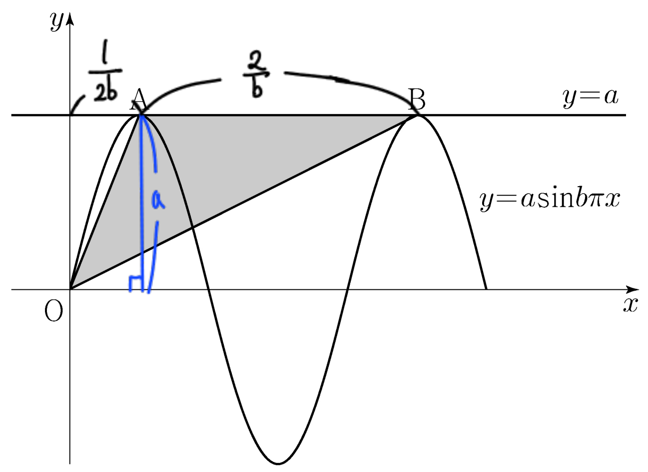
$a(k)=-12k^2+24k=12$ $\Rightarrow$ $k=1$

$\int_3^4 |v(t)|dt=\left[\,|-t^4+4t^3|\,\right]_3^4$

$=27$

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



주기 : $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

$\triangle$OAB의 넓이 $=\frac{a}{b}=5$ $\Rightarrow$ $a=5b$

연립

$\overline{OA}$ 기울기 $=\dfrac{a}{\frac{1}{2b}}=2ab$

$\overline{OB}$ 기울기 $\dfrac{a}{\frac{5}{2b}}=\frac{2ab}{5}$

$\Rightarrow \frac{4}{5}a^2b^2=\frac{5}{4}$ $\therefore ab=\frac{5}{4}$

$a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\boxed{a+b=3}$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a + f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$x=1$ 대입 $f(1) = 2 + a + 3a = -6$

$x=0$ 대입 $0 = 3a + \int_1^0 f(t)dt = 3a - f(1)$

$= 3a - 3a - a - 2$

$\therefore a = -2$

미분 $\Rightarrow \cancel{f(x)} + xf'(x) = 6x^2 - 4x + \cancel{f(x)}$

$f'(x) = 6x - 4$

$f(x) = 3x^2 - 4x + C$

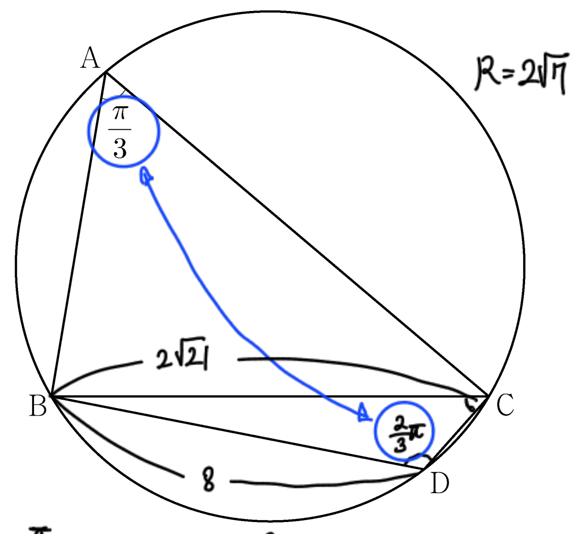
$f(1) = 3 - 4 + C = -6$ $\therefore C = -5$

$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$

$\therefore a + f(3) = -2 + 10 = 8$

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



$\angle BAC = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle BDC = \frac{2}{3}\pi$

Sine Law $\Rightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{7}\sin\frac{2}{3}\pi$ $\quad \overline{BD} = 4\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$= 2\sqrt{21}$ $\quad = 8$

Cosine Law $\Rightarrow \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}}$

$-\frac{1}{2} = \frac{64 + \overline{CD}^2 - 84}{2 \cdot 8 \cdot \overline{CD}}$

$\overline{CD}^2 + 8\overline{CD} - 20 = 0$

$\Rightarrow \overline{CD} = 2$

$\therefore \overline{BD} + \overline{CD} = 10$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$45-(m-1)d = -45+(m+2)d$

$(2m+1)d = 90$

m	d		Σ min	
1	30	$\Rightarrow -45\ -15$	-60	O
2	18	$\Rightarrow -45\ -27\ -9$	-81	O
4	10	$\Rightarrow -45\ -35\ -25\ -15\ -5$	-125	X
7	6			
22	2			

$\therefore 30+18 = 48$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p = 1$일 때, $g'(1) = 0$이다.

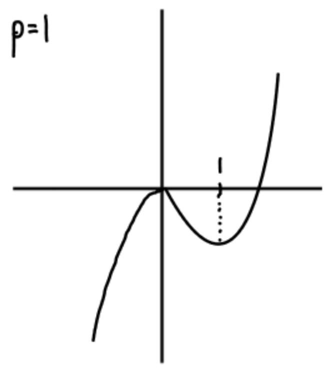
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

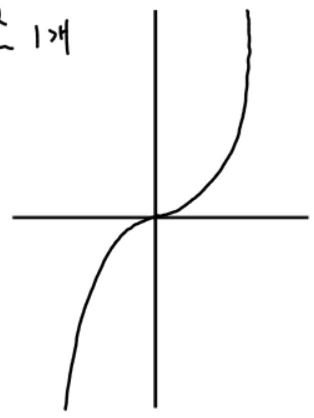
ㄱ

$p=1$

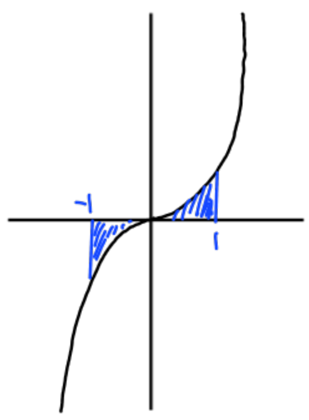


ㄴ

$p=2$ 1개



ㄷ



$\Rightarrow$ odd function

i) $p=2$ 일 때,

$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$

ii) $p>2$ 일 때

$\int_{0}^{1} g(x)dx$ 증가...

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} g(x)dx > 0$

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

i) $\frac{1}{2} < a_5 \le 1$

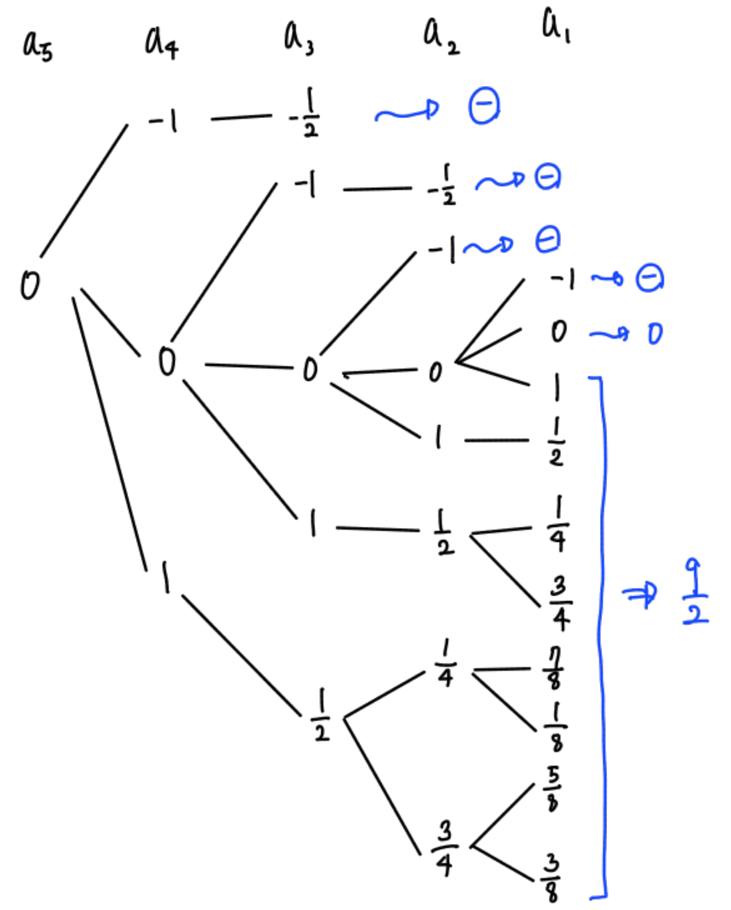
$a_5 + a_6 = a_5 - 2a_5 + 2 = 0$ $\therefore a_5 = 2$ (모순) X

ii) $-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$

$a_5 + a_6 = a_5 + 2a_5 = 0$ $\therefore a_5 = 0$

iii) $-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$

$a_5 + a_6 = a_5 - 2a_5 - 2 = 0$ $\therefore a_5 = -2$ (모순) X



단답형

16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

2

$\log_2 4 = 2$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

8

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$

$f(1) = 2 - 4 + 7 + 3 = 8$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

9

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = \beta$ 라 하면,

$\alpha+2\beta = 45$, $\alpha-\beta=3$ ⇒ $\alpha=17$, $\beta=14$

$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right) = \beta-5 = 9$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

11

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{-12}{4} = -3 = 3a^2-12a+5$

$3a^2-12a+8=0$ ⇒ $a=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{3}$

$0<\frac{6\pm\sqrt{12}}{3}<4$ 이므로,

근과 계수의 관계에 의해 모든 실수의 곱 $=\frac{8}{3}$

$\therefore 3+8=11$

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

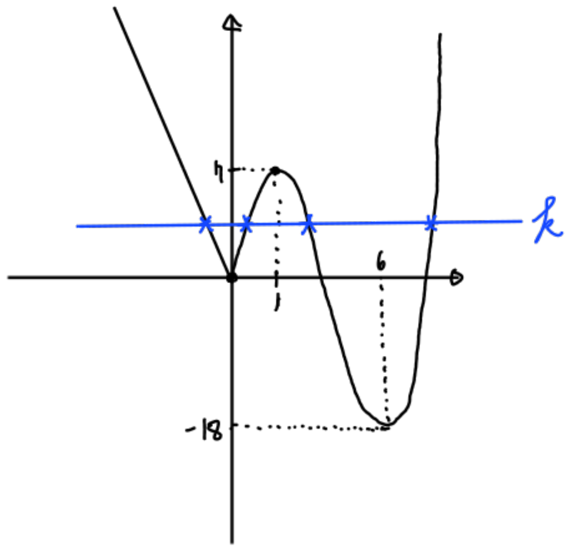
$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

21

$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x = \frac{1}{2}x\underbrace{(x^2-9x+22)}_{>0}$

$\begin{cases} y = x^3-9x^2+15x & (f(x)+x \ge 0 \iff x \ge 0) \\ y = -7x & (f(x)+x<0 \iff x<0) \end{cases}$



$\therefore 0<k<7$ ⇒ $k=1,2,3,\cdots,6$

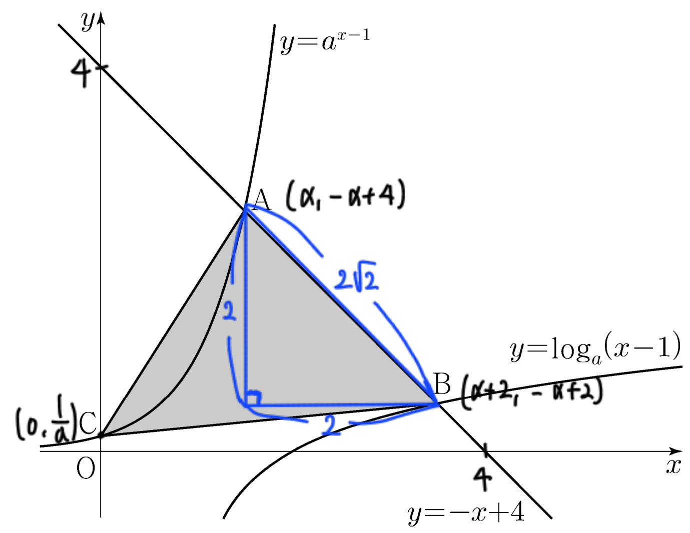
합 : 21

21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]

192



$y=a^{x-1} \xrightarrow{역} y=\log_a x+1 \xrightarrow[x:+1,\ y:-1]{평\cdot이} y=\log_a(x-1)$

$A(\alpha, -\alpha+4) \xrightarrow{역} A'(-\alpha+4, \alpha) \xrightarrow{평\cdot이} B(-\alpha+5, \alpha-1)$

$= B(\alpha+2, -\alpha+2)$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}$

$A(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 대입 $\Rightarrow \frac{5}{2}=a^{\frac{1}{2}}$ $\therefore a=\frac{25}{4}$

선분 $\overline{AB}$와 점 C 사이의 거리 $=\dfrac{\left|\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{48}{25}\sqrt{2}$

$\triangle ABC$의 넓이 $=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{48}{25}\sqrt{2}=\frac{96}{25}$

$50\cdot S=192$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

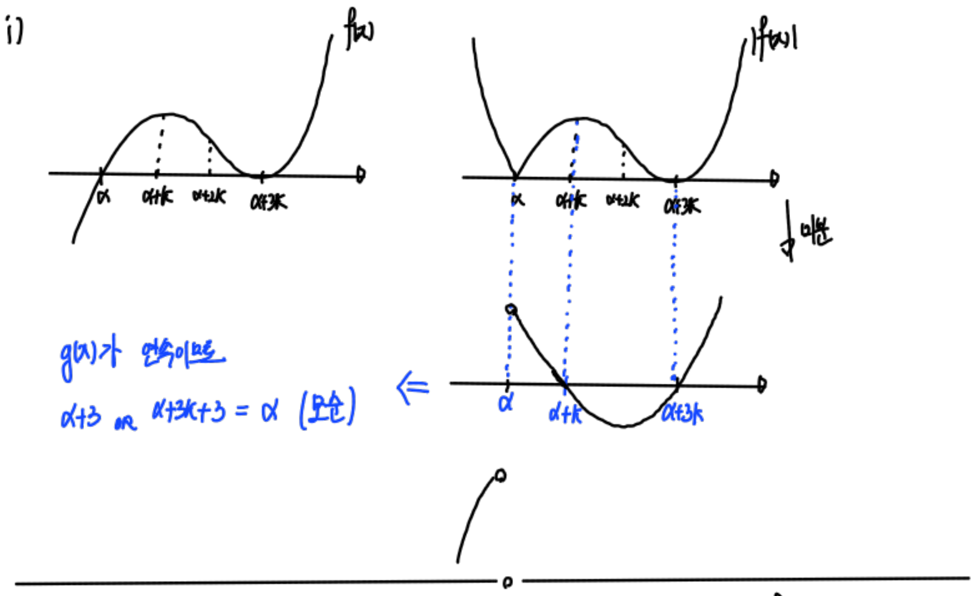
$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

108

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

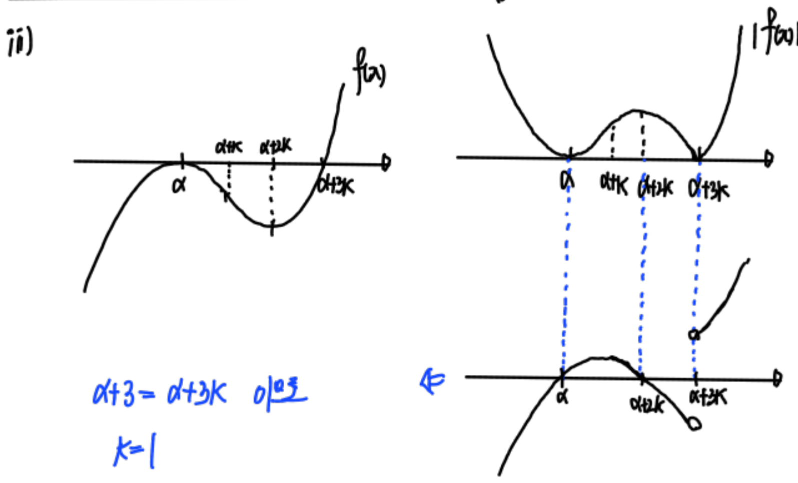
i)



$g(x)$가 연속이므로

$\alpha+3$ or $\alpha+3k+3=\alpha$ (모순) $\Leftarrow$

ii)



$\alpha+3=\alpha+3k$ 이므로 $\Leftarrow$

$k=1$

$\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\alpha+2,\ \alpha_3=\alpha+3,\ \alpha_4=\alpha+6$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha+11=7$ $\therefore \alpha=-1$

$f(x)=(x+1)^2(x-2) \Rightarrow f(5)=36\cdot 3=108$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$E(X) = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a \times b > 31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

a	b
1	x
3	x
5	8
7	6, 8

$\frac{3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}$

25. $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{1}{x^2}$의 계수 : ${}_5C_1 \cdot a^4$

x의 계수 : ${}_5C_2 \cdot a^3$

$5 \cdot a^4 = 10 \cdot a^3$

$\therefore a=2$

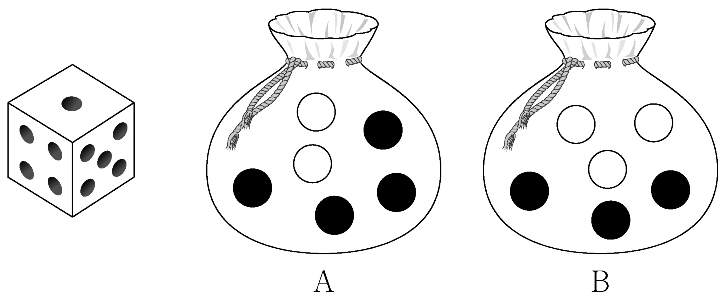
26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

$\Rightarrow A$ $\Rightarrow B$

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}$

$= \frac{7}{45}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{45}$

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{7}$

27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
> (나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185 ④ 0.8413 ⑤ 0.9772

X의 정규분포 $N(220, k^2)$
$\overline{X}$의 정규분포 $N\left(220, \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

$\Rightarrow P(\overline{X} \le 215) = P\left(Z \le \frac{215-220}{\frac{k}{\sqrt{n}}}\right)$

$= P\left(Z \le -\frac{5\sqrt{n}}{k}\right)$

$-\frac{5\sqrt{n}}{k} = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{k} = \frac{1}{5}$

Y의 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3k}{2}\right)^2\right)$

$\overline{Y}$의 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3k}{6\sqrt{n}}\right)^2\right) = N\left(240, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$

$\Rightarrow P(\overline{Y} \ge 235) = P\left(Z \ge \frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)$

$= P(Z \ge -2)$

$= 0.9772$

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(3) + f(4)$는 5의 배수이다.
> (나) $f(1) < f(3)$이고 $f(2) < f(3)$이다.
> (다) $f(4) < f(5)$이고 $f(4) < f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

$f(3) + f(4) = 5$ or 10
1 4 ⇒ $f(1), f(2)$ 존재 X
2 3 ⇒ $1 \times 1 \times 3 \times 3 = 9$
3 2 ⇒ $2 \times 2 \times 4 \times 4 = 64$
4 1 ⇒ $3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$
6 4 ⇒ $5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100$
5 5 ⇒ $4 \times 4 \times 1 \times 1 = 16$
4 6 ⇒ $f(5), f(6)$ 존재 X
⇒ 414

단답형

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

78

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

$E(X)=5 \quad E(X^2)=a+9b+25c+49b+81a$

$=82a+58b+25c$

$=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{156}{5}$

$E(Y)=5 \quad E(Y^2)=a+\frac{1}{20}+9b+25c-\frac{5}{2}+49b+81a+\frac{81}{20}$

$25+\frac{31}{5}$

$\frac{125}{5} \quad \frac{156}{5}$

$=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$

$=\frac{164}{5}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=\frac{164}{5}-25=\frac{39}{5}$

$\therefore 10\times V(Y)=78$

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

218

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(가) ${}_4\mathrm{H}_{10}=286$

(다) 여사건 (모든 학생 홀수개)

$A \Rightarrow a=2a'+1$

$B \Rightarrow b=2b'+1$

$C \Rightarrow c=2c'+1$

$D \Rightarrow d=2d'+1$

$\Rightarrow a+b+c+d=14$, $a'+b'+c'+d'=5$

(나) (10,2,1,1) 제외

⇝ 전체 − (다) − (나)

$=286-{}_4\mathrm{H}_5-\frac{4!}{2!}$

$=218$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\frac{6}{1}$

24. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$ 이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 일 때, $\tan\beta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}+\tan\beta=1-\frac{2}{3}\tan\beta$

$\frac{5}{3}\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\beta=\frac{1}{5}$

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^{t}-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

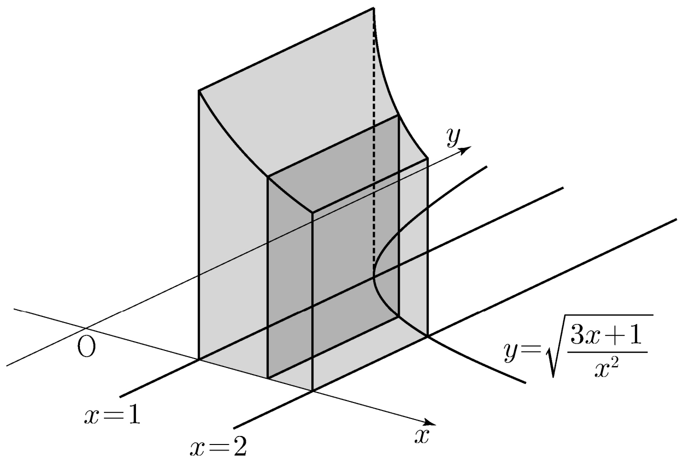
① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

$$\frac{dx}{dt}=e^{t}+4e^{-t} \qquad \frac{dy}{dt}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^{t}+4e^{-t}}$$

$t=\ln 2$ 대입 $\Rightarrow \dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2}}\ (x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



① $3\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}+3\ln 2$ ③ $1+3\ln 2$

④ $\dfrac{1}{2}+4\ln 2$ ⑤ $1+4\ln 2$

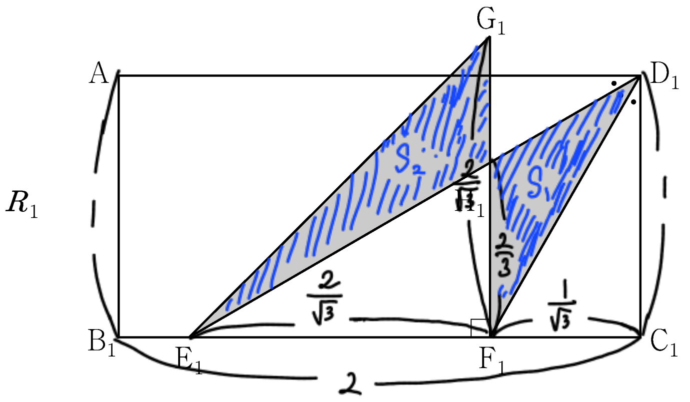
$$\int_1^2 \frac{3x+1}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

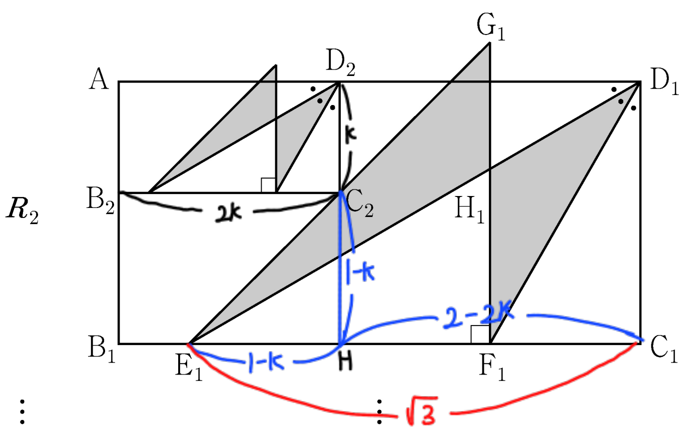
$$=\left[3\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=3\ln 2-\frac{1}{2}+1$$

$$=3\ln 2+\frac{1}{2}$$

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 ◿◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ◿◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]





⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

$R_1 = S_1 + S_2$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$
$= \frac{6-\sqrt{3}}{9}$

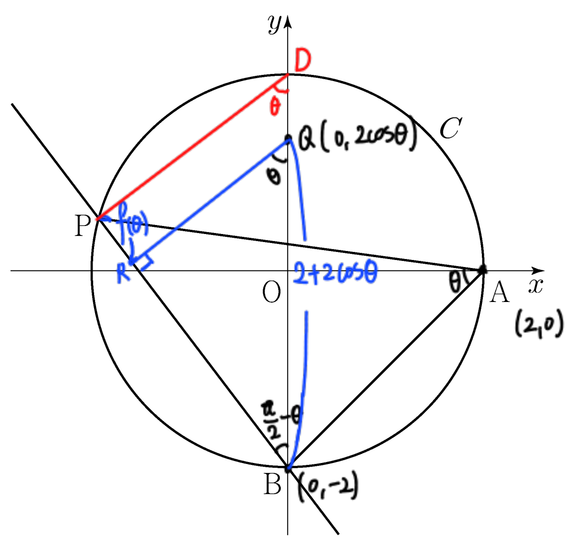
$\overline{E_1H} + \overline{HC_1} = \sqrt{3}$
$3-3k = \sqrt{3}$
$\therefore k = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

닮음비 $1 : \frac{3-\sqrt{3}}{3}$
넓이비 $1 : \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9} \Leftrightarrow 1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}$
$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 A$(2, 0)$, B$(0, -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자.
점 Q$(0, 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



$\triangle BPD \backsim \triangle BRQ$ (닮음) $\Rightarrow \angle BQR=\theta$

$\overline{BQ} = 2+2\cos\theta$
$\overline{RB} = (2+2\cos\theta)\sin\theta$
$\overline{PB} = 4\sin\theta$
$\Rightarrow f(\theta) = (2-2\cos\theta)\sin\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta = \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$
$= \left(-1-\frac{3}{4}\right) - \left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

단답형

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

24

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.

(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

$g'(x) = (f(x)+2)e^{f(x)}\cdot f'(x) + f'(x)\cdot e^{f(x)}$

$= e^{f(x)}\cdot f'(x)(f(x)+3)$

$\Rightarrow f'(x)=0$ or $f(x)=-3$

$f(x)+3 = k(x-b)(x-(b+6)) \Rightarrow f'(b+3)=0$ 이므로, $a=b+3$

$f(b+3)+3 = 9 = k(3)(-3)$ $\therefore k=-1$

$f(x) = -(x-\underbrace{(b+3+\sqrt{6})}_{=\alpha})(x-\underbrace{(b+3-\sqrt{6})}_{=\beta})$

$\beta-\alpha = (2\sqrt{6})^2 = 24$

30. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

115

(가) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\sin(\pi f(0))=0 \Rightarrow f(0)=c$ (c는 정수)

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+c$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi f(x))-\sin(\pi f(0))}{x-0} = \underbrace{\pi f'(0)}_{=0}\times\underbrace{\cos(\pi f(0))}_{\neq0}=0 \Rightarrow f'(0)=0$ $\therefore b=0$

$f(0)=f(1) \Leftrightarrow c=9+a+c \Rightarrow a=-9$

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2) \Rightarrow x=0, \frac{2}{3}$

$f(0)\times f(\frac{2}{3}) = c\times(c-\frac{4}{3}) = c^2-\frac{4}{3}c=5 \Rightarrow c=3$

$f(x)=9x^3-9x^2+3$

$\int_0^5 xg(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$

$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1(x+1)f(x)dx+\int_0^1(x+2)f(x)dx+\int_0^1(x+3)f(x)dx+\int_0^1(x+4)f(x)dx$

$=5\cdot\int_0^1 xf(x)dx+10\cdot\int_0^1 f(x)dx$

$=5\int_0^1(9x^4-9x^3+3x)dx+10\cdot\int_0^1(9x^3-9x^2+3)dx$

$=\frac{111}{4}$

$\therefore p+q=115$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.