수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2}{\log_3 6} = 2\log_6 3 = \log_6 9$

$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $\dfrac{a_5}{a_3}=4$일 때, a_4의 값은? [2점]

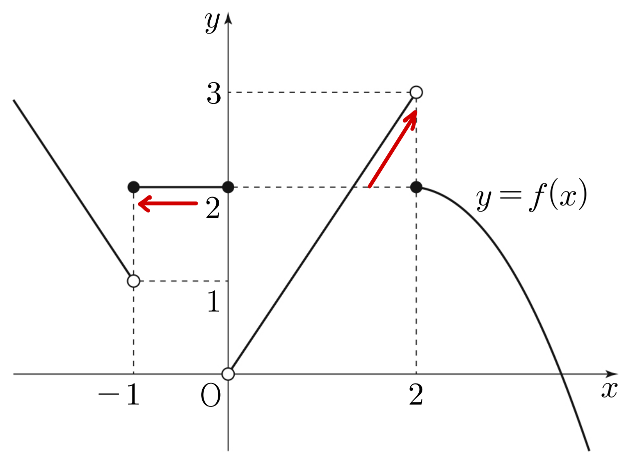
① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

공비 r

$\frac{a_5}{a_3} = r^2 = 4 \quad \therefore\ r=2$

$a_4 = a_1 r^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2 + 3 = 5$

4. 함수 $f(x)=2x^3-6x+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2-6$

$x=1$ 에서 극소

$f(1) = -4+a = 2$

$\therefore\ a=6$

5. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = h^2+2h+3$$

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 이므로

$\lim_{h\to 0}(h^2+2h+3) = 3$

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

밑이 $\frac{1}{2}$이므로 주어진 로그함수는 감소한다.

따라서 $x=2$에서 최댓값 3

$x=5$에서 최솟값 1

이다.

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b=3$

$\log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b=1$

차!!

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)-\log_{\frac{1}{2}}(5-a)=2$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-a}{5-a}=2$ 이므로 $\frac{2-a}{5-a}=\frac{1}{4}$이다.

$8-4a=5-a$ 이므로 $\therefore a=1$

$\log_{\frac{1}{2}}1+b=3$ $\therefore b=3$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

접선 $y=3x-1$ 접점 $(0, f(0))$

대입

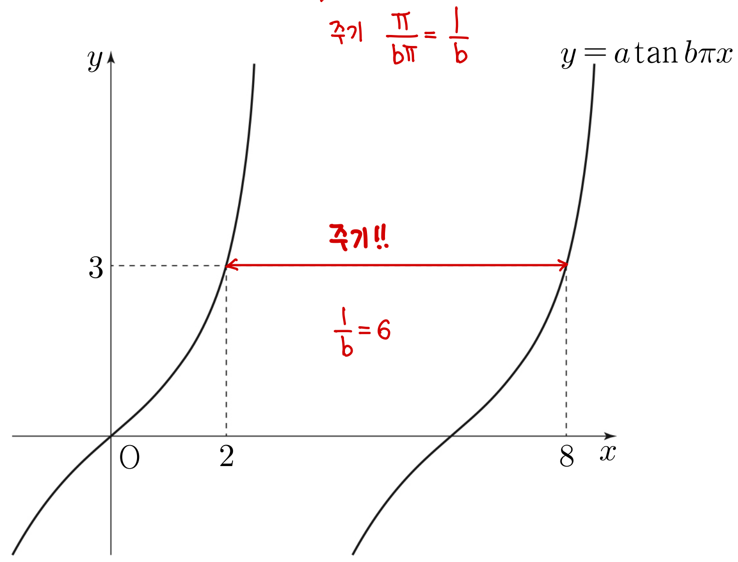
$f'(0)=3$, $f(0)=-1$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+6=5$

8. 그림과 같이 함수 $y = a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(8,\ 3)$을 지날 때, $a^2 \times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

주기 $\frac{\pi}{b\pi} = \frac{1}{b}$



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$3 = a\tan\frac{\pi}{6}\cdot 2$

$3 = a\cdot\sqrt{3}$ $\therefore$ $a = \sqrt{3}$

$a^2 \times b = 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\int f(t)dt = F(t) + C$ 라고 놓자.

$\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$ 이다.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$ 이므로 $C = 1$ 이다.

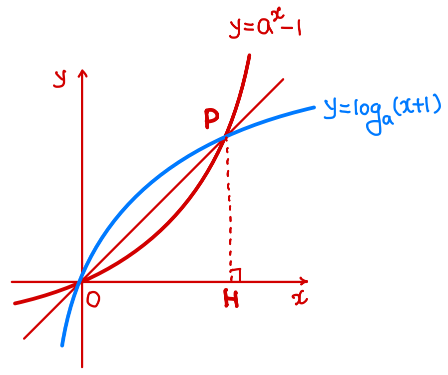
$f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$

10. 상수 $a\,(a > 1)$에 대하여 곡선 $y = a^x - 1$과 곡선 $y = \log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$y = a^x - 1$. $y = \log_a(x+1)$

역함수 관계. $y = x$ 대칭!!



$P(t,\ t)$ 라고 놓자. $(t > 0)$

삼각형 OHP의 넓이가 2 이므로

$\frac{1}{2}t^2 = 2$, $t^2 = 4$. $\therefore t = 2$

$a^2 - 1 = 2$

$a^2 = 3$

$\therefore a = \sqrt{3}$

11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

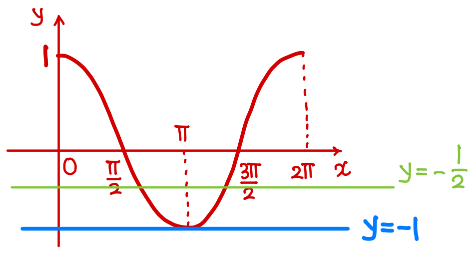
먼저 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로 $\cos x = t$로 치환하면 $(-1 \le t \le 1)$ 중요!!

주어진 방정식은

$2(1-t^2) - 3t = K$

이다.

여기서 실근이 3개!! 해석 필요.



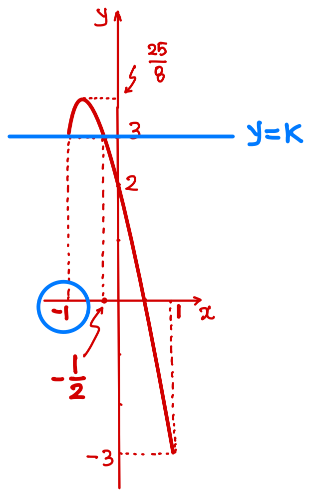
반드시 $y = \cos x$, $y = -1$ 만나야 한다.

이외에는 실근의 개수가 항상 2개 이기 때문이다.

다시 t에 관한 방정식으로 돌아가서...

정리하면 방정식 $-2t^2 - 3t + 2 = K$ $(-1 \le t \le 1)$ 이다.

여기서 $y = -2t^2 - 3t + 2 = -2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$



따라서 $K = 3$. 이다.

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$(2t+1)(t+1) = 0$

이므로

$t = -\frac{1}{2}$ 또는 -1 이다.

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3}$

α

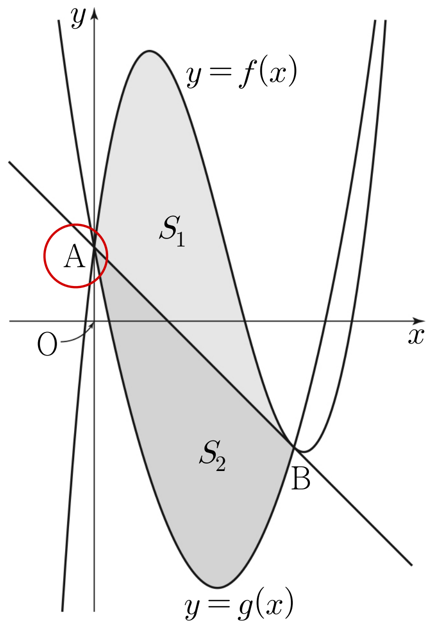
따라서 $K \times \alpha = 3 \times \frac{4\pi}{3} = 4\pi$

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$의 그래프가 점 A$(0, 1)$, 점 B$(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.

곡선 $y = f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,

곡선 $y = g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

접선이 A(0, 1)을 지난다. 중요포인트!!

점B에서 접선은

$y = (3K^2 - 12K + 8)(x - K) + K^3 - 6K^2 + 8K + 1$ 이다.

A (0, 1)을 대입

$1 = -2K^3 + 6K^2 + 1$, $2K^2(K-3) = 0$ $\therefore K = 3$

따라서 접선 $y = -x + 1$ 이다

일단 $S_1 + S_2 = \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx$ 이다.

$S_1 = S_2$ 이므로

$2S_1 = 2\int_0^3 \{f(x) - (-x+1)\} dx = \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx$ 가 된다.

정리하면 $\int_0^3 \{f(x) + 2x - 2\} dx = -\int_0^3 g(x) dx$ 이다

$\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 5x - 1) dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x\right]_0^3$

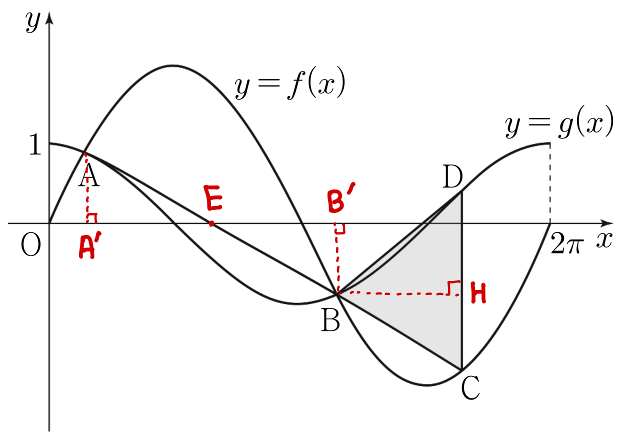
$= \frac{81}{4} - 54 + \frac{45}{2} - 3$

$= \frac{33}{4}$

따라서 $\int_0^3 g(x) dx = -\frac{33}{4}$ 이다.

$f'(x)=3x^2-3t^2$ $x=-t$에서 극대, $x=t$에서 극소.

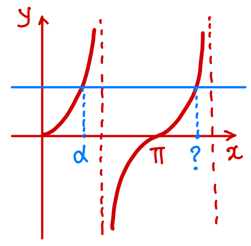
13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\dfrac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi$ ④ $\dfrac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

방정식 $k\sin x=\cos x$ 에서 정리하면 ~

$\tan x=\frac{1}{k}$ 이다.



주기가 π 이므로

$?=\pi+\alpha$ 가 된다.

따라서 $A(\alpha, \cos\alpha)$

$B(\pi+\alpha, \underbrace{\cos(\pi+\alpha)}_{-\cos\alpha\ !!})$ 이다.

3:1 외분

$A(\alpha, \cos\alpha)$, $B(\pi+\alpha, -\cos\alpha)$

$C\left(\underbrace{\frac{3(\pi+\alpha)-\alpha}{3-1}}_{=\frac{3\pi}{2}+\alpha}, \underbrace{\frac{-3\cos\alpha-\cos\alpha}{3-1}}_{=-2\cos\alpha}\right)$ 이다.

따라서 점D의 y좌표는 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha$ 이다.

$\overline{CD}=\sin\alpha-(-2\cos\alpha)=\sin\alpha+2\cos\alpha$

$\overline{BH}=\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-(\pi+\alpha)=\frac{\pi}{2}$

α 또는 $\sin\alpha$ 또는 $\cos\alpha$ 값을 알아야 하는데...

다시 점C로 돌아가서~

점C는 $y=k\sin x$ 위의 점이므로 $-2\cos\alpha=k\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}_{-\cos\alpha}$ 이다.

따라서 $k=2$ 이다. 다시 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$ 이다.

삼각형 BCD의 넓이는 $\frac12\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac{4}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt5}{4}\pi$ 이다.

14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x = x(x-\sqrt3 t)(x+\sqrt3 t)$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

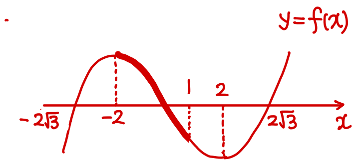
ㄱ. $g(2)=32$

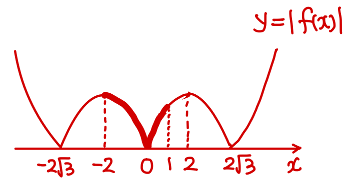
ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac12+h\right)-g\left(\frac12\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac12+h\right)-g\left(\frac12\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.





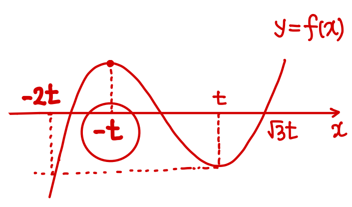
$M_1(2)=f(-2)=(-2)^3-12(-2)=16$

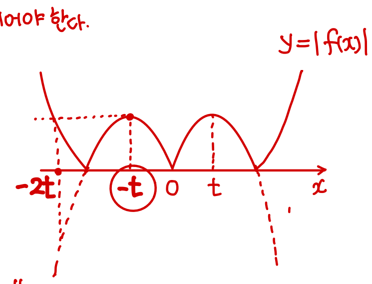
$M_2(2)=16$

$g(2)=M_1(2)+M_2(2)=32$ (참)

ㄴ. $g(t)=M_1(t)+M_2(t)=2f(-t)$ 해석하면 ~^^

$M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=f(-t)$ 이어야 한다.





여기서 $f(-t)=2t^3$ 이다. $y=|f(x)|$ 고려~!!

$x^3-3t^2x=-2t^3$, $x^3-3t^2x+2t^3=0$ $(x+2t)(x-t)^2=0$

$\therefore$ $x=-2t$ 또는 $x=t$.

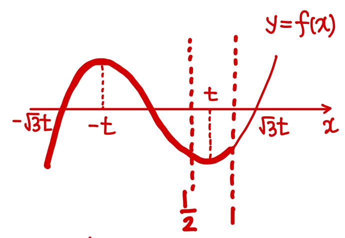
따라서 $-2t\le-2\le-t$ 이고 $t\ge1$ 이어야 한다.

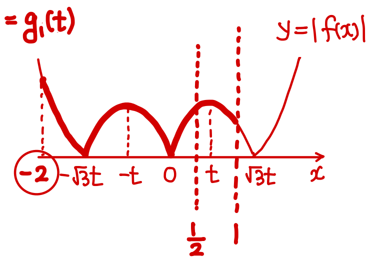
정리하면 $1\le t\le2$ 이다. 최솟값은 1. 최댓값은 2 이다. (참)

ㄷ. 주어진 식이 $t=\frac12$에서 좌·우미분계수~^^ 조심!!

(i) $\frac12\le t<1$: $M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=-f(-2)$

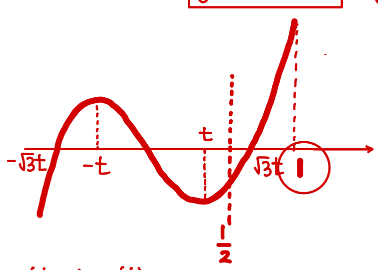
$\boxed{g(t)=2t^3-6t^2+8}=g_1(t)$

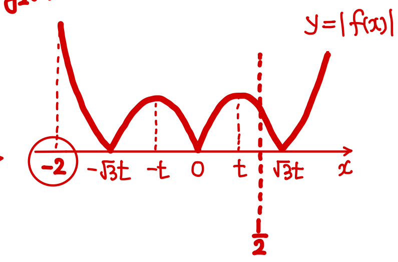




(ii) $t<\frac12$: $M_1(t)=f(1)$ $M_2(t)=-f(-2)$

$\boxed{g(t)=-9t^2+9}=g_2(t)$





$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac12+h\right)-g\left(\frac12\right)}{h}=g_1'\left(\frac12\right)=-\frac92$, $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac12+h\right)-g\left(\frac12\right)}{h}=g_2'\left(\frac12\right)=-9$ (거짓)

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

조건나에 의해 a_5, a_6으로 부터 정보를 얻어야 한다.

(i) $a_5<1$

$a_6 = 2^{5-2} = 8$ 이므로 $a_5 + a_6 = 8.x$ (모순)

(ii) $a_5 \geq 1$

$a_6 = \log_2 a_5$ 이다. $a_5 + \log_2 a_5 = 1$ 인데...

$\log_2 a_5 = 1 - a_5 \leq 0$ 가 되므로 $a_5 \leq 1$ 이 된다.

따라서 $a_5 = 1$ 이다.

$a_6 = 0$ 이다.

이제 $a_4 = ?$ $a_5 = \begin{cases} 2^{4-2} & (a_4<1) \text{ 모순.} \\ \log_2 a_4 & (a \geq 1) \end{cases}$

따라서 $a_4 = 2$ 이다.

동일한 방법으로 ~

$a_4 = \begin{cases} 2^{3-2} & (a_3<1) \\ \log_2 a_3 & (a_3 \geq 1) \end{cases}$ ~ $a_3 = 4$

[1] $a_3 < 1$

(i) $a_2 < 1$

$a_3 = 2^{2-2} = 1$ (모순)

(ii) $a_2 \geq 1$

$a_3 = \log_2 a_2$ 이고 $a_3 = K$라고 할때 $a_2 = 2^K$ 이다.

① $a_1 < 1$

$a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$ 이다.

여기서 $0<K<1$ 이므로 $1<a_2<2$ 이다.

따라서 모순.

② $a_1 \geq 1$

$a_2 = \log_2 a_1$ 이다. $a_1 = 2^{a_2} (\geq 2)$ 이다.

최솟값 m

[2] $a_3 \geq 1$ ($a_3 = 4$)

$4 = \log_2 a_2$ 이므로 $a_2 = 2^4$ 이다.

다음~ $16 = \log_2 a_1$ 이므로 $a_1 = 2^{16}$ 이다.

최댓값 M

$\frac{M}{m} = 2^{15}$ 이므로 $\log_2 \frac{M}{m} = 15$ 이다.

단답형

16. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5$

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

대입

$y = 4^{x-1} + a$

$5 = 4^{\frac{3}{2}-1} + a$

$4^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore a = 3$

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

이유!!

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$

상수항은??

$f(x)$가 다항식이므로

$xf(x)$는 상수항이 없다!!

$f(x)=2x^2+5x+a$

$f(0)=1$ 이므로 $a=1$ 이다

$f(1)=8$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$v(t)=0$

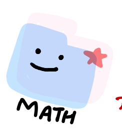
$v(t)=x'(t)=6t^3-24t^2+30t-12=0$

$t^3-4t^2+5t-2=0$

$(t-1)(t^2-3t+2)=0$

$(t-1)^2(t-2)=0$

$t=1$ 또는 $t=2$



접하므로 방향이 바뀌지 않았다.

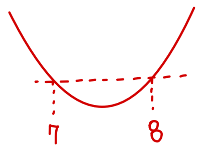
따라서 $t=2$ 일때 방향이 바뀌었다.

$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$

$a(2)=72-96+30=6$

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m\rvert=\lvert S_{2m}\rvert=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.



$S_n=An^2+Bn$

$-\frac{B}{2A}=\frac{15}{2}$ $\quad\therefore B=-15A$

$m>8$ 이므로 $S_m<0$ 이다. $S_m+S_{2m}=0$ 이다.

$Am^2-15mA+4Am^2-30mA=0$

$A,\ m\neq 0$ 이므로

$5m-45=0$ 이다. $\quad\therefore m=9$

$S_9=-162$ 이므로

$A\cdot 9^2-15A\cdot 9=-162$

$9A-15A=-18$ $\quad\therefore A=3$

따라서 $S_n=3n^2-45n$

$a_{13}=S_{13}-S_{12}$ 이므로

$3\cdot 13^2-45\cdot 13-(3\cdot 12^2-45\cdot 12)$

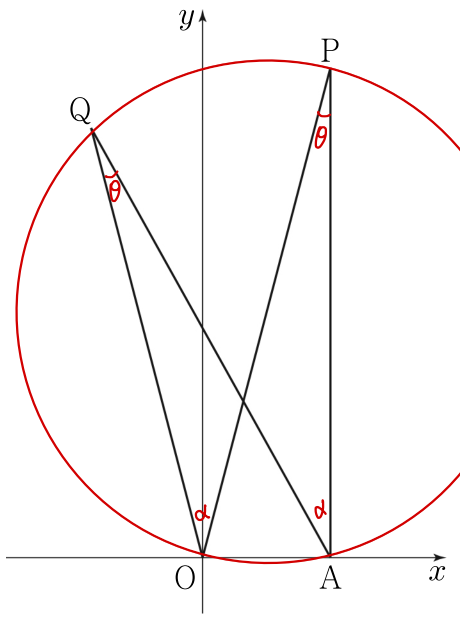
$=3\cdot(13^2-12^2)-45$

$=3\cdot 25-45=30$

21. 좌표평면 위의 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(2,\ 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle \mathrm{OPA})=\cos(\angle \mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



MATH

원주각의 성질에 의해. 조건나로 부터 네 점 O, A, P, Q는 한 원 위에 있다.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ 이다.

삼각형 OAP 에서 사인법칙 적용하여 $\dfrac{\overline{OA}}{\sin\theta} = 2R$

(R은 원의 반지름)

$\dfrac{2}{\frac{1}{4}} = 2R$ $\quad\therefore$ **R=4**

여기서 $\overline{PA}^2 + \overline{OA}^2 = 64$ 이므로 지름^{2}과 같으므로

선분 $\overline{OP}$ 가 **지름이다.**

따라서 **$\angle OAP = \angle PQO = 90°$** 이다.

삼각형 OAQ에서 코사인법칙 적용~^^

$\overline{OA}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{OQ}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos\theta$

$4 = \overline{OQ}^2 + 60 - 2\cdot\overline{OQ}\cdot 2\sqrt{15}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\overline{OQ} = K$ 라고 놓자

$K^2 - 15K + 56 = 0$. $(K-8)(K-7)=0$.

$\overline{OP} > \overline{OQ}$ 이므로 **$\overline{OQ}=7$** 이다.

삼각형 OPQ에 피타고라스 정리 의해 **$\overline{PQ} = \sqrt{15}$** 이다.

사각형 OAPQ의 넓이 = 삼각형 OPQ + 삼각형 OAP

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot 7 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{15} = $ **$\dfrac{11}{2}\sqrt{15}$**

$p\times q = 22$

22. 두 상수 a, $b\,(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고
>
> $|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$|x|<2$ 일때 $g'(x) = -x+a$ 이다.

조건다에서 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 **$g'(1)=0$** 이다. **$\therefore a=1$**

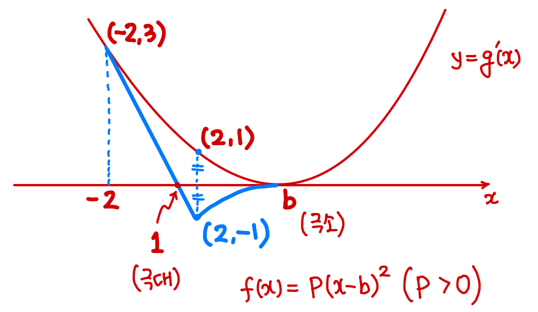
함수 $g'(x)$가 모든 실수에서 연속~^^

$\lim\limits_{x\to 2-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 2-}(-x+1) = -1$. 이므로 $f(2)=1$ 이다.

$\lim\limits_{x\to -2+} g'(x) = \lim\limits_{x\to -2+}(-x+1) = 3$ 이므로 $f(-2)=3$ 이다.

또한 $|g'(x)| = f(x)$ 이므로 **$f(x)\geq 0$** 이다

$x=b$에서 극값을 가지므로 함수 $f(x)$는 **$x=b$에서 접해야 한다.**



$f(x) = P(x-b)^2 \ (P>0)$

$P(-2-b)^2 = 3$
$P(2-b)^2 = 1$
$\sim$ $\dfrac{2+b}{2-b} = \pm\sqrt{3}$. $b>2$ 이므로

$2+b = -\sqrt{3}(2-b)$. $b = \dfrac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1} =$ **$4+2\sqrt{3}$**

함수 $g(x)$는 $g(0)=0$ 이고 $x=1$ 에서 극대이므로

$x<1$ 에서는 $g(k)=0$ 을 만족하는 k의 값은 **0** 이다.

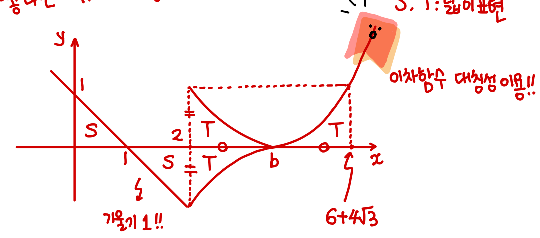
$x>1$ 에서는 $g(k)=0$ 을 어떻게 구할것인가?? ㅠㅠ

$g(k) = \displaystyle\int_0^k g'(x)dx$ 라고 놓을수 있다. $(\because g(0)=0)$

그렇다면 위 그래프를 이용하자. (확대)

S, T: 넓이표현

이차함수 대칭성 이용!!



$0+2+6+4\sqrt{3} =$ **$8+4\sqrt{3}$** $\qquad$ **$p\times q = 32$**

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.