수학 영역

제 2 교시 KSM

5지선다형

1. $\log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 6}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

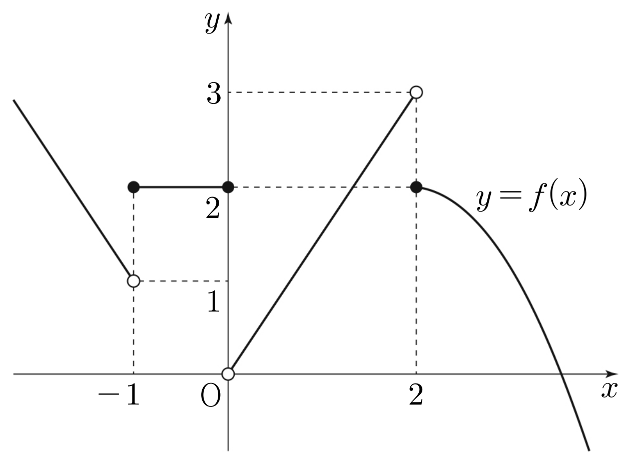
2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $\dfrac{a_5}{a_3} = 4$일 때, a_4의 값은? [2점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

$r^2=4,\ r=2$

$3\times 2^3 = 24$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1+} f(x) + \lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+3$

4. 함수 $f(x)=2x^3-6x+a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f' = 6x^2-6 = 6(x-1)(x+1)$

$f(1) = a-4 = 2,\ a=6$

5. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = h^2+2h+3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+2h+3) = 3$$

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(2) = \log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b = 3$

$-\ f(5) = \log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b = 1$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-a}{5-a} = 2$

$\frac{2-a}{5-a} = \frac{1}{4}$, $5-a = 8-4a$

$a=1$

$\log_{\frac{1}{2}}1 + b = 3$

$b = 3$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

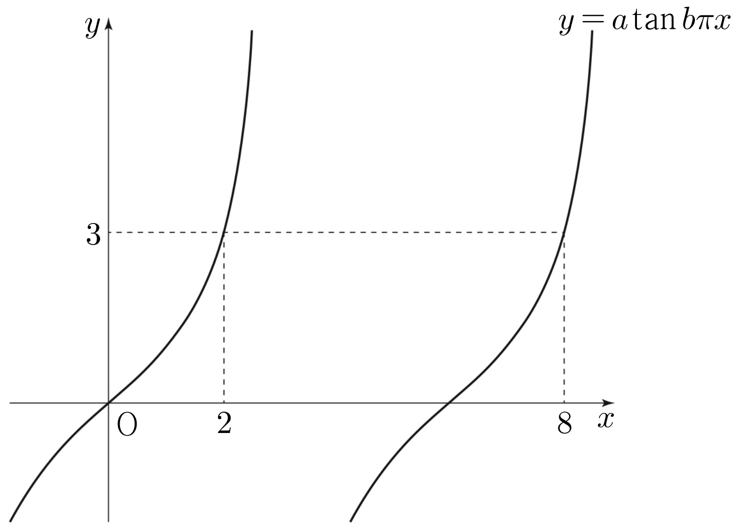
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f'(0)=3 \end{cases}$$

$g'(x) = f(x) + (x+2)f'(x)$

$g'(0) = f(0)+2f'(0) = -1+6 = 5$

8. 그림과 같이 함수 $y = a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2, 3)$, $(8, 3)$을 지날 때, $a^2 \times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

주기 $\frac{\pi}{b\pi} = \frac{1}{b} = 6$, $b = \frac{1}{6}$

$(2,3) \to a\tan\frac{\pi}{3} = 3$, $a = \sqrt{3}$　$a^2 \times b = \frac{1}{2}$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$f(0) = 1$

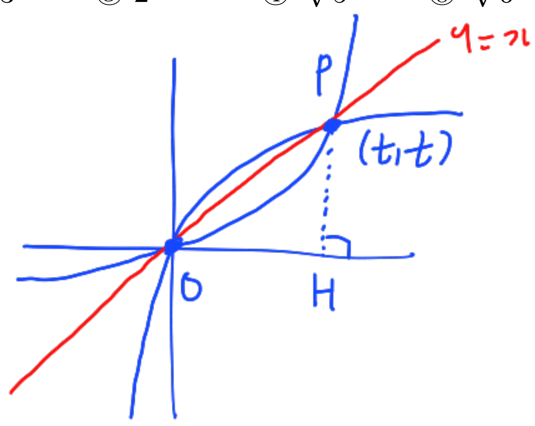
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

$f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$

10. 상수 $a\,(a > 1)$에 대하여 곡선 $y = a^x - 1$과 곡선 $y = \log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

역함수



$\frac{1}{2}t^2 = 2$, $t = 2$　$P(2,2)$

$a^2 - 1 = 2$, $a = \sqrt{3}$

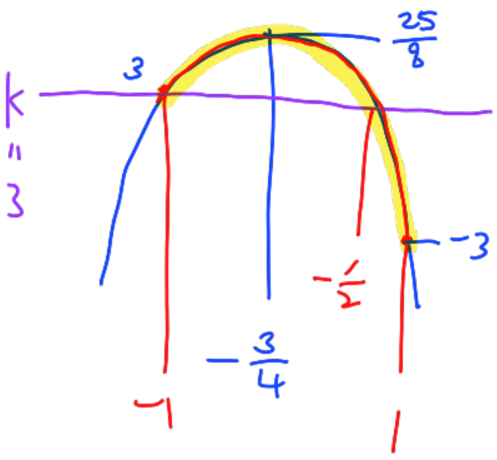
11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

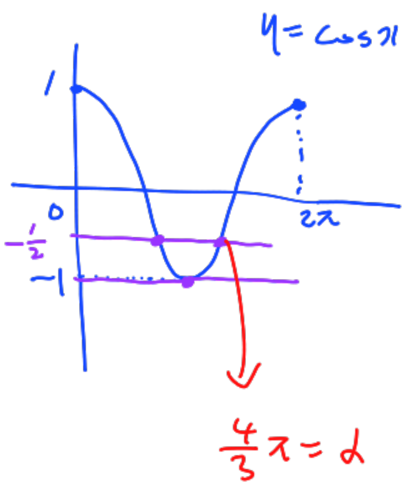
① $\frac{7}{2}\pi$　② 4π　③ $\frac{9}{2}\pi$　④ 5π　⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2(1-c^2)-3c=k \quad (-1 \le c \le 1)$

$-2c^2-3c+2=k$

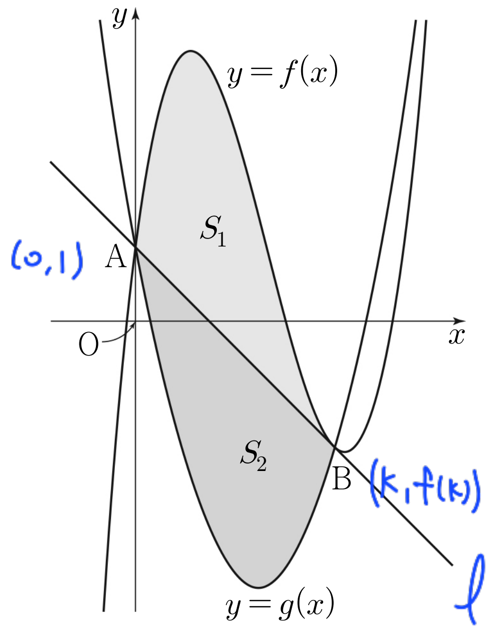
$-2\left(c+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}=k$





$3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,1)$, 점 $\mathrm{B}(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,
곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1=S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]



① $-\frac{17}{2}$　② $-\frac{33}{4}$　③ -8　④ $-\frac{31}{4}$　⑤ $-\frac{15}{2}$

$0+k+k=6, \quad k=3, \quad B(3,-2)$

$l: y=-x+1$

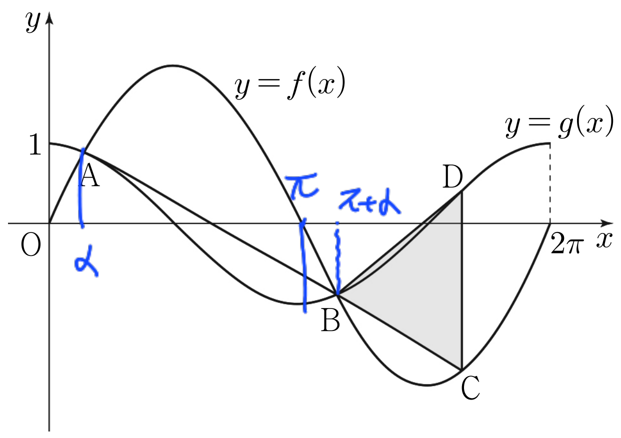
$\int_0^3 (f-l) = \int_0^3 (l-g)$

$\int_0^3 g = \int_0^3 (2l-f) = \int_0^3 \left((-2x+2)-(x^3-6x^2+8x+1)\right)dx$

$= \int_0^3 (-x^3+6x^2-10x+1)dx$

$= -\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x \Big|_0^3 = -\frac{81}{4}+54-45+3 = -\frac{33}{4}$

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$ ④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

$k\sin\alpha=\cos\alpha$

$\tan\alpha=\frac{1}{k}$

$A(\alpha, \cos\alpha)$ $B(\pi+\alpha, -\cos\alpha)$

3:1 외분

$C\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha, -2\cos\alpha\right)$ f(x) 위의 점

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-k\cos\alpha$, $k=2$

$D\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha, \sin\alpha\right)$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt5=\frac{\sqrt5}{4}\pi$

14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x = x(x+\sqrt3 t)(x-\sqrt3 t)$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

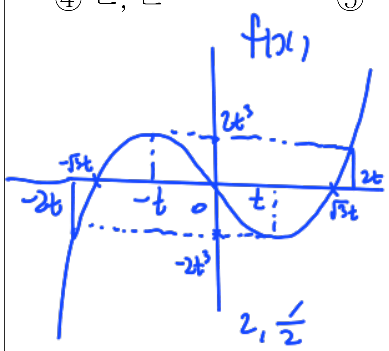
〈보 기〉

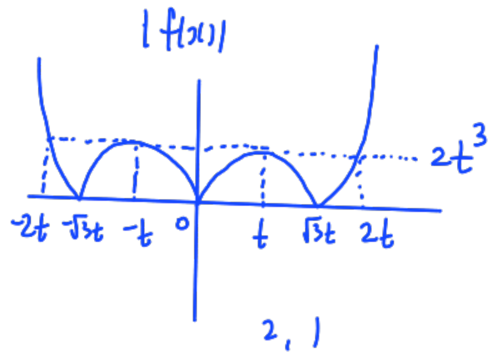
ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim\limits_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim\limits_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ





ㄱ. $g(2)=M_1(2)+M_2(2)=f(-2)+f(-2)=16+16=32$

ㄴ. $g(t)$

$t\ge2$ $f(-2)+f(-2)=12t^2-16$

$1\le t<2$ $f(-t)+f(-t)=4t^3$

$\frac12\le t<1$ $f(-t)+|f(-2)|=2t^3-6t^2+8$

$0<t<\frac12$ $f(1)+|f(-2)|=-9t^2+9$

$g(t)=2f(-t)$ $\Rightarrow 1\le t\le2$

최대2 (최소1) 3

ㄷ. $g'\left(\frac12^+\right)-g'\left(\frac12^-\right)$

$=\left(6\left(\frac12\right)^2-12\left(\frac12\right)\right)-\left(-18\left(\frac12\right)\right)=\frac92$

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

i) $a_5 \geq 1 \rightarrow a_6 = \log_2 a_5$

$\underbrace{a_5 + \log_2 a_5}_{\geq 0} = 1 \rightarrow a_5 = 1$

$a_6 = 0$

$a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
1	2	$\alpha (\alpha < 1)$	$2^{\alpha} (\geq 1)$, $\alpha \geq 0$	$2^{2^{\alpha}} (\geq 2)$
		2^2	2^4	2^{16}

ii) $a_5 < 1 \rightarrow a_6 = 2^3 = 8$

$a_5 + 8 = 1$, $a_5 = -7$

$a_6 = 8$

a_5	a_4	a_3
-7	2^{-7}	$2^{2^{-7}}$

(X) $\because a_3 < 1$

(X)

$M = 2^{16}$

$m = 2$

$\log_2 \frac{2^{16}}{2} = 15$

단답형

16. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$y = 4^{x-1} + a$

$5 = 4^{\frac{1}{2}} + a = 2 + a$

$a = 3$

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$f(x)=2x^2+5x+1$

$f(1)=8$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12$

$=6(t^3-4t^2+5t-2)$

$=6(t-1)(t^2-3t+2)$

$=6(t-1)^2(t-2)$ $\quad t=2$

$a(t)=18t^2-48t+30$

$a(2)=72-96+30=6$

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{30}$

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.

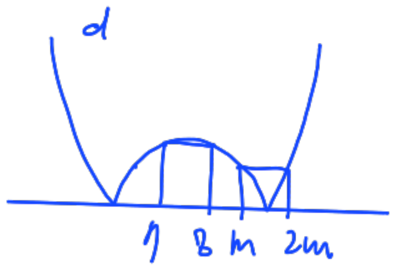
$a_7\quad a_8\quad a_9$ $\qquad a=-7d$

$-\quad 0\quad +$ $\qquad a_n=(n-8)d$

$\|\qquad\quad \|$

$-d\qquad d$

$S_n=\frac{d}{2}n(n-15)$



$S_m=-S_{2m},\ S_m+S_{2m}=0$

$S_m+S_{2m}=\frac{d}{2}m(m-15)+\frac{d}{2}\cdot 2m(2m-15)=0$

$\frac{d}{2}m(5m-45)=0,\ m=9$

$S_m=S_9=\frac{d}{2}\times 9\times(-6)=-162$

$d=6$

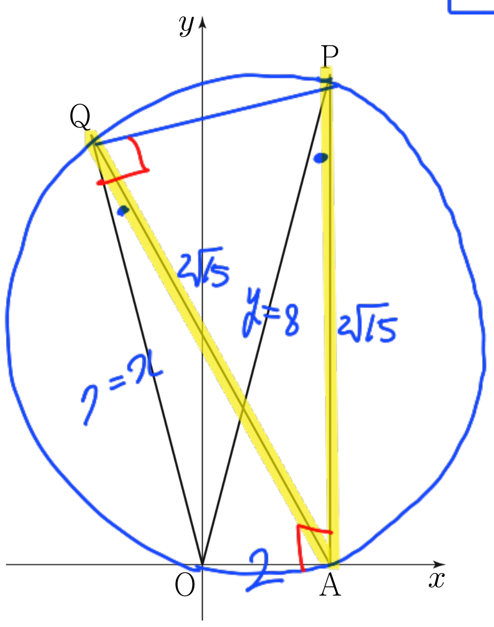
$\therefore\ a_{13}=5d=30$

21. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{22}$



$4=x^2+60-2\cdot2\sqrt{15}x\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$x^2-15x+56=0$, $x=7$ or 8

$\therefore x=7$, $y=8$

$8^2=2^2+(2\sqrt{15})^2$ $\therefore \angle OAP=90°=\angle OQP$

$OP^2+49=64$, $OP=\sqrt{15}$

$S=\triangle OAP+\triangle OQP$

$=2\sqrt{15}+\frac{7}{2}\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}$, $p=2$, $q=11$

$p\times q=22$

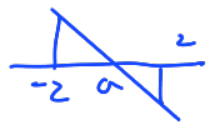
22. 두 상수 a, $b(b\neq1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고
> $|x|\geq2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

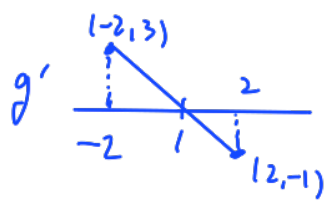
$\boxed{32}$

$|x|<2$ $g(0)=0$, $g'(x)=-x+a$

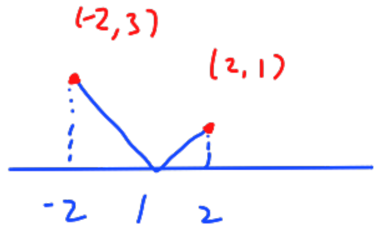


$x=1$ 극값 $\Rightarrow a=1$

$g'(x)=-x+1$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$



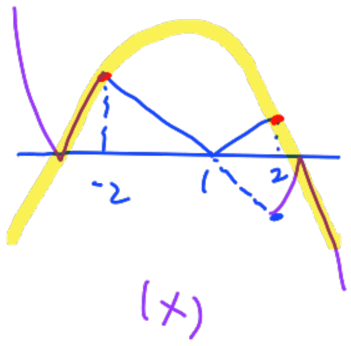
$|x|\geq2\rightarrow|g'(x)|=f(x)$ (2차)

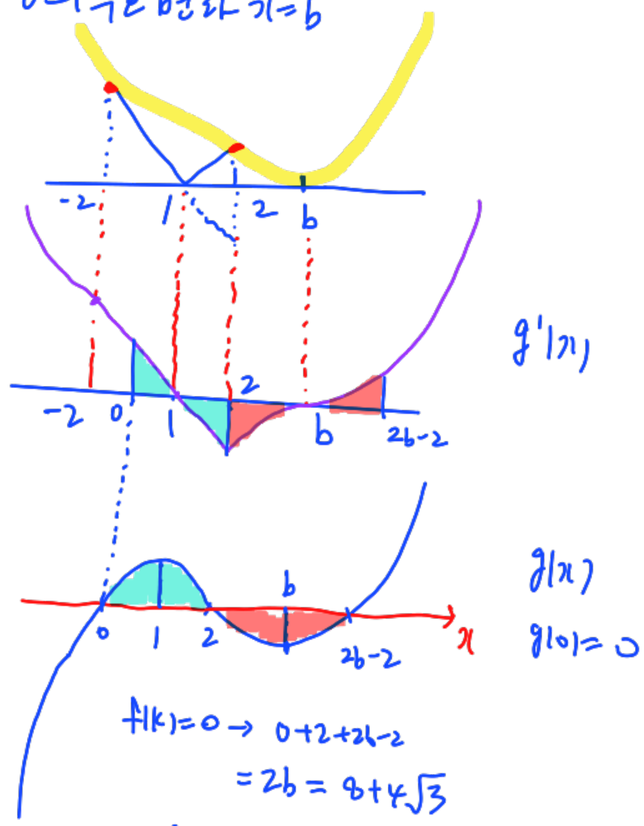


$|g'(-2)|=f(-2)=3$

$|g'(2)|=f(2)=1$

g'의 부호 변화 $x=b$





$f(x)=p(x-b)^2$

$f(-2)=p(-2-b)^2=3$

$f(2)=p(2-b)^2=1$

$3b^2-12b+12=b^2+4b+4$

$b^2-8b+4=0$

$b=4\pm\sqrt{12}\Rightarrow4+2\sqrt{3}$

$f(k)=0\rightarrow0+2+2b-2$

$=2b=8+4\sqrt{3}$

$p=8$, $q=4$, $p\times q=32$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}\Pi_{2}+{}_{2}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$9+4$

24. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=5,\ A\cap B=\varnothing$$

을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

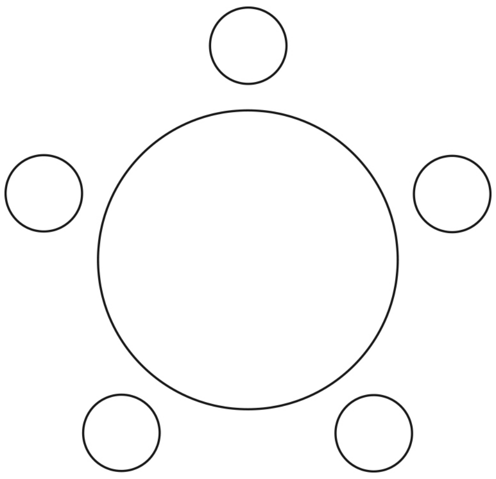
① 168 ② 174 ③ 180 ④ 186 ⑤ 192

A B

${}_{6}C_{5}\times 2^{5}=192$

25. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168



$_4C_2 \times 4! = 144$

26. 방정식 $3x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

$x=1 \rightarrow {}_3H_5 = 21$

$x=2 \rightarrow {}_3H_2 = 6$

27. 양수 a에 대하여 $\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1일 때, $\dfrac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 70 ② 140 ③ 210 ④ 280 ⑤ 350

$x=1 \rightarrow \left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1$

$a-\frac{2}{a}=1,\quad a^2-a-2=0$

$a=-1,2 \qquad a=2$

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7 \qquad {}_7C_3(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$35\times8=280$

28. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280

1 1 2 2 2 3 3 4

홀4, 짝4

i) 홀4 짝3 → 222 / 224

∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨

222 1133 → $\frac{4!}{2!2!}=6$

224 1133 → $3\times\frac{4!}{2!2!}=18$) 24

ii) 짝4 홀3 → 113 / 133

∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨

113 2224 → $\frac{4!}{3!}\times{}_5C_3\times\frac{3!}{2!}=120$

133 2224 → 120) 240

$240+24=264$

단답형

29. 두 집합

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{523}$

(가) $f(4)=\underbrace{f(1)+f(2)+f(3)}_{A}$ $3\sim15$

(나) $2f(4)=\underbrace{f(5)+f(6)+f(7)+f(8)}_{B}$ $4\sim20$

$3 \le f(4) \le 5$

i) $f(4)=3$, $A=3$, $B=6$

$a+b+c+d=6$

$1\times10=10$ $\quad {}_4H_2=10$

ii) $f(4)=4$, $A=4$, $B=8$

${}_3H_1=3$ $\quad a+b+c+d=8$

${}_4H_4=35$

$3\times35=105$

iii) $f(4)=5$, $A=5$, $B=10$

${}_3H_2=6$ $\quad a+b+c+d=10$

6 2 1 1 → 12

7 1 1 1 → 4) 16

${}_4H_6-16=68$

$6\times68=408$

$\therefore 10+105+408=523$

30. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, *baaacca*, *ccbbaaa*는 조건을 만족시키는 문자열이고 *aabbcca*, *aaabccc*, *ccbaaaa*는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{188}$

a a a b _ _ _ $\quad 2\times(3^3-5)=44$

b or c $\quad$ bbba bccc bbbb baaa bbbc

b a a a b _ _ $\quad 2\times2\times(3^2-1)=32$ $\quad$ bbb

_ b a a a b _ $\quad 2\times2\times3^2=36$

_ _ b a a a b $\quad 32$

_ _ _ b a a a $\quad 44$

$44+32+36+32+44=188$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2+2}$$

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$

$f'(0)=1+2=3$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n \times a_n + 5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\to a_n = 2$

$\frac{2+10}{1} = 12$

26. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

$f(e)=g(e) \to a^e = 2\log_b e = \frac{2}{\ln b}$

$f'(e)=g'(e) \to a^e \ln a = \frac{2}{e\ln b}$

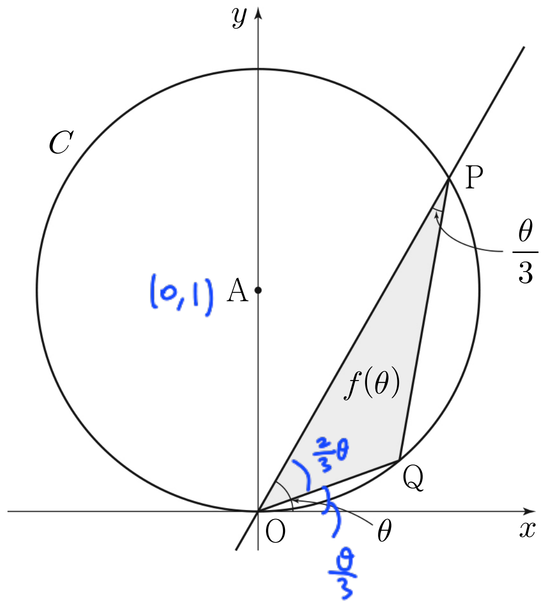
$\frac{2}{\ln b}\times \ln a = \frac{2}{e\ln b}$

$\ln a = \frac{1}{e}$, $a = e^{\frac{1}{e}}$

$e = \frac{2}{\ln b}$, $\ln b = \frac{2}{e}$, $b = e^{\frac{2}{e}}$

$a\times b = e^{\frac{3}{e}}$

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{\theta}{3}} = \frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{2\theta}{3}} = 2$$

$\overline{OQ} = 2\sin\frac{\theta}{3}$, $\overline{PQ} = 2\sin\frac{2\theta}{3}$

$\angle OQP = \pi - \theta$

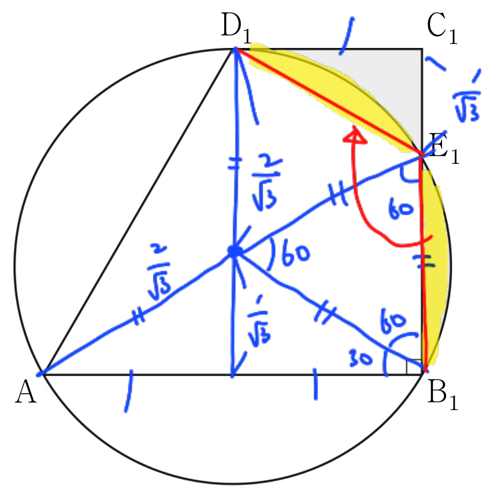
$$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{3}\cdot 2\sin\frac{2\theta}{3}\cdot \sin(\pi-\theta) \approx \frac{4}{9}\theta^3$$

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ◥ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ◥ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

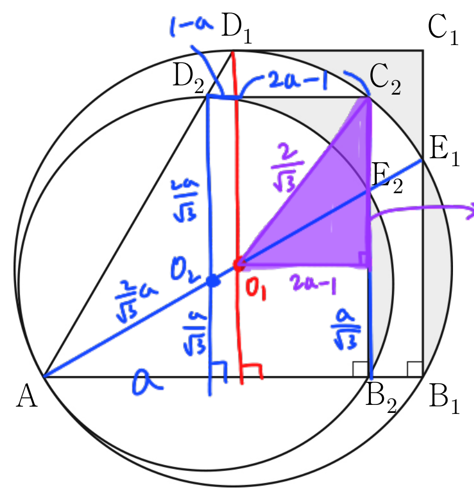
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

R_2



$\sqrt{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = (2a-1)^2 + \left(\sqrt{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\frac{4}{3} = 4a^2 - 4a + 1 + 3a^2 + \frac{1}{3} - 2a$

$7a^2 - 6a = 0$, $a = \frac{6}{7}$

l 1 : $\frac{6}{7}$

S 1 : $\frac{36}{49}$

⋮　　⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$　② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$　③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$

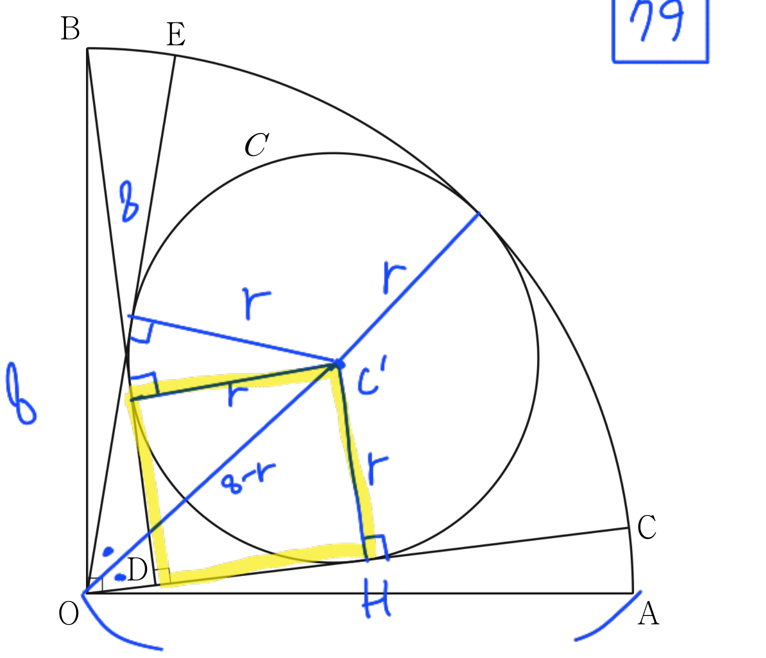
④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$　⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{36}{49}} = \frac{49}{78}\sqrt{3}$$

단답형

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{COE}) = \frac{7}{25}$이다.
$\sin(\angle \mathrm{AOE}) = p + q\sqrt{7}$일 때, $200 \times (p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]

$\boxed{79}$



$\angle C'OC = \angle C'OE = \theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{7}{25}$, $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 24 - 3r$, $r = 3$

$\overline{OH} = 4$, $\overline{DH} = 3$ $\therefore \overline{OD} = 1$, $\overline{BD} = \sqrt{63}$

$\sin(\angle BOD) = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\angle BOD = \alpha \rightarrow \angle COA = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\angle AOE = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2\theta$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\theta) = \cos(2\theta - \alpha) = \cos 2\theta \cos\alpha + \sin 2\theta \sin\alpha$

$= \frac{7}{25} \times \frac{1}{8} + \frac{24}{25} \times \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$= \frac{7 + 72\sqrt{7}}{200}$ $\quad 7 + 72 = 79$

30. $x \ge 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \le x \le 1) \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$ $\quad 2^{-(x-2)} - 1$
>
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2) = -\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x > 0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

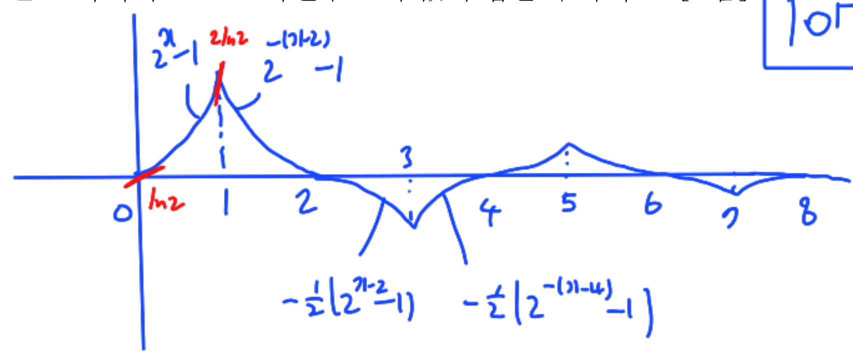
$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t \to 0+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{107}$



$f' = \begin{cases} 2^x \ln 2 & (0 < x < 1) \\ -2^{-(x-2)} \ln 2 & (1 < x < 2) \end{cases}$

$f'(1^-) = 2\ln 2$
$f'(1^+) = -2\ln 2$
$f'(2^-) = -\ln 2$
$f'(2^+) = -\frac{1}{2}\ln 2$

$g(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{-\frac{1}{2}(2^h - 1) - (2^h - 1)}{h} = -\frac{3}{2}\ln 2$

$g(4) = \frac{3}{4}\ln 2$, $g(6) = -\frac{3}{8}\ln 2$ …

$g(2k-1) = 0$, $g(2k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot 3\ln 2$

$g(1^+) - g(1^-) = -8\ln 2$
$g(3^+) - g(3^-) = 4\ln 2$
$g(5^+) - g(5^-) = -2\ln 2$
$\vdots$
$g(2k-1^+) - g(2k-1^-) = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ln 2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-4}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2^{24}}$

$k = 28$

$2k - 1 = 55$

$g(2^+) - g(2^-) = \ln 2$
$g(4^+) - g(4^-) = -\frac{1}{2}\ln 2$
$g(6^+) - g(6^-) = \frac{1}{4}\ln 2$
$\vdots$
$g(2k^+) - g(2k^-) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ln 2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\ln 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k 3\ln 2 = \frac{\ln 2}{2^{24}}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}(1 - 3) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{\ln 2}{2^{24}}$

$k - 2 = 24$, $k = 26$, $2k = 52$

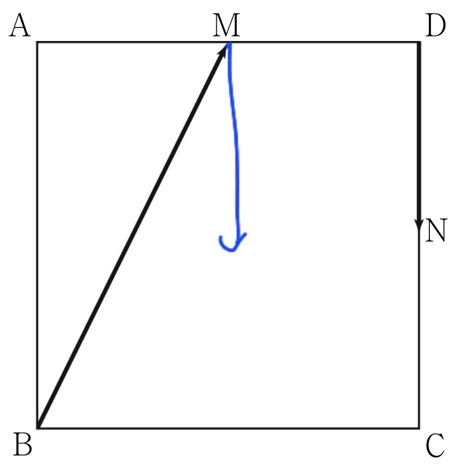
$\therefore 55 + 52 = 107$

※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 선분 AD, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{DN}}|$의 값은? [2점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$　④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, a는 양수이다.) [3점]

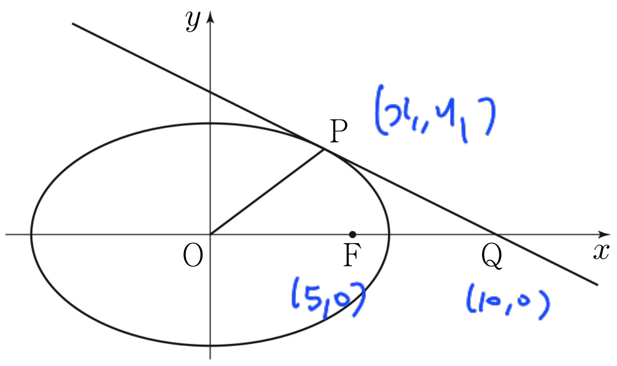
① $4\sqrt{2}$　② 6　③ $2\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{11}$　⑤ $4\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$, $a=2$

$c^2=4+8=12$

$c=2\sqrt{3}$

25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$c^2=25$, $c=5$. $F(5,0)$, $Q(10,0)$

$\frac{x_1 x}{40}+\frac{y_1 y}{15}=1$ (10,0)

$x_1=4$

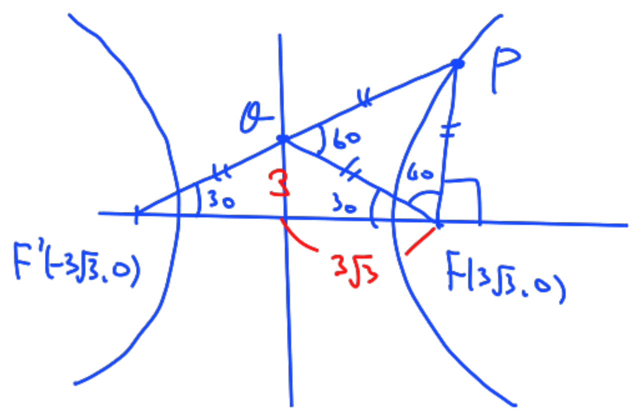
$\frac{16}{40}+\frac{y_1^2}{15}=1$, $y_1^2=9$

$y_1=3$

$S=\frac{1}{2}\times 10\times 3=15$

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(3\sqrt{3},\,0)$, $\mathrm{F'}(-3\sqrt{3},\,0)$인 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF′이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF가 정삼각형일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



$\overline{PQ}=\overline{QF}=\overline{PF}=6$, $P(3\sqrt{3},6)$

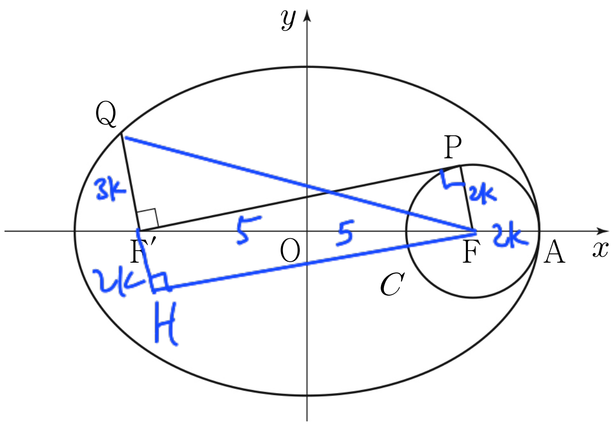
$\overline{PF'}-\overline{PF}=6=2a$, $a=3$

$2a=6$

27. 그림과 같이 두 점 F(5, 0), F′(−5, 0)을 초점으로 하는 타원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 y좌표가 양수인 점 P와 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 PF′은 원 C에 접한다.
> (나) 두 직선 PF′, QF′은 서로 수직이다.

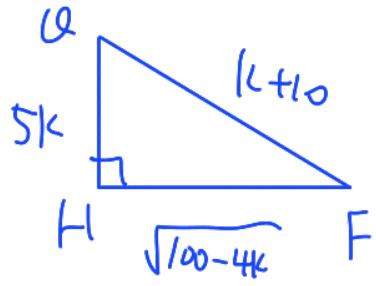
$\overline{\mathrm{QF'}} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{AF}} < \overline{\mathrm{FF'}}$) [3점]



① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$

$3k + \overline{QF} = 10 + 4k$, $\overline{QF} = k + 10$

$\overline{F'P} = \overline{HF} = \sqrt{100 - 4k^2}$



$k^2 + 20k + 100 = 25k^2 + 100 - 4k$

$24k^2 - 24k = 0$ $k = 1$

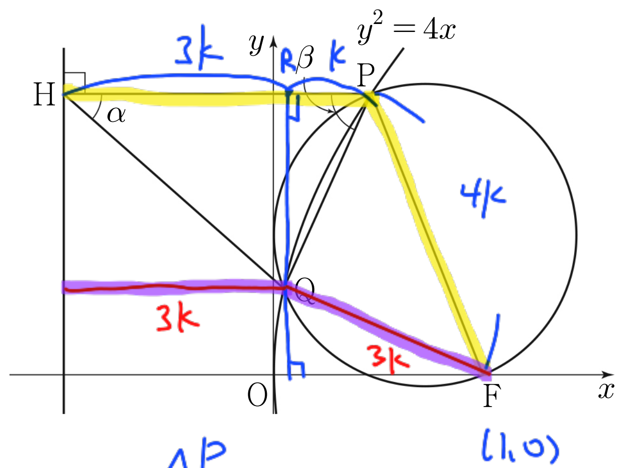
$10 + 4k = 14$

28. 초점이 F인 포물선 $C : y^2 = 4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q, 점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

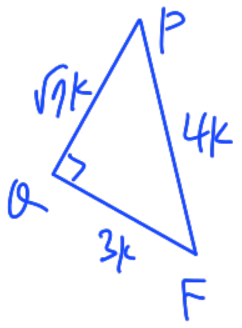
$\angle \mathrm{QHP} = \alpha$, $\angle \mathrm{HPQ} = \beta$라 할 때, $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 3$이다.

$\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? [4점]

① $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{7}$



HR : RP = 3 : 1
HR = 3k
RP = k



$PQ = \sqrt{7}k$

$QP^2 - PR^2 = QH^2 - HR^2$

$7k^2 - k^2 = QH^2 - 9k^2$

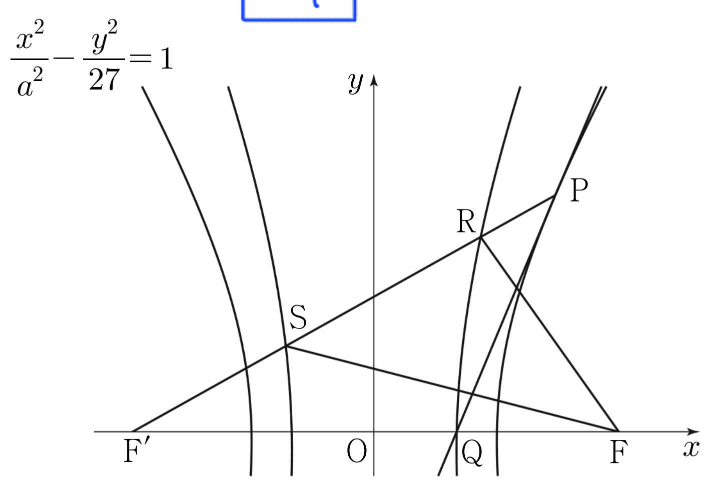
$QH^2 = 15k^2$ $\therefore \overline{QH} = \sqrt{15}k$

$\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}} = \frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{7}k} = \frac{\sqrt{105}}{7}$

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$$(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{27}=1$ 위의 점 P$\left(\frac{9}{2}, k\right)$$(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F$'$을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF$'$과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{RS}+\overline{SF}=\overline{RF}+8$일 때, $4\times(a^2+k^2)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.) [4점]

$\boxed{171}$



$(-c,0)$ $(c,0)$

$\frac{\frac{9}{2}x}{a^2}-\frac{ky}{27}=1$, $Q\left(\frac{2}{9}a^2, 0\right)$

$RF'-RF = SF-SF' = \frac{4}{9}a^2$

$RF'-SF'+SF = RF+8$ $\quad RS = RF'-SF'$

$(RF'-RF)+(SF-SF')=8$

$\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2=8$, $a^2=9$, $a=3$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ $\left(\frac{9}{2}, k\right)$

$\frac{9}{4}-\frac{k^2}{27}=1$, $\frac{k^2}{27}=\frac{5}{4}$, $k^2=\frac{135}{4}$

$4\left(9+\frac{135}{4}\right)=36+135=171$

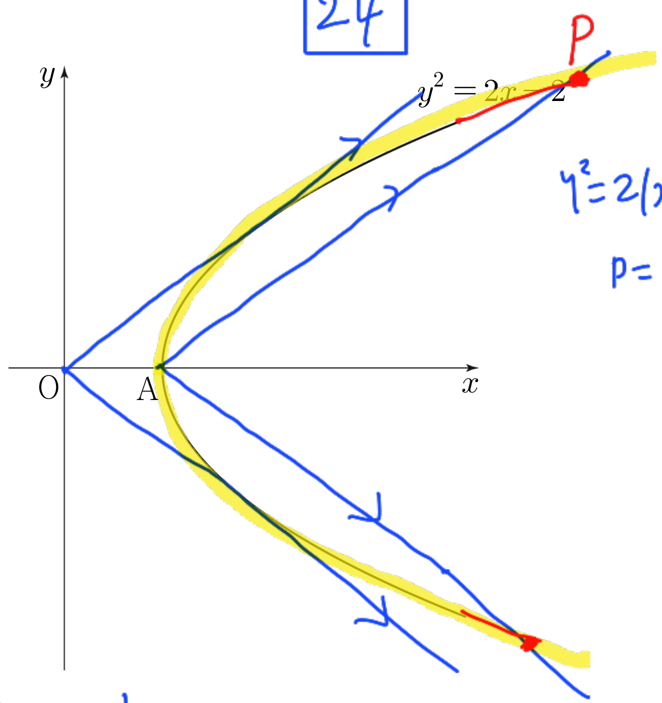
30. 좌표평면에서 포물선 $y^2=2x-2$의 꼭짓점을 A라 하자. 이 포물선 위를 움직이는 점 P와 양의 실수 k에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$$

크기 k

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{24}$



$y^2=2(x-1)$

$p=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AX}=\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$

$y=m(x-1)+\frac{\frac{1}{2}}{m}$ $\quad (0,0)$

$m^2=\frac{1}{2}$, $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$, $x-1=\sqrt{2}y$

$y^2=2x-2$

$y^2=2\sqrt{2}y$, $y=2\sqrt{2}$

$x=5$

$P(5, 2\sqrt{2})$, $k=\overline{AP}=\sqrt{16+8}=\sqrt{24}=m$

$m^2=24$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.