π의 무리성 증명

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 증명

여느 무리성 증명과 마찬가지로 증명의 큰 줄기는 π가 유리수라 가정한 후 모순임을 보이는 것이다. 즉, π가 유리수이면 자명히 $\pi > 0$이므로 두 자연수 a, b가 존재하여 $\pi = \dfrac{a}{b}$이다. 이제 다음과 같은 두 함수 f, F를 정의하자.

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

여기서 $f^{(n)}(x)$는 f의 n계도함수이다. (f는 다항함수이므로 무한히 미분가능하다.)

이제 $1 \le i \le 2n$에 대하여 f의 i계도함수를 생각해보자. $1 \le i \le n-1$인 경우, 미분을 통해 x^n 또는 $(a-bx)^n$을 제거할 수 없으므로 $f^{(i)}(x)$는 $x(a-bx)$를 인수로 가지고, 따라서 $f^{(i)}(0) = 0 = f^{(i)}(\pi)$이다. $n \le i \le 2n$인 경우, $f^{(i)}(x)$를 두 함수 $f_1(x)$와 $f_2(x)$의 합으로 분해하자. 여기서 $f_1(x)$는 $x(a-bx)$를 인수로 가지는 함수이고, $f_2(x)$는 x 또는 $a-bx$ 중 한 인수가 완전히 제거된 함수이다. 이때 x 또는 $a-bx$ 중 한 인수가 완전히 제거되기 위해서는 x^n 또는 $(a-bx)^n$ 중 한 항을 n번 이상 미분해야 하고, 이 과정에서 속미분에 의해 $n!$이 곱해져 f의 분모에 있던 $n!$은 없어지게 된다.

즉, $f_1(0) = 0 = f_1(\pi)$이고 $f_2(x)$의 모든 계수는 정수이므로 $f^{(i)}(0)$과 $f^{(i)}(\pi)$는 정수이고, $1 \le i \le n-1$일 때 $f^{(i)}(0) = 0 = f^{(i)}(\pi)$인 것을 감안하면 모든 $1 \le i \le 2n$에 대하여 $f^{(i)}(0)$과 $f^{(i)}(\pi)$는 정수임을 알 수 있다. 즉, F의 정의에 의해 $F(0)$과 $F(\pi)$는 모두 정수이다. 한편 f는 $2n$차 함수이므로

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\sin x - F(x)\cos x] = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

이고, $F(0)$과 $F(\pi)$는 모두 정수이므로 다음과 같이 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx$는 정수이다.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$$

또한 $0 < x < \pi$인 실수 x에 대하여

$$0 < f(x)\sin x = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \cdot \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

이므로 적당한 자연수 m에 대하여

$$m = \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!} dx = \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$$

이다. 마지막으로 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$의 스털링 근사를 사용하거나 다음 lemma를 이용하면 충분히 큰 n에 대하여 우변의 항을 충분히 0에 가깝게 만들 수 있다. 즉, 적당한 자연수 n에 존재하여 우변의 항은 0과 1 사이의 실수가 되므로, m이 자연수라는 것에 모순이 발생한다. 따라서 원주율은 무리수이다. ■

[Lemma] 임의의 실수 x에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$이다. 즉, 임의의 실수 x에 대하여 적당한 자연수 n에 존재하여 $\frac{x^n}{n!}$의 값을 0에 충분히 근접시킬 수 있다.

pf) 스털링 근사 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 또는 다음의 $n!$에 대한 bound를 이용하는 과정에 대한 자세한 설명은 생략하고, 고등학교 수준의 미적분을 이용한 증명을 자세하게 설명하겠다.

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

임의의 실수 x에 대하여 $|x| < k$인 자연수 k를 정의하자. k보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$|x|^{n-k} < k(k+1)(k+2)\cdots(n-1)$$

따라서 다음이 성립한다.

$$0 < \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{|x|^k k(k+1)(k+2)\cdots(n-1)}{n!} = \frac{|x|^k}{n(k-1)!}$$

한편 k는 고정된 자연수이므로 $\frac{|x|^k}{(k-1)!}$ 역시 고정된 양의 실수이고, n을 양의 무한대로 보내면 우변은 0으로 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^k}{n(k-1)!}=0$이다. 따라서 샌드위치 정리(Squeeze Theorem)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$$

이다. 이때 $-\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{x^n}{n!} \le \left|\frac{x^n}{n!}\right|$이므로 다시 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$을 얻는다. ■

II. 참고문헌

[1] Niven, I. (1997). A simple proof that is irrational. Pi: A Source Book, 276.

[2] Robbins, Herbert (1955), “A Remark on Stirling's Formula“, The American Mathematical Monthly, 62 (1): 26–29, doi:10.2307/2308012, JSTOR 2308012