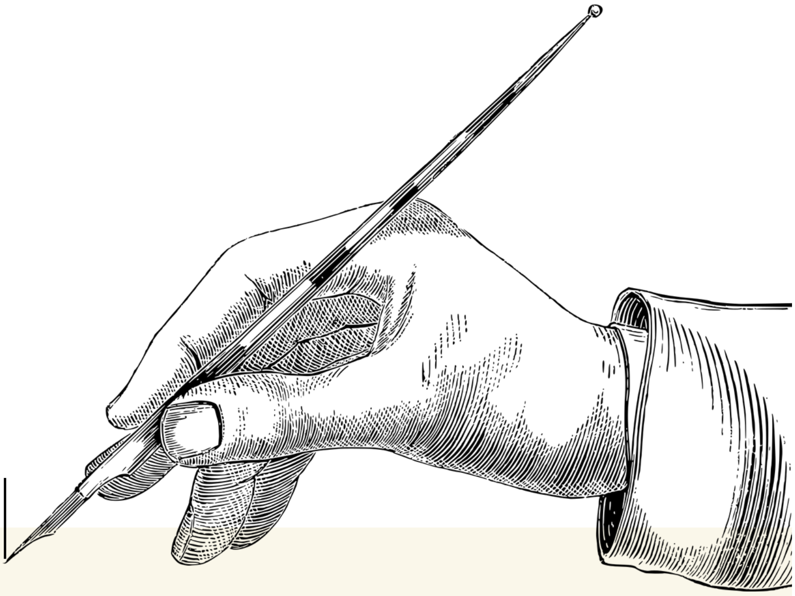
적분 총정리



수학2 24 수능 대비 version

By URdokzon

적분 정리 for Mathematics 2

1. 적분 기본 형태

- 곱으로 표현된 함수의 적분

ex 1. $\int \{(x-1)f'(x)+f(x)\}dx=(x-1)f(x)$

- 대칭을 이용한 적분

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ 이 식은 언제나 성립하므로, ($f(x)$와 $f(a+b-x)$는 $x=\frac{a+b}{2}$ 대칭)

기함수나 원점 대칭의 적분, 선대칭 함수의 적분을 잘 이용해야 한다.

ex 2. $\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

$y=2x^3-6x$는 기함수. $\therefore$ $\int_{-2}^{2}(2x^3-6x)\,dx=0$ -> $\int_{-3}^{2}(2x^3-6x)\,dx=\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx$

$\int_{-3}^{2}(6|x|+6x)\,dx=\int_0^2 12x\,dx=24$ (답)

2. 적분에 대한 두 가지 관점

- 첫 번째 관점, 미분의 역

무엇을 미분하면 원래 식이 나오는지 생각하여 적분하는 것이다.

$\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$라고 두는 것이 기본 태도이다. _ $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$

문제에서 $\int_a^x f(t)\,dt$의 경우, $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$로 두어 $F(a)=0$을 이용하거나,

$\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$라고 하여, $F(x)-F(a)$로 접근할 수 있다.

ex 3. $\int_0^x f(t)\,dt \geqq 0$ 에서 알아낼 수 있는 것을 구하시오.

-> $\int_0^x f(t)\,dt = F(x) \geqq 0,\ \ F(0)=0$이므로 $F'(0)=f(0)=0$ 임을 알 수 있다.

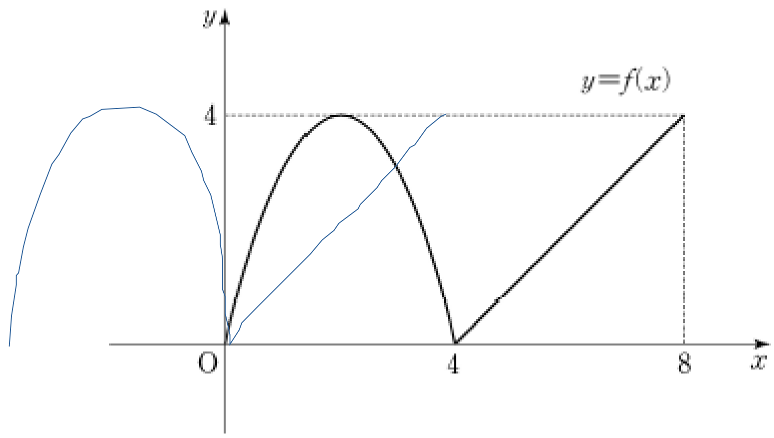
이를 한 번 기출에 적용해보자.

ex 4. 2017학년도 9월 평가원 29번

구간 $[0,8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0\le x<4)\\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

이다. 실수 a $(0\le a\le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$라고 하자. $\int_a^{a+4} f(x)\,dx = F(a+4)-F(a)=g(a)$

$g'(a)=f(a+4)-f(a)$ _ $f(x+4)$를 미분: $f'(x+4)$. 괄호 안이 계수 1인 일차함수면 사용

그림에 그린 파란 선이 $f(x+4)$. 따라서, 파랑이와 까망이를 비교하면, $g'(a)$ 관찰 가능.

$\therefore g$ has 극소 at $x=3$ (구해보면 나옴.) $g(3)=\int_3^7 f(x)\,dx$ (이하 생략)

답: $\frac{37}{6}$ $\rightarrow 43...!$

이와 비슷한 방법 중 함숫값을 적분 형태로 바꾸는 방법이 있다.

$f(x+1)-f(x)=\int_{x}^{x+1} f'(t)\,dt$ 처럼 바꾸는 것이다. 이렇게 하면 좋은 점은 문제와 함께 살펴보겠다. 요지는 양변 적분이 가능하다는 것이다...!

ex 5. 2019학년도 수능 17번

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_{0}^{6} f(x)dx=0$

이때 $\int_{6}^{9} f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) -> $\int_{x-3}^{x} f'(t)dt=4$ -(양변 적분)-> $\int_{x-3}^{x} f(t)dt=4x+c=g(x)$

방금 한 적분...! integral 안을 적분해주고 형태는 유지할 수 있다. 알아두자...!

(나) $\int_{0}^{3} f(t)dt+\int_{3}^{6} f(t)dt=g(3)+g(6)=\{4(3)+c\}+\{4(6)+c\}=36+2c=0 \ \therefore\ c=-18$

$\int_{6}^{9} f(x)dx=g(9)=4(9)+c=18$ (답)

- 두 번째 관점 _ 넓이로 적분을 생각하기

첫 번째 관점 때는 원래 함수를 적분한 함수의 도함수로 보는 것이지만, 이 관점은 원래 함수를
정말 원래 함수로 생각하면서 넓이를 구해 적분된 함수를 구하는 것이다.

말 그대로 원래 함수를 그리고 넓이를 살피는 태도가 필요하다.

기출 문제 하나와 같이 살펴보자. 아래는 미적분 선택과목의 문제지만, 수2 선에서 수용 가능한 부분까지 다뤄보려 한다.

ex 6. 2020학년도 사관학교 30번
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m \times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]

답까지는 말고, $g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$를 찾기 직전까지 봐볼 것이다.

발문과 조건을 찬찬히 해석하자.

$f(x) = x^3 + $ ~~ (가): $g'(2) = \frac{f(2)}{3} = 0 \quad \therefore f(2) = 0$

(나): 잠시 첫 번째 관점이었던 '미분의 역'을 사용해보자. $g(0) = 0$이고,
$g(x) \geqq 0$이므로 $g'(0) = 0$ -> $f(0) = 0$까지 알 수 있다.

$f(x) = x(x-2)(x-k)$라고 하자.

$g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = -\frac{3}{2}(k+1)$이므로 $g'(-1)$이 최대가 되려면 k는 최소이다.

우리는 g를 해석하기 위해 g'인 '$\frac{f(t)}{|t|+1}$'의 넓이를 살필 것이다.
어차피 분모는 양수이므로 $f(t)$의 부호가 곧 g'의 부호와 같다.

$k < 0$이면 $k < x < 0$에서 g'가 양수인 부분이 존재한다.
이때, $g(c)$ (c는 $k < c < 0$인 모든 실수)는 $g(0)$보다 작으므로 $g \geqq 0$에 위배된다.

그러므로 $0 < k < 2$인 상황을 생각해보자.

$0 < x < k$에서는 g'은 양수, $k < x < 2$에서는 g'은 음수, $2 < x$에서는 g'은 양수이다.

$g \geqq 0$이므로 $0 < x < k$에서 증가한 만큼이 $k < x < 2$에서 감소한 만큼보다 크거나 같아야 할 것이다. k가 최대한 작아질 때는 증가량과 감소량이 같을 때이므로 $\int_0^2 \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt = 0$임을 알 수 있다.

저 식의 계산은 미적분 선택 과목의 내용이니 여기서 멈추자. 한 번, 더 쉽게 해보자.

$g(x) \geqq 0$처럼 함수에 대한 식이 부등호와 같이 나오면 함수를 냅둘 이유가 없다.
$g(x)$의 최소를 m이라 하면, $m \geqq 0$이라고 풀 수 있다.

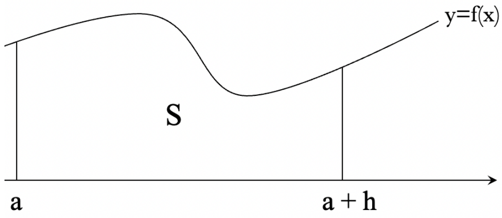
m을 구하기 위해 g'을 구하자. $g'(x) = \frac{f(x)}{|x|+1}$ -> 분모는 양수이므로 f의 부호 변화는 g'의 부호변화와 완전히 일치한다.

$0 < k < 2$일 때, f는 열린구간 $(0, k)$에서 +, 열린구간 $(k, 2)$에서 -, 열린구간 $(2, \infty)$에서 +.
$\therefore$ g는 $x = 2$에서 극소를 가진다.

$m = g(2)$이므로 '$\int_0^2 \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt = 0$'를 계산하면 k가 나오며 문제가 풀리게 된다.

철저히 g'의 넓이를 보며 g를 예측했다는 사실을 기억하며 2번 관점을 잘 얻어가자.

3. 넓이의 변화율



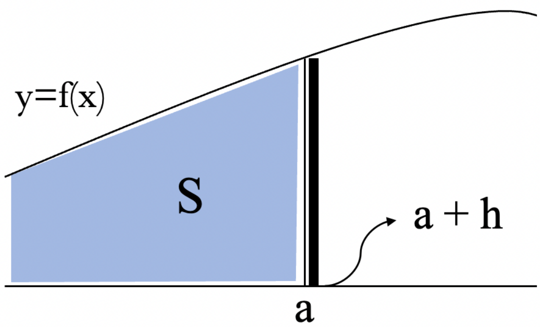
$S(x)=\int f(x)dx$ 라고 하자.

$S(a+h)-S(a)=\int_{a}^{a+h} f(x)dx$라 하자.

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(a+h)-S(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{a}^{a+h} f(x)dx}{h}$$

$$\therefore\ S'(a)=f(a+h)$$

여기서 알 수 있는 사실은 넓이의 변화율은 ‘길이’라는 사실이다. S의 변화율은 $f(a+t)$ 즉, $(a+t)$에서의 함숫값인 ‘길이’이다.



직관적으로 이해하려면 직선이 무수히 쌓여서 면적을 이뤘다고 생각하면 된다. h가 0으로 가므로 매우 순간적으로 추가되는 면적이 $S'(a)$일 것이다. 즉, 새로 추가된 선분(왼쪽 그림의 두꺼운 검은 선)의 길이만큼 넓이가 늘어나는 것이다.

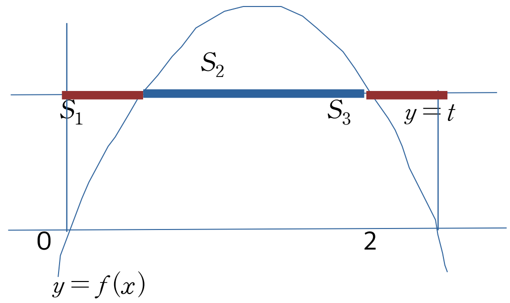
‘S(넓이)의 변화율 = 길이’을 잘 기억하자.

이를 문제에서 적용해보자.

ex 7. 많이 대충 만든 문제
함수 $f(x)=-x(x-2)$에 대하여

$$g(t)=\int_{0}^{2}|f(x)-t|dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $30a$의 값을 구하시오.



t를 조금씩 위로 올려보자(순방향). S_2는 점점 감소하고, S_1과 S_3는 증가한다.

이때 얼마나 증가하고 감소하느냐의 넓이 변화율은 선분의 길이와 같다(방금 배운 개념).
$y=t$와 $y=f(x)$의 첫 번째 교점 x좌표를 α, 두 번째 교점의 x좌표를 β라 하자.

S_1의 증가 변화율은 0~α 즉, α이다. (붉은색으로 표시함.)
S_2의 감소 변화율은 α~β 즉, $\beta-\alpha$이다.(파랑색으로 표시함.)
S_3의 증가 변화율은 β~2 즉, $2-\beta$이다. (붉은색으로 표시함.)

t가 0^+부터는 감소 변화율인 $\beta-\alpha$가 나머지 두 개인 α와 $2-\beta$보다 훨씬 기므로, 전체 변화율은 감소이다. 계속 감소를 할테다.

그러다가 감소 변화율 '$\beta-\alpha$'가 증가 변화율의 합인 '$\alpha+(2-\beta)$'에게 어느 순간 역전 당한다.
그 이후부터는 전체 변화율이 증가일 것이다. 그러면 역전하는 그 지점이 극소일 것이다.

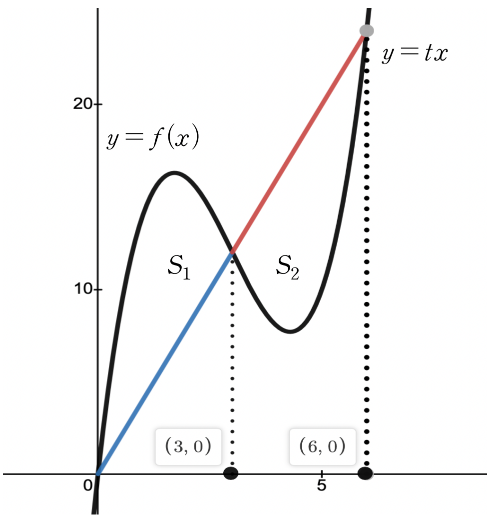
$\therefore\ \beta-\alpha=\alpha+(2-\beta) \rightarrow \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{3}{2}$일 때 $t=k$이다. $a=\alpha$이므로, 답은 $30\times\frac{1}{2}=15$ (답)

직접 미분해보는 것이 아니라 넓이의 변화율을 바로 '길이'로 보는 관점을 얻으면 이같이
눈으로도 극소나 극대를 알 수 있다.

연습 한 번만 더 해보자.

ex 8. 대충 만든 문제

(가): $f(x)=x^3-9x^2+22x$
(나): $f(x)=tx$가 세 점에서 만나고, 세 근 중 가장 큰 근을 $\alpha(t)$라 하자.
(다): $g(t)=\int_0^{\alpha(t)}|f(x)-tx|\,dx$ ($\frac{7}{4}<t<22$)
$g(t)$는 $t=k$에서 최솟값 p를 갖는다. $k\times p$의 값은?



t가 증가함에 따라 S_1은 점차 감소 $\to$ 감소 변화율= 파란 선분의 길이
S_2는 점차 증가 $\to$ 증가 변화율= 빨간 선분의 길이

$g(t)$의 극소는 감소 변화율이 증가 변화율보다 크다가 작아지는 바로 그 순간.
$\therefore$ $t=k$일 때, 빨간 선분의 길이=파란 선분의 길이 -> 원점과 변곡점을 지나는 직선

f의 변곡점의 x좌표는 3이므로, 변곡점을 지나는 직선과의 교점은 0, 3, 6에서 생긴다.

$f(x)=x^3-9x^2+22x=x(x-3)(x-6)+4x \to t=k=4 \to t=4$: $p=S_1+S_2$=$2S_1$

$$=2\int_0^3 x(x-3)(x-6)\,dx=2\int_0^3(x-3)(x^2-6x+9-9)\,dx=2\int_0^3\{(x-3)^3-9(x-3)\}\,dx=\frac{81}{2}=p$$

$\therefore$ $k\times p=162$ (답)

4. 적분에서 통용되는 중요 표현을 알아보자.

1) $\int |f'(x)|\,dx$ -> f가 감소할 부분도 강제로 증가하게 끌어올린 형태

ex 9. 2017학년도 수능 20번
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx < 0$
ㄴ. $0 < k \leq 1$
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(가): $f(x)$의 최고차항의 계수를 p $(p>0)$라고 하자. $f'(x) = 3px(x-k)$
ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx = f(k)-f(0) < 0$ _ ㄱ 참.

(나): $\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$ → 좌변은 감소할 부분도 강제로 끌어올린 것이다.

삼차함수의 감소할 부분도 증가로 바꾸어주면, ‘’처럼 생길 것이다. 0에서 한 번 꿀렁,

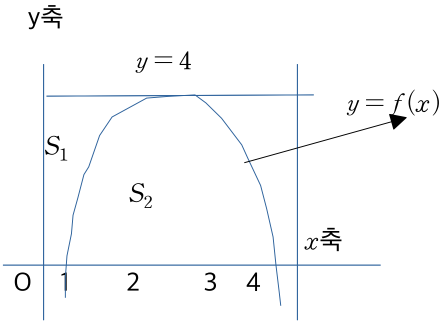
k에서 한 번 꿀렁. 그러면 0과 k 사이에서는 원래 $f(t)$와는 모양이 다르고, k 이후부터 같다.
∴ (나)가 1보다 큰 모든 실수 t에 대해 성립한다고 했으니, (1보다 큰 모든 실수 t) $\geqq k$ _ ㄴ 참.

뒤의 +$f(0)$가 모양뿐만 아니라 함숫값까지 같도록 보정해준다. 감소할 부분도 끌어올린 것이
아까 (나) 좌변이라고 했으니, $f(0)$에서 $f(0)-f(k)$만큼 감소할 것을 증가로 바꾸어야 한다.
증가한 변화량은 ‘$f(0)-f(k)$’. $x=t$에서의 함숫값은, $x=k$에서의 함숫값에 $f(t)-f(k)$를 더한 것이므로
$\{f(0)-f(k)\}+\{f(t)-f(k)\}$, 우변은 $f(t)+f(0)$.

$\{f(0)-f(k)\}+\{f(t)-f(k)\} = f(t)+f(0)$ → $f(k)=0$ 계산하면 ㄷ. 참

2) $\int x|f'(x)|dx$ -> 극점을 기준으로 나눈 구간별 역함수의 넓이 (암기)

ex 10. $f(x)=-4(x-1)(x-3)$ 일 때, $\int_1^3 x|f'(x)|\,dx$=?



$1 \leqq x \leqq 2$: 이때의 역함수를 $g_1(x)$라 하자. $\int_1^2 x|f'(x)|\,dx = \int_0^4 g_1(t)\,dt$=$S_1$

$2 \leqq x \leqq 3$: 이때의 역함수를 $g_2(x)$라 하자. $\int_2^3 x|f'(x)|\,dx$=$\int_0^4 g_2(t)\,dt = S_1+S_2$

따라서 다 더하면 $S_1+(S_1+S_2)=$ 사각형 = $4\times 4=16$ (답)

3) $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$ _ 평균값 정리 변형

($\because$ $\int_0^x f(t)dt=F(x)$라 하면, $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 존재.)

ex 24. 2020학년도 9월 평가원 21번
함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ 에 대하여 함수 $g(x)$를 '$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$'라 하자.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\int_0^1 g(x)\,dx=[(x-1)f(x)]_0^1=f(0)=(1-0)g(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재하므로 ㄷ은 참.

5. 다항함수의 다양한 비율 관계로 적분 계산을 줄이자.

https://orbi.kr/00056695709 _ **수2 다항함수의 성질 _ 테마 특강 (4)** 참조

6. 적분 풀이 매뉴얼 (순서 有)

Ⅰ. 대칭성 파악. 5번은 바로 쓰고 들어가자.

Ⅱ. 직접 적분이 가능한지 아닌지를 판단

Ⅲ. 직접 적분이 될 경우, 하면 됨

Ⅳ. 직접 적분이 안 될 경우
'적분 안 해도 되는 경우'와 '적분이 되도록 형태를 변환해야 하는 경우' 중 무엇인지 판단

Ⅴ. '적분 안 해도 되는 경우'에는 2, 3번에 있음.

Ⅵ. '적분이 되도록 형태 변환'하는 것은 1번 2번에 있음.

Ⅶ. 계산할 때 최대한 대칭을 만들어서 지워가기 (feat. ex 2.)

Ⅷ. 그래프 그림이 있으면 넓이를 껴 넣어 간단한 형태로 생각해보기 (feat. ex 10.)