제 2 교시

2022학년도 이민형의 수능 대비 (미적분 선택)

EBS 만점마무리 유사문제(24문항)
(23번~30번 3세트)

성명		수험번호					–				

○ 자신이 선택한 유형의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

세상이 나를 속일지 몰라도~~~

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

미적분 3세트

홀수형

(만점마무리 1회 23번 유사문제)

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$의 값은? 1.

① 2 ln2

② 3 ln2

③ 1+2ln2

④ 4 ln2

⑤ 1+3ln2

(만점마무리 1회 24번 유사문제)

함수 $f(x) = 2\ln(5-x) + \dfrac{1}{4}x^2$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 2.

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 x=4에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) = \dfrac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(만점마무리 1회 25번 유사문제)

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$x = 3t - \dfrac{2}{\pi}\cos\pi t$, $y = 6\ln t - \dfrac{2}{\pi}\sin\pi t$

이다. 시각 $t = \dfrac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오. 3.

(만점마무리 1회 26번 유사문제)

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$의 값은? 4.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴한다.
(나) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{9}{4}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\frac{3}{4}$이다.

① $\frac{9}{4}$

② $\frac{11}{4}$

③ $\frac{13}{4}$

④ $\frac{15}{4}$

⑤ $\frac{17}{4}$

(만점마무리 1회 27번 유사문제)

구간 $(0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$
(나) $F(1)=2e$

F(3)의 값은? 5.

① $\frac{1}{4}e^3$

② $\frac{1}{2}e^3$

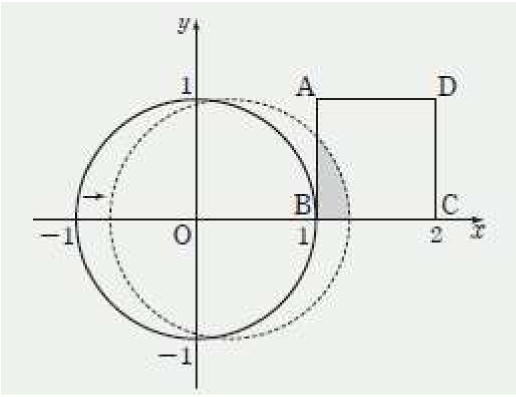
③ e^3

④ $2e^3$

⑤ $4e^3$

(만점마무리 1회 28번 유사문제)

좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 O와 네 점 A(1, 1), B(1, 0), C(2, 0), D(2, 1) 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 원 O의 중 심이 x축을 따라 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. t초 후 원의 내부와 정사각형 ABCD의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 S라 하자. 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2,}0\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? (단, $0 \le t \le 1$) 6.



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

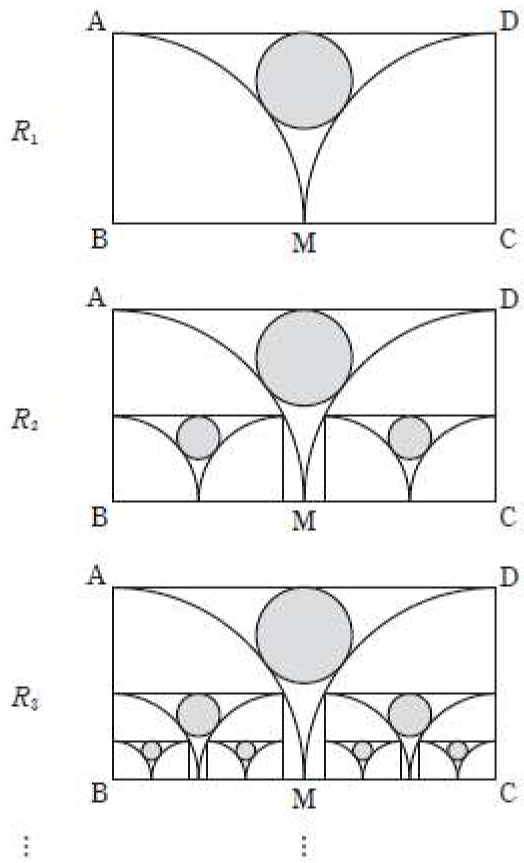
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

(만점마무리 1회 29번 유사문제2)

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 직사각형 ABCD에서 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 중심이 B, 반지름의 길이가 $\overline{BM}$이고 중심각의 크기가 90 ° 인 부채꼴 BMA를 그리고, 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{CD}$이고 중심각의 크기가 90 ° 인 부채꼴 CDM을 그린다. 두 부채꼴의 호 MA, 호 DM과 선분 AD에 모두 접하는 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 각 부채꼴의 내부에 두 변의 길 이의 비가 1:2인 직사각형을 긴 변이 선분 BC 위에 놓이면서 각 부채꼴에 내접하도록 각각 그리고, 각 직사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 할 때, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? 7.



① $\frac{1}{12}\pi$

② $\frac{5}{48}\pi$

③ $\frac{1}{8}\pi$

④ $\frac{7}{48}\pi$

⑤ $\frac{1}{6}\pi$

(만점마무리 1회 30번 유사문제)

함수 $f(x)=e^{x}(ax^{3}+bx^{2})$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌구간 [-t, t]에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M(t), 최솟값을 m(t)라 할 때, 두 함수 M(t), m(t)는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 t에 대하여 M(t)=f(t)이다.

(나) 양수 k에 대하여 닫힌 구간 [k, k+2]에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 m(t)=f(-t)가 성립한다.

(다) $\int_{1}^{5} e^{t}\times m(t)dt=\frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\frac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3}}{e^{x}}=0$) 8.

(만점마무리 2회 23번 유사문제)

$\int_{3}^{6} \frac{2}{x^2-2x}dx$의 값은? 9.

① ln2
② ln3
③ ln4
④ ln5
⑤ ln6

(만점마무리 2회 24번 유사문제)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-2\right)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5a_n}{n^2+a_n}$의 값을 구하시오. 10.

(만점마무리 2회 25번 유사문제)

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$x=2t+\sin t,\ y=1-\cos t$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력은? 11.

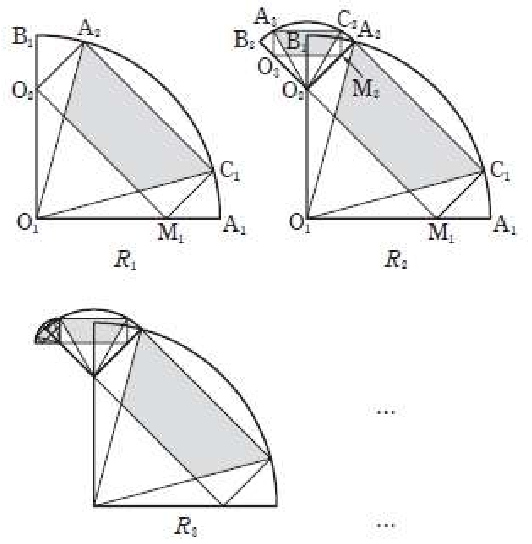
① $\sqrt{3}$
② 2
③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$
⑤ $\sqrt{7}$

(만점마무리 2회 26번 유사문제)

그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $O_1A_1B_1$에서 두 선분 O_1A_1, O_1B_1 위에 두 점 M_1, O_2를 각각 $\overline{O_1M_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1B_1}$이 되도록 정하자. 두 점 M_1, O_2와 호 A_1B_1 위의 두 점 C_1, A_2를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$를 그리고, 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$와 삼각형 $O_1C_1A_2$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 중심이 O_2, 반지름의 길이가 $\overline{O_2A_2}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 점 B_2가 부채꼴 $O_1A_1B_1$의 외부에 있도록 그리고, 두 선분 O_2A_2, O_2B_2 위에 두 점 M_2, O_3을 각각 $\overline{O_2M_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2A_2}$, $\overline{O_2O_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2B_2}$가 되도록 정하자. 두 점 M_2, O_3과 호 A_2B_2 위의 두 점 C_2, A_3을 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$을 그리고, 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$과 삼각형 $O_2C_2A_3$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? 12.



① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

(만점마무리 2회 27번 유사문제)

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$
(나) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은? 13.

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{4}{5}$

③ $\frac{5}{6}$

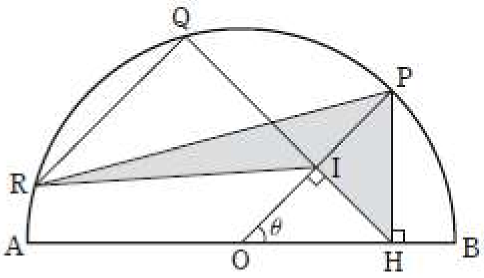
④ $\frac{6}{7}$

⑤ $\frac{7}{8}$

(만점마무리 2회 28번 유사문제)

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선 이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자. 점 Q 를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. ∠POB=θ일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 S(θ), T(θ)라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? $\left(\text{단}, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 14.



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

③ $\sqrt{2}-1$

④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

(만점마무리 2회 29번 유사문제)

$\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 15.

< 보 기 >

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(만점마무리 2회 30번 유사문제)
ab<0인 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는
$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$이고 함수 $g(x)$는 $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$다. 실수 k (k>0)에 대하여 부등식 $g(x)-k\geq xf(x)$를 만족시키는 양의 실수 x가 존재할 때, 이 x의 값 중 최솟값을 $h(k)$라 하자. 함수 $g(x)$와 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극댓값 a를 갖고 $h(a)=2$이다.
(나) $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값은 $8e^{-2}$이다.

$100(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) 16.

(만점마무리 3회 23번 유사문제)

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{3x}$의 값은? 17.

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

(만점마무리 3회 24번 유사문제)

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$의 값은? 18.

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{7}{5}$

③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{9}{5}$

⑤ 2

(만점마무리 3회 25번 유사문제)

좌표평면 위를 움직이는 점 P(x, y)의 시각 t에서의 위치가

$x=\frac{t^3}{3}-11t$, $y=t^2+1$

이다. 점 P의 속력이 최소인 점 P의 좌표를 (p, q)라 할 때, $q-p$의 값을 구하시오. 19.

(만점마무리 3회 26번 유사문제)

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=xe^{-x^2}$이다. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, <보기> 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 20.

(가) $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$
(나) $f(x)=g'(x)-f'(x)$

< 보 기 >

ㄱ. $g'(1)=\frac{1}{e}$

ㄴ. $f(1)=g(1)$

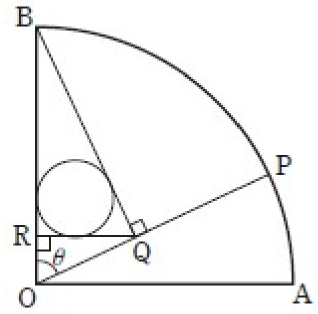
ㄷ. 어떤 양수 x에 대하여 $g(x)<f(x)$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(만점마무리 3회 27번 유사문제)

그림과 같이 한 변의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\angle BOP=\theta$일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 21.



① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

(만점마무리 3회 28번 유사문제)

수열 a_n이 모든 자연수 n에 대하여

$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 22.

(만점마무리 3회 29번 유사문제)

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

의 값은? 23.

① -8
② -4
③ 0
④ 4
⑤ 8

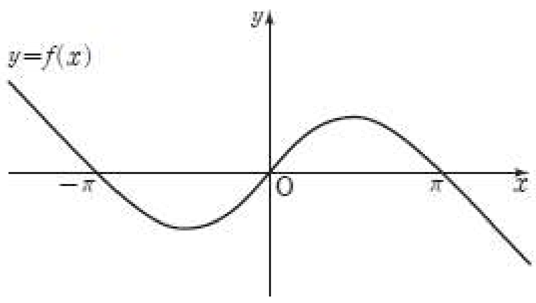
(만점마무리 3회 30번 유사문제)
함수

$$f(x)=\begin{cases}-x-\pi & (x<-\pi)\\ \sin x & (-\pi\le x\le\pi)\\ -x+\pi & (x>\pi)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 부등식 $f(x)\le f(t)$를 만족시키는 실수 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 예를 들어, $g(\pi)=-\pi$이다. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속일 때,

$$\int_{-\pi}^{a} g(t)dt=-\frac{7}{4}\pi^2+p\pi+q$$

이다. $100\times|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)
24.



※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

미적분 만점마무리 유사문제 정답과 풀이

1. [정답/모범답안] ②

[해설]

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2 f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\int\{f(x)\}^2 f'(x)dx=\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx$

$f(x)=t$라 할 때 $f'(x)\dfrac{dt}{dx}$이므로

(좌변)= $\int\{f(x)\}^2 f'(x)dx=\int t^2dt=\dfrac{1}{3}t^3+C_1$

$=\dfrac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1$($C_1$은 적분상수)

(우변)= $\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C_2$(C_2는 적분상수)

그러므로 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$(C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로 $\{f(1)\}^3=3\ln2$

2. [정답/모범답안] ③

[해설]

함수 $f(x)$의 정의역은 $x<5$이다.

$f(x)=2\ln(5-x)+\dfrac{1}{4}x^2$에서 $f'(x)=\dfrac{-2}{5-x}+\dfrac{x}{2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$또는 $x=4$

$f''(x)=\dfrac{-2}{(5-x)^2}+\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=0$에서 $x=3(\because x<5)$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

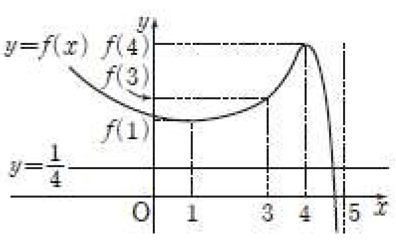
x	⋯	1	⋯	3	⋯	4	⋯	(5)
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	
$f(x)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	$f(4)$	↘	

(단, $f(1)=\dfrac{1}{4}+4\ \ln2$, $f(3)=\dfrac{9}{4}+2\ln2$, f(4)=4)

ㄱ. $f(x)$는 x=4에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{4}$은 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=\dfrac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3. [정답/모범답안] 13

[해설]

$x=3t-\dfrac{2}{\pi}\cos\pi t$, $y=6\ln t-\dfrac{2}{\pi}\sin\pi t$에서

시각 t에서의 속도는

$\dfrac{dx}{dt}=3+2\sin\pi t, \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{6}{t}-2\cos\pi t$이므로

따라서 시각 $t=\dfrac{1}{2}$에서의 속력은

$\sqrt{(3+2)^2+(12-0)^2}=13$

4. [정답/모범답안] ①

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=x$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=y$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\dfrac{9}{4}$이므로 $x+y=\dfrac{9}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\dfrac{3}{4}$이므로 $x-y=\dfrac{3}{4}$

따라서 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{4}{3}$

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$의 공비를 각각 p,q라 하면

$\dfrac{1}{1-p}=\dfrac{3}{2,}\ \dfrac{1}{1-q}=\dfrac{3}{4}$

따라서 $p=\dfrac{1}{3,}\ q=-\dfrac{1}{3}$

그러므로 $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{9}{4}$

{다른 풀이}

첫째항이 1인 두 등비수열 a_n b_n의 공비를 각각 p,q라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{1-p}+\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{9}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{1-p}-\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{3}{4}$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $p=\dfrac{1}{3}$, $q=-\dfrac{1}{3}$

첫째항이 1인 두 등비수열 a_n, b_n의 공비가 각각 p, q이므로 두 등비수열 a_n^2, b_n^2의 공비는 각각 p^2,q^2이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{1-p^2}+\dfrac{1}{1-q^2}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{9}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{9}{9-1}+\dfrac{9}{9-1}=\dfrac{9}{4}$

5. [정답/모범답안] ④

[해설]

{풀이 전략}

부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

{문제 풀이}

{STEP1} {f(x)g(x)}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)임을 이용한다.

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$

{STEP2} 양변을 x에 대하여 적분한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$xF(x)=\int(2x+2)e^xdx$

$=(2x+2)e^x-\int 2e^xdx$

$=(2x+2)e^x-2e^x+C$

$=2xe^x+C$(C는 적분상수)

{STEP3} 적분상수 C의 값을 구한다.

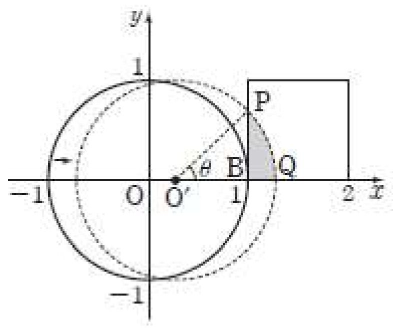
조건 (나)에서 $F(1)=2e+C=2e$

즉 $C=0$

{STEP4} F(3)의 값을 구한다.

따라서 $F(x)=2e^x$이므로 $F(3)=2e^3$

6. [정답/모범답안] ④
[해설]



그림과 같이 원 O의 t초 후의 중심을 O', 원과 정사각형 ABCD의 교점을 P, Q라 하고, ∠PO'Q=θ라고 하면 cosθ=1-t 이것을 t에 대하여 미분하면

$-\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-1$, 즉 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

원과 정사각형 ABCD가 겹치는 부분의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{1}{2}(1-t)\sin\theta=\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{1}{4}\sin2\theta$

이것은 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2\theta\right)\dfrac{1}{\sin\theta}$

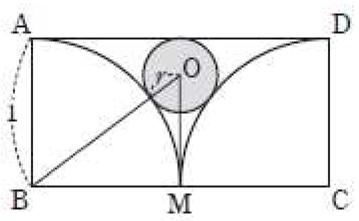
원 O의 중심이 점 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$을 지나는 순간은 $t=\dfrac{1}{2}$이다.

즉 $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 원 O의 중심이 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$을 지나는 순간 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은

$\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. [정답/모범답안] ②
[해설]
{풀이 전략}
등비급수의 합의 공식을 이용하여 도형의 넓이의 합을 구한다.
{문제 풀이}
{STEP1}그림 R_1에서 r, S_1의 값을 각각 구한다.



R_1

두 부채꼴의 호 MA, 호 DM 과 선분 AD에 모두 접하는 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하자. 직각삼각형 OBM에서 $\overline{BO}^2=\overline{BM}^2+\overline{OM}^2$이므로

$(1+r)^2=1^2+(1-r)^2$

$r=\dfrac{1}{4}$이므로 $S_1=\pi\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{16}$

{STEP2} 그림 R_{n+1}에서 r_n과 r_{n+1}사이의 관계식을 이용하여 a_n을 구한다.

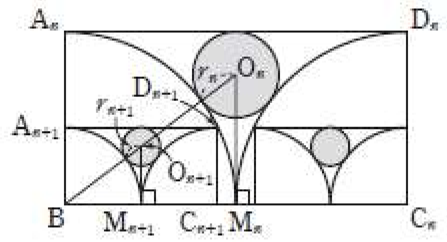


그림 R_n에서 새로 그려진 각 부채꼴에 내접하는 직사각형 중 한 꼭짓점을 B로 하는 직사각형을 $A_nBC_nD_n$이라 하고, 직사각형 $A_nBC_nD_n$ 내부의 두 부채꼴의 호와 선분 A_nD_n에 모두 접하는 원의 중심을 On, 반지름의 길이를 r_n, $\overline{BC_n}$의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B}=l$ 이라 하면 $\overline{A_{n+1}B}:\overline{BC_{n+1}}=1:2$이므로

$\overline{BC_{n+1}}=2l, \overline{BD_{n+1}}=\sqrt{5}\,l$

또한 $\overline{BD_{n+1}}=\overline{BM_{n+1}}=\sqrt{5}\,l$이고

삼각혁 $O_{n+1}BM_{m+1}$과 삼각형 O_nBM_n은 서로 닮음이므로

$\overline{BM_{n+1}}:\overline{BM_n}=\overline{BO_{n+1}}:\overline{BO_n}$에서

$l:\sqrt{5}\,l=(l+r_{n+1}):(\sqrt{5}\,l+r_n)$, 즉 $r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}r_n$

그림 R_n에서 새로 그려진 원 한 개의 넓이를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}a_n$

{STEP3} $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 원의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 원의 개수의 2배이므로 S_n은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{16}$이고 공비가 $\dfrac{2}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{2}{5}}=\dfrac{5}{48}\pi$

8. [정답/모범답안] 49
[해설]
{풀이 전략}
도함수를 활용하여 그래프의 개형을 알아보고 정적분을 계산한다.
{문제 풀이}
{STEP1} 함수 f(x)의 도함수 f'(x)를 이용하여 상수 a, b의 부호를 구한다.

$f(x)=e^x(ax^3+bx^2)=x^2e^x(ax+b)$에서

$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$

이므로 $f(0)=f'(0)=0$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접하고,

조건 (가)에서 $M(t)=f(t)$에 의하여

함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $a>0$

또한 함수 $f(x)$의 그래프가 x>0에서 x축과 만나지 않고

$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$이므로 $-\dfrac{b}{a}<0$, 즉 $b>0$

{STEP2} f '(x)=0에서 극대, 극소를 알아본다.

$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$에서

이차방정식 $ax^2+(3a+b)x+2b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3a+b)^2-8ab=(a-b)^2+8a^2>0$

이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

$\alpha+\beta=-\dfrac{3a+b}{a}<0$, $\alpha\beta=\dfrac{2b}{a}>0$

이므로 $\alpha<\beta<0$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=\alpha, x=\beta, x=0$

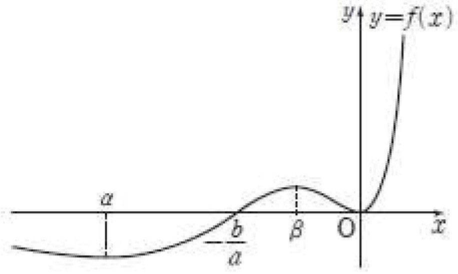
{STEP3} 함수 f '(x)의 증가와 감소를 나타내는 표를 그리고 그래프의 개형을 알아본다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	α	⋯	β	⋯	0	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	0	↗

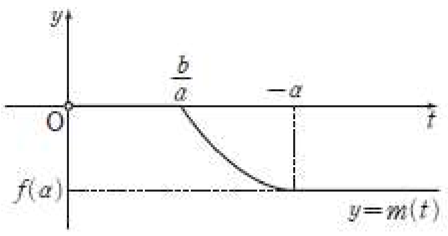
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



{STEP4} 함수 f(x)의 최솟값 m(t)를 구하고 그래프를 알아본다.

따라서 $m(t)=\begin{cases} 0 & \left(0<t<\dfrac{b}{a}\right) \\ f(-t) & \left(\dfrac{b}{a}\le t\le -\alpha\right) \\ f(\alpha) & (t>-\alpha) \end{cases}$이므로 함수 $y=m(t)$의 그래프는 그림과 같다.



{STEP5} k, α의 값을 각각 구하고 m(t)를 구한다.

조건 (나)에서 양수 k에 대하여 닫힌구간 $[k, k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립하므로

$\dfrac{b}{a}=k$에서 $b=ak$, $-\alpha=k+2$

$f'(\alpha)=f'(-k-2)=0$에서

$\dfrac{-k-2}{e^{k+2}}\{a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak\}=0$

$\dfrac{-k-2}{e^{k+2}}\neq 0$이므로

$a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak=0$을 정리하면

$a(k-2)=0$, 즉 $k=2$, $\alpha=-4$

따라서 $f(x)=ae^x(x^3+2x^2)$이고,

$$m(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<2) \\ ae^{-t}(-t^3+2t^2) & (2\le t\le 4) \\ -\dfrac{32a}{e^4} & (t>4) \end{cases}$$

{STEP6} $\displaystyle\int_1^5 \{e^t\times m(t)\}dt$를 계산하고 $p+q$의 값을 구한다.

조건(다)에 의하여

$$\int_1^5 e^t\times m(t)dt=\int_2^4(-at^3+2at^2)dt+\int_4^5\left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{a}{4}t^4+\frac{2a}{3}t^3\right]_2^4+\left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$$

$$=\frac{28a}{3}-32ae=\frac{7}{3}-8e$$

에서 $a=\dfrac{1}{4}$

이므로 $f(k+1)=f(3)=\dfrac{45}{4}e^3$

따라서 $p=4$, $q=45$이므로 $p+q=49$

9. [정답/모범답안] ①

[해설]

$\displaystyle\int_3^6\frac{2}{x^2-2x}dx=\int_3^6\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=[\ln|x-2|-\ln|x|]_3^6$

$=(\ln4-\ln6)-(-\ln3)=\ln2$

10. [정답/모범답안] 4

[해설]

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-2\right)$가 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^2}-2\right)=0$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 5a_n}{n^2+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{5a_n}{n^2}}{1+\dfrac{a_n}{n^2}}=\frac{2+5\times2}{1+2}=4$$

11. [정답/모범답안] ⑤

[해설]

$x=2t+\sin t$, $y=1-\cos t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2+\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

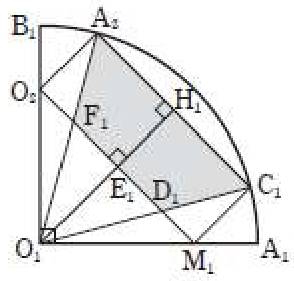
따라서 시각 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(2+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\sqrt7$$

12. [정답/모범답안] ②

[해설]

점 O_1에서 선분 C_1A_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고, 선분 O_1C_1, O_1H_1, O_1A_2가 선분 M_1O_2와 만나는 점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하자.



$\overline{O_1M_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt2$이고 삼각형 $O_1M_1O_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{O_2M_1}=2$, $\angle O_1O_2E_1$=45°이다.

삼각형 $O_1E_1O_2$도 $\angle O_1E_1O_2$=90°이므로 직각이등변삼각형이고 $\overline{O_1E_1}$=1이다.

$\overline{A_2C_1}$=$\overline{O_2M_1}$=2이므로 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이고 $\overline{O_1H_1}=\sqrt3$이다.

또 $\triangle O_1D_1F_1\sim\triangle O_1C_1A_2$이고 $\overline{O_1E_1}$: $\overline{O_1H_1}$=1 : $\sqrt3$이므로

두 삼각형의 넓이의 비는 1 : 3이다.

그러므로

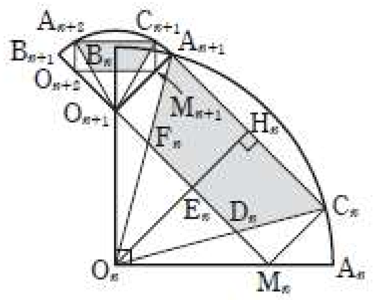
S1=(삼각형 $O_1C_1A_2$의 넓이)-(삼각형 $O_1D_1F_1$의 넓이)

=(삼각형 $O_1C_1A_2$의 넓이)-$\dfrac{1}{3}$(삼각형 $O_1C_1A_2$의 넓이)

=$\dfrac{2}{3}$(삼각형 $O_1C_1A_2$의 넓이)=$\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt3\right)=\dfrac{2\sqrt3}{3}$

$\overline{O_nA_n}=r_n,\ \overline{O_{n+1}A_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하면

$\overline{O_nM_n}=\overline{O_nO_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$



두 삼각형 $O_nM_nO_{n+1},\ O_nE_nO_{n+1}$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이고 $\overline{O_nE_n}=\frac{1}{2}r_n$이다.

$\overline{A_{n+1}C_n}=\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이므로 삼각형 $O_nC_nA_{n+1}$은 정삼각형이다.

$\overline{O_nH_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$이므로

$r_{n+1}=\overline{E_nH-n}=\overline{O_nH_n}-\overline{O_nE_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n-\frac{1}{2}r_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}r_n$

수형 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

13. [정답/모범답안] ⑤

[해설]

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$라 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}$$
$$+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$$
$$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x$$
$$=\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-2}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$
$$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

14. [정답/모범답안] ②

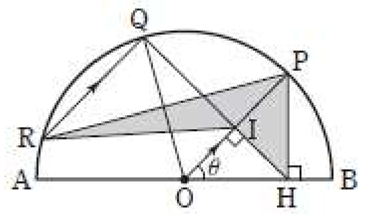
[해설]

{풀이 전략}

삼각함수의 극한을 활용하여 도형에 관한 극한 문제를 해결한다.

{문제 풀이}

{STEP1} 삼각형 IHP의 넓이 T(θ)를 구한다.



$\angle$OHP=$\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$

$\angle$HIO=$\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{OI}=\overline{OH}\cos\theta=\cos^2\theta$

$\overline{IH}=\overline{OH}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

$\overline{IP}=\overline{OP}-\overline{OI}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

그러므로 삼각형 IHP의 넓이 T(θ)는

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{IH}\times\overline{IP}$$
$$=\frac{1}{2}\times\cos\theta\sin\theta\times\sin^2\theta=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

{STEP2} 삼각형 RIP의 넓이 S(θ)를 구한다.

직선 OP와 직선 RQ가 평행하므로 삼각형 RIP의 높이는 $\overline{QI}$이다.

$\overline{OQ}=1,\ \angle OIQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 OIQ에서 $\overline{QI}^2=\overline{OQ}^2-\overline{OI}^2$

$\overline{QI}=\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}=\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$

$=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

그러므로 삼각형 RIP의 넓이 S(θ)는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{IP}\times\overline{QI}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sin^3\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$$

{STEP3} $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구한다.

따라서 $S(\theta)-T(\theta)=\frac{1}{2}\sin^3\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta)$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1^3\times(\sqrt{1+1}-1)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

15. [정답/모범답안] ⑤

[해설]

{풀이 전략}

부정적분을 이용하여 $g(x)$를 구하고 $g(1)$의 값을 추론한다.

{문제 풀이}

{STEP1} $f(g(x))=x$를 이용하여 g'(x)를 먼저 구한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

$f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

주어진 식에서

$$f'(g(x))=\frac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}$$

$= \dfrac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3} = \dfrac{1}{g'(x)}$

이므로 $g'(x) = \dfrac{x^2[g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$ ……㉠

{STEP2} $x=2$를 대입하여 $g'(2)$의 값을 구한다.

ㄱ. 식 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$g'(2) = \dfrac{2^2 \times g(2)\}^3}{1-2^3 \times \{g(2)\}^2} = \dfrac{2^2}{1-2^3} = -\dfrac{4}{7}$(참)

{STEP3 }㉠의 양변에 $1-x^3\{g(x)\}^2$을 곱하고 양변을 x에 대하여 적분한다.

ㄴ. 식 ㉠을 정리하면

$g'(x) = x^3\{g(x)\}^2 g'(x) + x^2\{g(x)\}^3$

$\quad = x^2(g(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}$

$xg'(x)+g(x) = \{xg(x)\}'$이므로

양변을 x에 대하여 적분하면

$\int g'(x)dx = \int \{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'dx$

$g(x) = \dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 + C$($C$는 적분상수)

$x=2$를 대입하면 $1 = \dfrac{8}{3} + C$이므로 $C = -\dfrac{5}{3}$

따라서 $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \dfrac{5}{3}$(참) ……㉡

{STEP4} 미분을 이용하여 극대, 극소를 알아내어 $g(1)$의 값을 추론한다.

ㄷ. 식 ㉡에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$

함수 $h(t) = t^3 - 3t - 5, g(1)\alpha$라 하면

$h'(t) = 3(t+1)(t-1)$

$t=-1$에서 극댓값 -3을 가지고, $t=1$에서 극솟값 -7을 가지므로 방정식 $h(t)$=0은 하나의 실근 α를 갖는다.

$h(2) = 8-6-5 = -3 < 0, h\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{125}{8} - \dfrac{15}{2} - 5 = \dfrac{25}{8} > 0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $2 < a < \dfrac{5}{2}$

즉 $2 < g(1) < \dfrac{5}{2}$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

16. [정답/모범답안] 125

[해설]

{풀이 전략}

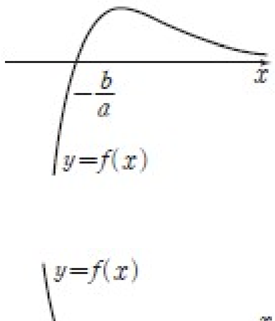
미분과 적분의 관계를 이해하고 정적분으로 나타낸 함수를 활용한다.

{문제 풀이}

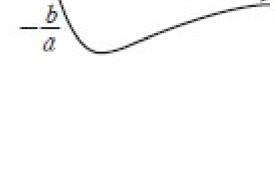
{STEP1} 함수 f(x)의 그래프의 개형을 그려 보고 조건 ㈎에서 a, b의 부호를 알아본다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(ⅰ)$a > 0$이면



(ⅱ)$a < 0$이면



$g(x) = \int_0^x f(t)dt$에서 $g(0)=0$, $g'(x) = f(x)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x = -\dfrac{b}{a}$에서 극댓값 α를 가지므로

$a < 0$이고 $b > 0$이다.

{STEP2} g(x)-xf(x)=p(x)라 하고 함수 p(x)의 그래프의 개형을 그려본다.

$g(x) - k \geq xf(x)$에서 $g(x) - xf(x) \geq k$

$p(x) = g(x) - xf(x)$라 하면

$p'(x) = g'(x) - f(x) - xf'(x) = -xf'(x)$이고

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}a\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$이므로

$P'(x) = \dfrac{1}{2}ax\left(x-2+\dfrac{b}{a}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$p'(x) = 0$에서

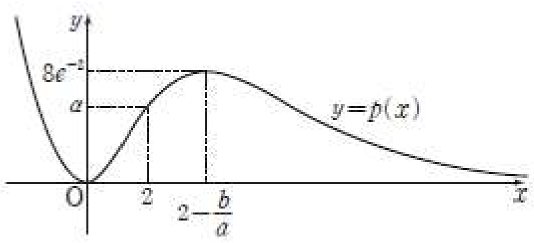
$x=0$또는 $x = 2-\dfrac{b}{a}$

함수 $p(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	$2-\dfrac{b}{a}$	…
$p'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(x)$	↘	0	↗	$8e^{-2}$	↘

→ 조건 ㈏

조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 함수 p(x)의 그래프의 개형은 그림과 같다.



{STEP3} p(4)의 값을 구한다.

$g\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \alpha$, $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$에 의하여

$p\left(-\dfrac{b}{a}\right) = g\left(-\dfrac{b}{a}\right) - \left(-\dfrac{b}{a}\right)f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \alpha$

즉 $-\dfrac{b}{a} = 2$

$p(x) = g(x) - xf(x) \geq k$에서 양수 x의 값의 범위에서

함수 $p(x)$의 최댓값은 $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값이므로

$p(4) = 8e^{-2}$

{STEP4} p(4), g(4), f(4)의 관계식에서 상수 a, b의 값을 구하고 100 (a^2+b^2)의 값을 구한다.

$g(4) = \int_0^4 a(t-2)e^{-\frac{t}{2}}dt$

$= \left[a(t-2)\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^4 - \int_0^4\left(-2ae^{-\frac{t}{2}}\right)dt$

$= -4ae^{-2} - 4a - \left[4ae^{-\frac{t}{2}}\right]_0^4$

$= -4ae^{-2} - 4a - 4ae^{-2} + 4a = -8ae^{-2}$

$p(4) = g(4) - 4f(4) = -8ae^{-2} - 4 \times 2ae^{-2} = -16ae^{-2}$

$-16ae^{-2} = 8e^{-2}$에서

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b=1$이므로 $100(a^2+b^2) = 125$

17. [정답/모범답안] ④
[해설]
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}=\frac{4}{3}$

18. [정답/모범답안] ③
[해설]
수열$\{a_n\}$의 공비를 r_1, 수열 $\{b_n\}$의 공비를 r_2라 할 때,
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r_1}=4$이므로 $r_1=\frac{3}{4}$
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{1-r_2}=2$이므로 $r_2=\frac{1}{2}$
$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, $b_n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 $a_nb_n=\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{1-\frac{3}{8}}=\frac{8}{5}$

19. [정답/모범답안] 34
[해설]
$x=\frac{t^3}{3}-11t, y=t^2+1$에서
$\frac{dx}{dt}=t^2-11, \frac{dy}{dt}=2t$이므로
속력을 $|v(t)|$라고 하면
$|v(t)|=\sqrt{(t^2-11)^2+(2t)^2}=\sqrt{t^4-18t^2+121}$
$g(t)=t^4-18t^2+121$이라 할 때 속력 $|v(t)|$는 $g(t)$가 최소일 때 최소가 된다.
$g'(t)=4t^3-36t$이고 $g'(t)=0$에서 양수 t의 값을 구하면
$t^2=9$에서 $t=3(t>0)$
$t=3$을 주어진 식에 대입하면 $x=-24, y=10$
따라서 $p=-24, q=10$이므로 $q-p=34$

20. [정답/모범답안] ②
[해설]
{풀이 전략}
적분과 미분의 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.
{문제 풀이}
{STEP1} 조건 ㈎와 적분과 미분의 관계를 이용하여 g'(1)의 값을 구한다.
ㄱ. 조건 (가)에서
$g(x)=(x+1)\int_1^x f'(t)dt-\int_1^x tf'(t)dt$
양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=\int_1^x f'(t)dt+(x+1)f'(x)-xf'(x)$
$=\int_1^x f'(t)dt+f'(x)\cdots\cdots$㉠
따라서 $g'(1)=f'(1)=\frac{1}{e}$(참)
{STEP2} 조건 ㈎, ㈏를 이용하여 g(1), f(1)의 값을 구한다.
ㄴ. 조건(가)에서 $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=0$
조건(나)에서 $f(x)=g'(x)-f'(x)=\int_1^x f'(t)dt$이므로 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$
따라서 $f(1)=g(1)$(참)

{STEP3} 주어진 명제의 부정이 참임을 보인다.
ㄷ. $h(x)=g(x)-f(x)$라 하면 ㄴ에 의하여
$h(1)=g(1)-f(1)=0$
$h'(x)=g'(x)-f'(x)=\int_1^x f'(t)dt=f(x)-f(1)=f(x)$이 므 로
$h'(1)=f(1)=0$
$h''(x)=f'(x)=xe^{-x^2}$
$x>0$에서 $h''(x)>0$이므로
$0<x<1$에서 $h'(x)<0$이고, $x>1$에서 $h'(x)>0$이다.
$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	0	↗

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0이므로
모든 양수 x에 대하여 $h(x)=g(x)-f(x)\geq 0$이므로 $g(x)<f(x)$인 양수 x가 존재하지 않는다.(거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [정답/모범답안] ①
[해설]
$\angle BOQ=\theta, \overline{OB}=1$이고, $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$이므로
$\overline{BQ}=\sin\theta$
또 $\angle RQB=\frac{\pi}{2}-\angle QBR=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$,
$\overline{BQ}=\sin\theta, \angle BRQ=\frac{\pi}{2}$이므로
$\overline{BR}=\sin^2\theta, \overline{RQ}=\sin\theta\cos\theta$
즉, 삼각형 BRQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BR}\times\overline{RQ}=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\cos\theta\cdots\cdots$㉠
삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형 BRQ의 넓이를 구하면
$\frac{1}{2}\times r(\theta)\times(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\cdots\cdots$㉡
㉠,㉡에 의해서
$r(\theta)=\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$
따라서
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\theta^2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)$
$=1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

22. [정답/모범답안] 32
[해설]
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로
$a_n=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
$a_{2n-1}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{(2n-1)-1}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}=3\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$
수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{27}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=27$이므로 $p+q=32$

23. [정답/모범답안] ①

[해설]

$f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로

$f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))\ g'(x)=1$, $g'(f(x))f'(x)=1$

따라서

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

$$= \int_1^3 \{f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\}dx$$

$$= \int_1^3 \{f(x)g(x)\}'dx = [f(x)g(x)]_1^3$$

$= f(3)g(3) - f(1)g(1)$

$f(1)=3$에서 $g(3)=1$

$g(1)=3$에서 $f(3)=1$

따라서$f(3)g(3)-f(1)g(1) = 1\times1-3\times3 = -8$

24. [정답/모범답안] 350

[해설]

{풀이 전략}

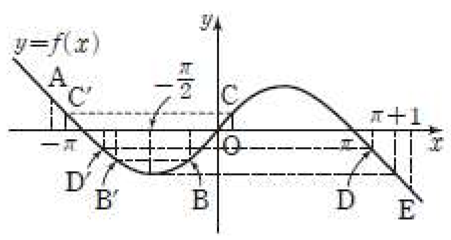
t의 값에 따른 함수 $g(x)$를 알아보고 정적분의 성질을 이용하여 미지수를 구한다.

{문제 풀이}

{STEP1} t의 값에 따른 g(t)를 구한다.

부등식 $f(x) \le f(t)$를 만족시키는 x의 값의 범위는 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=f(t)$와 만나거나 아래쪽에 그려지는 실수 x의 값의 범위와 같다.

따라서 직선 $y=f(t)$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값이 $g(t)$이다.



(ⅰ) $t \le -\frac{\pi}{2}$일 때

점 A의 x좌표가 t일 때, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 A이다. 따라서 $g(t)=t$

(ⅱ) $-\frac{\pi}{2} < t \le 0$일 때

점 B의 x좌표가 t일 때, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 B'이다.

따라서 점 B'의 x좌표가 $g(t)$이다.

두 점 B, B'은 직선 $x=-\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{t+g(t)}{2} = -\frac{\pi}{2}$에서

$g(t) = -t-\pi$

(ⅲ)$0 < t \le \pi$일 때

점 C의 x좌표가 t일 때, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 C'이다.

따라서 점 C'의 x좌표가 $g(t)$이다.

점 C는 곡선 $y=\sin x$ 위의 점이고, 점 C'은 직선 $y=-x-\pi$ 위의 점이므로 $\sin t = -g(t)-\pi$에서 $g(t) = -\sin t - \pi$

(ⅳ)$\pi < t \le \pi+1$일 때

점 D의 x좌표가 t일 때, 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 D'이다.

따라서 점 D'의 x좌표가 g(t)이다.

점 D는 직선 $y=-x+\pi$ 위의 점이고, 점 D'은 곡선 $y=\sin x$위의 점이므로 $-t+\pi = \sin g(t)$이다.

함수 $y=\sin x\left(-\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $h(x)$라 하면

$g(t) = h(-t+\pi)$

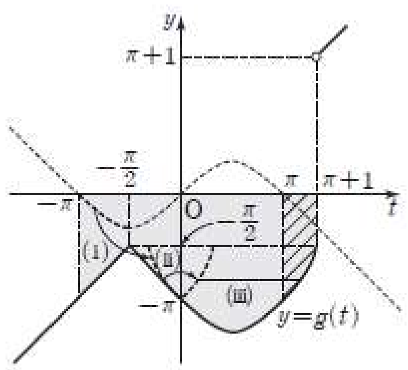
(ⅴ) $t > \pi+1$일 때

점 E의 x좌표가 t일 때, 점 E를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점은 E이다.

따라서 $g(t)=t$

{STEP2} 함수 $y=g(t)$를 그린다.

함수 $g(t)$는 $t=\pi+1$에서 불연속이므로 $\alpha=\pi+1$이고 그래프는 그림과 같다.



{STEP3} $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$, $\int_{\pi}^{\alpha} f(t)dt$의 값을 구한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{t^2}{2} - \pi t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\cos t - \pi t]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{7}{4}\pi^2 - 2 \cdots\cdots ㉠$$

한편 위의 그림에서

$y = \sin t\left(-\pi \le t \le -\frac{\pi}{2}\right)$

$$\xrightarrow[\text{직선 } y=t\text{에 대하여 대칭}]{(\text{i})} y=h(t)$$

$$\xrightarrow[y\text{축에 대하여 대칭}]{(\text{ii})} y=h(-t)$$

$$\xrightarrow[\text{평행이동}]{(\text{iii})} y=h(-t+\pi)$$

이므로

$\int_{\pi}^{\alpha} g(t)dt = -$(빗금 친 부분의 넓이)

$$= -\left(1\times\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\pi - 1 \cdots\cdots ㉡$$

{STEP4} $100\times|p+q|$의 값을 구한다.

따라서

$$\int_{-\pi}^{\alpha} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt - \int_{\alpha}^{\pi} g(t)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int_{\pi}^{\alpha} g(t)dt$$

$$= -\frac{7}{4}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi - 3$$

그러므로 $p = -\frac{1}{2}$, $q = -3$이므로

$100 \times |p+q| = 350$