제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\left(\dfrac{2^2}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} = \left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}} = 2^{4-2}$

$= 4$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\dfrac{1+3}{1} = 4$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{(x+5)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$

$= \dfrac{\sqrt{1-0}+3}{1+0} = 4$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

• $a_2+a_4 = 30 = ar+ar^3$

• $a_4+a_6 = \frac{15}{2} = r^2(ar+ar^3) = 30r^2$

$r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\ (\because r>0)$

대입 $\frac{5}{8}a = 30 \Leftrightarrow a = 48$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

곱의 미분법

$g(x) = x^2f(x) \Rightarrow g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$

$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$

$= 4\cdot1 + 4\cdot3$

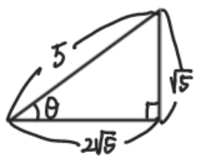
$= 4+12 = 16$

5. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \tan\theta < 0,\ \sin\theta < 0,\ \cos\theta > 0 \Rightarrow$ θ는 제 4사분면



$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$

$\Rightarrow f'(1) = 6 - 18 + a = 0$　　$\underline{a=12}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x-1)(x-2)$　　$\underline{b=2}$

$\therefore a+b = 14$

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

첫째항 : a
공차 : a　$\Rightarrow a_n = a + (n-1)a = an$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_{15}}}{a}$$

$$= \frac{-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{16}}}{a} = \frac{-\sqrt{a}+4\sqrt{a}}{a} = \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

$\therefore a = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow a_4 = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9$

8. 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

$(t,\ t^3-t+2)$ 위에서의 접선

$\Rightarrow y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+2$

접선이 $(0,4)$를 지남 $\Rightarrow$ 대입

$4=-3t^3+t+t^3-t+2 \Leftrightarrow t^3=-1$ $\quad \therefore t=-1$

(점 $(0,4)$에서의 접선) $\Rightarrow y=2(x+1)+2$

x 절편 $\Rightarrow 0=2x+4 \Rightarrow x=-2$

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

* 최대, 최소 존재 $-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$

* 감소함수 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최대, $x=\frac{\pi}{4}$에서 최소

$x=-\frac{\pi}{6}$일 때, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=a+3=7$

$\therefore a=4$

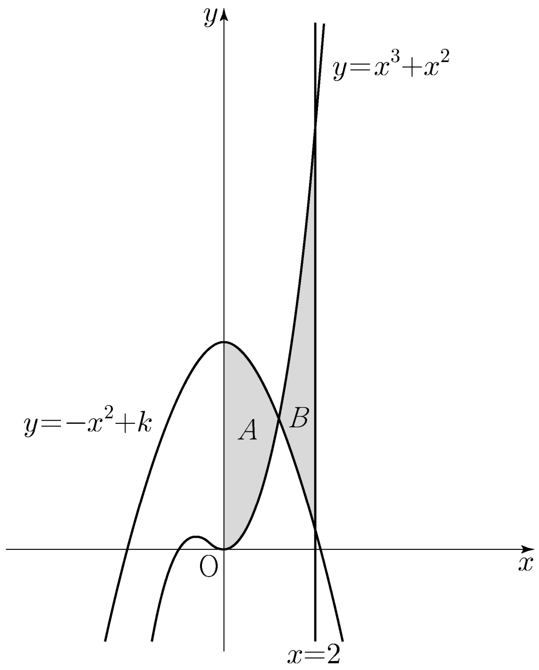
$x=b$ 일 때, $f(b)=4-\sqrt{3}\tan(2b)=3$

$\Rightarrow \tan(2b)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \therefore b=\frac{\pi}{12}$

$\therefore a\times b=\frac{\pi}{3}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=-A+B=0$

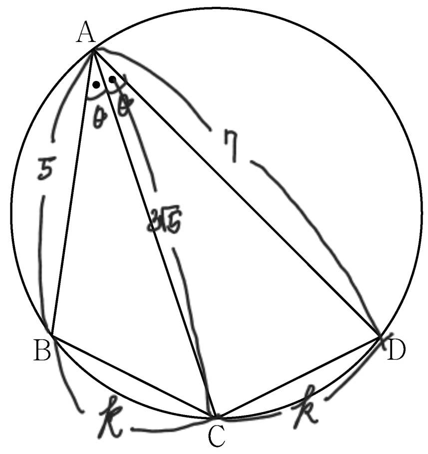
$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2=4+\frac{16}{3}-2k=0$

$\Rightarrow 2k=\frac{28}{3}$ $\quad \therefore k=\frac{14}{3}$

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\cos\theta = \frac{25+45-k^2}{2\cdot 5\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{45+49-k^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 7}$ $\therefore k=\sqrt{10}$

k값 대입 $\Rightarrow \cos\theta = \frac{60}{30\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름을 R이라 하면,

$2R = \frac{\frac{\sqrt{10}}{1}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 5\sqrt{2}$ $\therefore R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

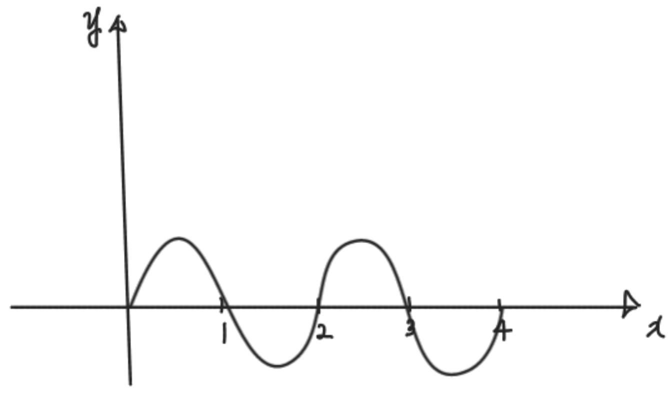
> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



$\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

$\Rightarrow$ 이차함수 넓이 공식

$\int_0^1 f(x)dx = \frac{6}{6}(1)^3 = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}$

13. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

i) $m=2$ $2^{12}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,12$ $\therefore f(2)=5$

ii) $m=3$ $3^{12}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,12$ $\therefore f(3)=5$

iii) $m=4$ $2^{24}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,8,12,24$ $\therefore f(4)=7$

iv) $m=5$ $5^{12}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,12$ $\therefore f(5)=5$

v) $m=6$ $6^{12}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,12$ $\therefore f(6)=5$

vi) $m=7$ $7^{12}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,12$ $\therefore f(7)=5$

vii) $m=8$ $2^{36}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,9,12,18,36$ $\therefore f(8)=8$

viii) $m=9$ $3^{24}=x^n \rightarrow n=2,3,4,6,8,12,24$ $\therefore f(9)=7$

$\sum_{m=2}^{9} f(m) = 5+5+7+5+5+5+8+7 = 47$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

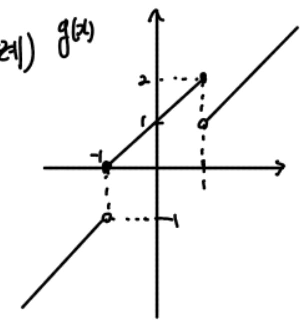
ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

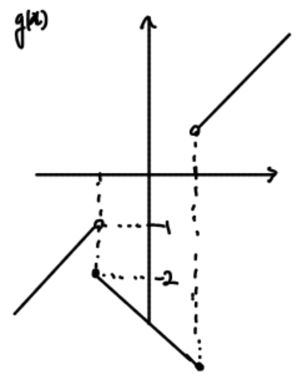
ㄱ. $h(1)=\lim_{t \to 0+} g(1+t) \times \lim_{t \to 2+} g(1+t) = 1 \cdot 3 = 3$

ㄴ. ~~X~~ (반례) $g(x)$

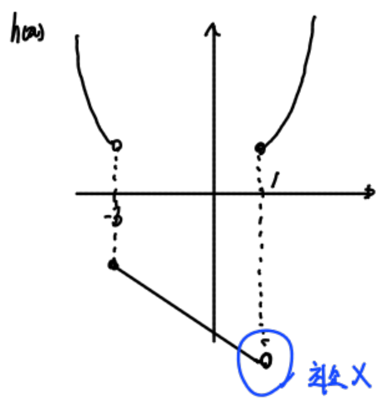


$\Rightarrow$ $\lim_{x \to 1-} h(x) = 2 \cdot 3 = 6$, $\lim_{x \to 1+} h(x) = 1 \cdot 3 = 3$, $h(1)=3$ $\Rightarrow$ 불연속

ㄷ. ~~X~~ $g(x)$



$\Rightarrow$ $h(x)$



15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

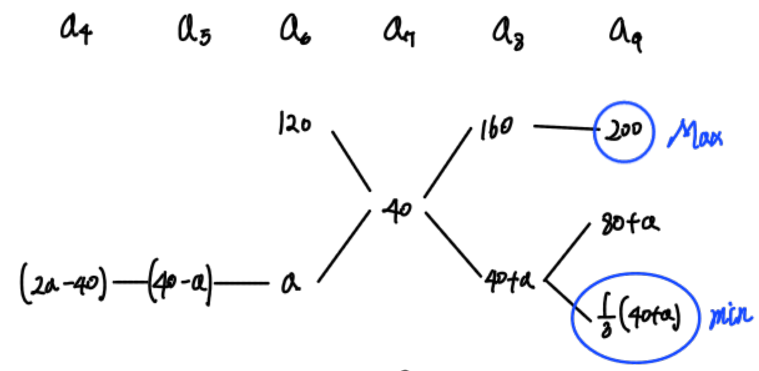
(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224



$40+a \Rightarrow 3$의 배수 $a=3n-1$ (모든 자연수) ... ①

$40-a \Rightarrow$ 자연수 n은 13이하의 자연수 ... ②

$2a-40=6n-42$ (3의 배수) $\Rightarrow 3a_5=a_4$ ... ③

3에 의해 $2a-40=120-3a$ $\therefore a=32$

대입

$\Rightarrow min=\frac{1}{3}(72)=24$

$\therefore M+m=224$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 10

$\log_2(3x+2)=\log_2(4x-8)$

$3x+2=4x-8$

$x=10$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 15

$f(x)=x^4-x^2+C \Rightarrow f(0)=C=3$

$f(x)=x^4-x^2+3 \Rightarrow f(2)=16-4+3=15$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55, \quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

22

일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

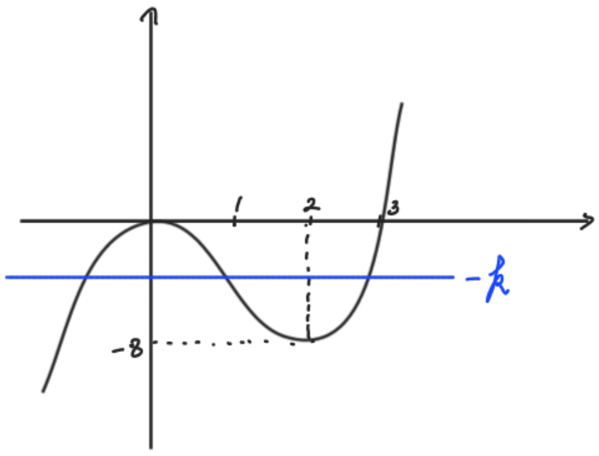
$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5) = 3\sum_{k=1}^{5}(a_k) + 25 = 55$ $\quad$ $\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{5}(a_k) + \sum_{k=1}^{5}(b_k) = 32$ $\quad$ $\therefore \sum_{k=1}^{5} b_k = 22$

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

7

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(x-3) \Rightarrow f(2) = -8$



방정식 $f(x) = -k$ 두개 실근 (실근은 양수)

$-8 < -k < 0 \iff 0 < k < 8$

$\therefore k = 1, 2, \cdots, 7$ $\quad$ 7개

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

17

(가) $0 \le t \le 2$일 때, $v(t) = 2t^3 - 8t$이다.

(나) $t \ge 2$일 때, $a(t) = 6t + 4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

(나) $t \ge 2$ 일때, $v(t) = 3t^2 + 4t + C$

(가)에서 $v(2) = 0$ 이므로 $v(2) = 12 + 8 + C = 0 \Rightarrow C = -20$

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \le t \le 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (t \ge 2) \end{cases}$$

점 P가 움직인 거리

$\int_0^2 |2t^3 - 8t|\,dt + \int_2^3 |3t^2 + 4t - 20|\,dt$

$= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2\right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t\right]_2^3$

$= -(-8) + 9 = 17$

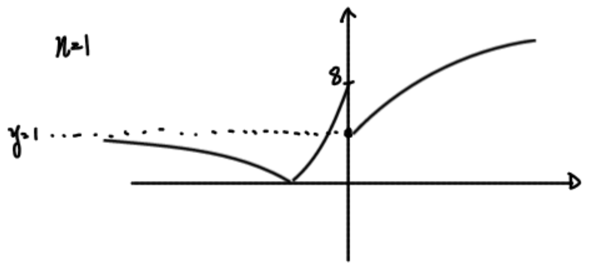
21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

33

$$f(x)=\begin{cases}|3^{x+2}-n| & (x<0)\\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0)\end{cases}$$

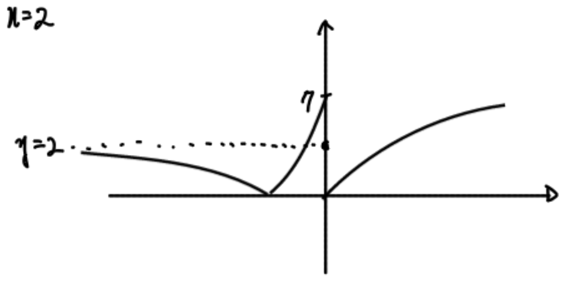
이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$n=1$



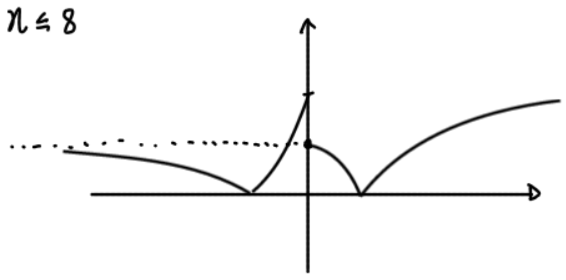
$g(t)$ Max $=2$

$n=2$



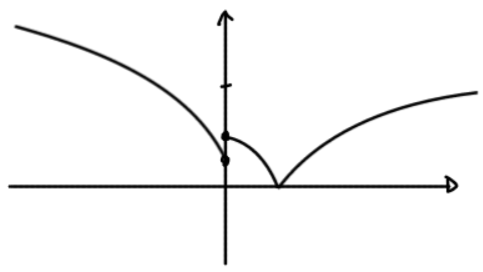
$g(t)$ Max $=3$

$3\le n\le 8$



$g(t)$ Max $=4$

$9\le n$



$g(t)$ Max $=3$

$\therefore 3+4+5+6+7+8=33$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

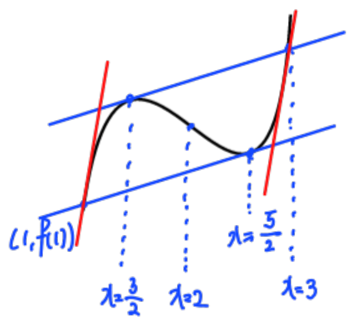
13

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

(가) $f(x)-f(1)=(x-1)f'(g(x)) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)}=f'(g(x))$ (단, $x\ne 1$)

(나) $g(x)$ 최솟값 $\frac{5}{2}$



(다) $f(g(1))=6$ ~ $g(1)=?$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)}=f'(1)=f'(g(1))$

$\therefore g(1)=3$ ($\because g(x)\ge \frac{5}{2}$)

$\Rightarrow f(3)=6$

$3\times$ 변곡점 $=-a$ $\therefore a=-6$

$f(3)=6$ 대입 $27-54+3b-3=6$ $\therefore b=12$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3 \Rightarrow f(4)=64-96+48-3=13$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

$_5C_3 \cdot (x^3)^3 \cdot (3)^2 = 90x^9$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

천의 자리 ⇒ 4, 5
일의 자리 ⇒ 1, 3, 5
십, 백의 자리 ⇒ 1, 2, 3, 4, 5

$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 150$

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

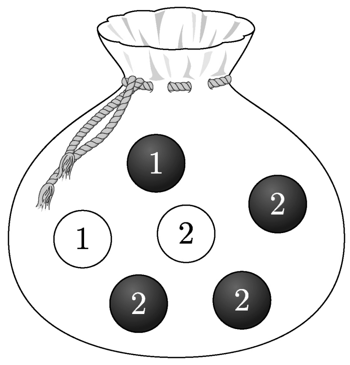
여사건

1 − (흰색 마스크 × 확률)

$= 1 - \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



$P(A) = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_6C_3} = \frac{12}{20}$

$P(B)$ → 2가 적힌 공 3개 뽑기

$P(B) = \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} = \frac{4}{20}$

$P(A \cap B)$ → 흰공 2개, 검은공 2개 뽑기

$P(A \cap B) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{3}{20}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12+4-3}{20} = \frac{13}{20}$

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

표본 16일때, 표본평균 $\bar{x}_1$

$\bar{x}_1 - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le \bar{x}_1 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

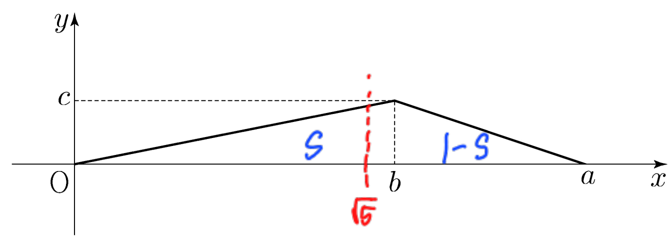
신뢰구간 $755.9 - 746.1 = 9.8 = 0.98\sigma$ $\therefore \sigma = 10$

표본 n일때, 표본평균 $\bar{x}_2$

$\underbrace{\bar{x}_2 - 2.56 \frac{10}{\sqrt{n}}}_{a} \le m \le \underbrace{\bar{x}_2 + 2.56 \frac{10}{\sqrt{n}}}_{b}$

$b - a = \frac{51.6}{\sqrt{n}} \le 6 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 8.6 \Rightarrow n \ge 73.96$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

$P(X \le b) - P(X \ge b) = S - (1 - S) = \frac{1}{4} \rightsquigarrow S = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{c}{b}\sqrt{5} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5c = b$

$S = \frac{1}{2} bc = \frac{5}{2} c^2 = \frac{5}{8}$ $c = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$

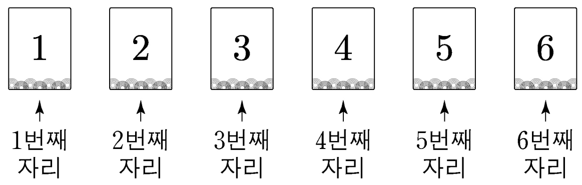
$\frac{1}{2} ac = \frac{1}{4} a = 1$ $a = 4$

$\therefore a + b + c = 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 7$

단답형

49

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

모든 수의 합이 짝수일 확률

i) 홀 3번

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ii) 홀 1번, 짝 2번

$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

주사위 1의 눈이 한번만 나왔을 확률

i) 1, 홀 2번

$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$

ii) 1, 짝 2번

$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \frac{4+9}{72} = \frac{13}{72}$

$\Rightarrow \frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$

$p+q=49$

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

100

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
>
> (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
>
> (다) $f(6)=f(5)+6$

조건 (나)를 통해 $f(1)\le 1,\ f(10)\ge 10 \Rightarrow f(1)=1,\ f(10)=10$

(다)를 통해 케이스 분류

i) $f(5)=1,\ f(6)=7$

$1\le x\le 5$ 에서 $(f(2), f(3), f(4)) = (1,1,1)$ 일때만 가능

$6\le x\le 10$ 에서 $f(9)=9$일 때, $f(7)=f(8)=7$ 일때를 제외하면,

${}_3H_2 - 1 = {}_4C_2 - 1 = 5$

$f(9)=10$일 때, $f(7)=f(8)=7$ 제외

${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 9$

$\Rightarrow 5+9=14$

ii) $f(5)=2,\ f(6)=8$

$1\le x\le 5$ 에서 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$

$6\le x\le 10$ 에서 $f(7), f(8), f(9) \to 8, 9, 10$ $f(7)=f(8)=f(9)=8$ 제외

${}_3H_3 - 1 = {}_5C_3 - 1 = 9$

$\Rightarrow 4\times 9 = 36$

Without loss of generality

iii) $f(5)=3,\ f(6)=9 \Leftrightarrow$ ii) 36개

iv) $f(5)=4,\ f(6)=10 \Leftrightarrow$ i) 14개

$\therefore 14+36+36+14 = 100$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{x}{x}\cdot(\sqrt{x+4}+2)$

$=1\cdot 1\cdot(\sqrt{0+4}+2)=4$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$1+\frac{3k}{n}=x$, $\frac{3}{n}=\Delta x$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{9}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

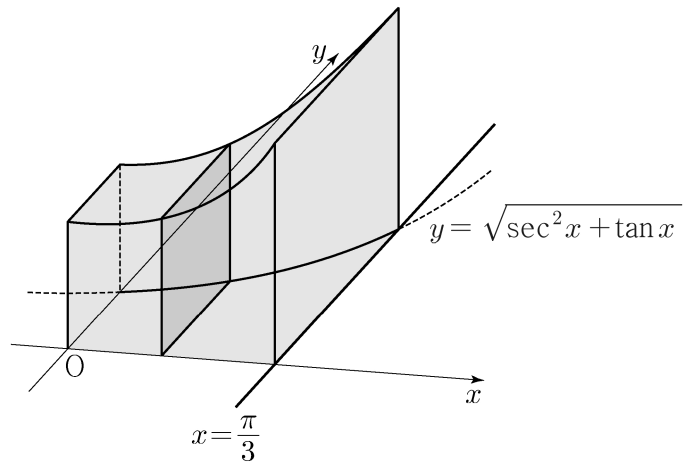
공비: 4 → $a_n = \frac{3}{2}\cdot(4)^n$ → $a_2 = 24$

$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}+1}{3^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n}=3$ → $r=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}\cdot 4^n+1}{3^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n}=\frac{a}{2}=3$ → $a=6$

$a_n = 6\cdot(4)^{n-1}$ → $a_2 = 24$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)\,dx = \left[\tan x - \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}\right)-0$

$=\sqrt{3}+\ln 2$

(1) ★ $\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{1}{t}dt = -\ln|\cos x|+C$

Let $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$

(2) $\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

⇓

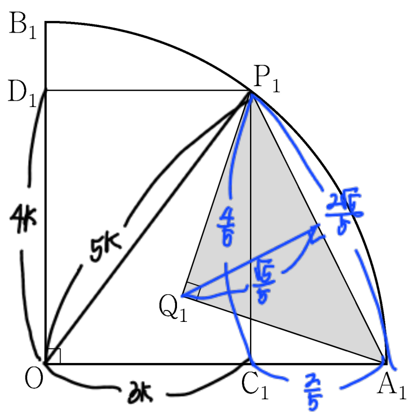
Let $f(x)=\cos x$ $\int\frac{-f'(x)}{f(x)}dx = -\ln|f(x)|+C$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

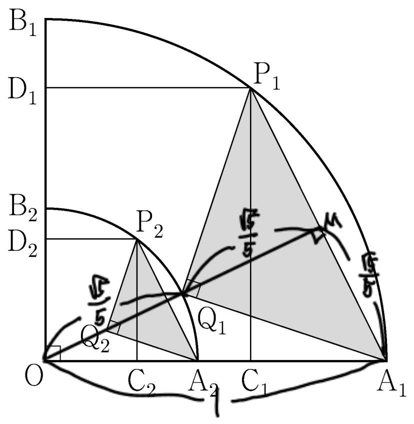
$5k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{5}$

$(\triangle P_1Q_1A_1$의 넓이$)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt5}{5}\times\frac{\sqrt5}{5}$
$=\frac{1}{5}$

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

$\overline{OM}=\frac{2\sqrt5}{5}$, $\overline{Q_1M}=\frac{\sqrt5}{5}$

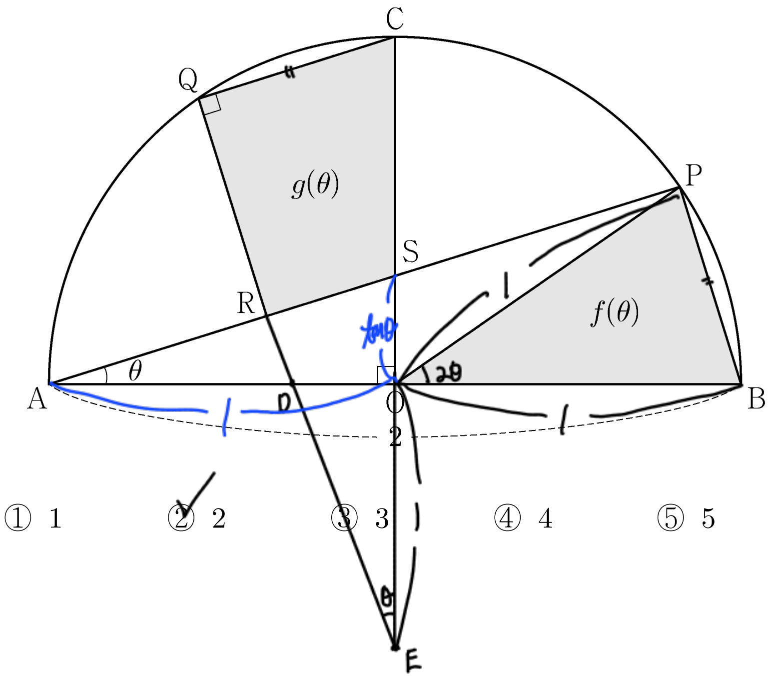
$\Rightarrow \overline{OQ_1}=\overline{OM}-\overline{Q_1M}=\frac{\sqrt5}{5}$

두 부채꼴의 닮음비 $1:\frac{\sqrt5}{5}$

〃 넓이비 $1:\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$

$g(\theta)=\triangle CQE-\triangle SRE$

$\Rightarrow \overline{AO}=1$, $\overline{SO}=\tan\theta \Rightarrow \overline{SE}=1+\tan\theta$

$\overline{CE}:\overline{SE}=2:1+\tan\theta \Rightarrow (\triangle CQE$의 넓이$):(\triangle SRE$의 넓이$)=4:(1+\tan\theta)^2$

$g(\theta)=2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1+\tan\theta)^2$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\{3-4+(1+\tan\theta)^2\}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\theta\cos\theta(2\tan\theta+\tan^2\theta)}{\theta^2}$$

$$=1\cdot 1\cdot(2+0)=2$$

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다. 26

(가) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^{x}}=1$

(나) $f(\ln 2)=0$

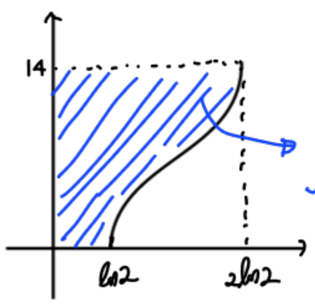
함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14}g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{2x}+be^{x}+c+6}{e^{x}}=1$

(분모)가 0으로 가므로, (분자)도 0으로 가야함. $c=-6$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{2x}+be^{x}}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{x}+b}{1}=b=1$

(나) $f(\ln 2)=4a+2-6=0$ $a=1$



$\int_{0}^{14}g(x)dx=28\ln 2-\int_{\ln 2}^{2\ln 2}f(x)dx$

$=28\ln 2-\int_{\ln 2}^{2\ln 2}(e^{2x}+e^{x}-6)dx$

$=28\ln 2-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x\right]_{\ln 2}^{2\ln 2}$

$=28\ln 2-(8+4-12\ln 2-2-2+6\ln 2)$

$=28\ln 2-8+6\ln 2$

$=34\ln 2-8$

$\therefore p=-8,\ q=34$

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다. 31

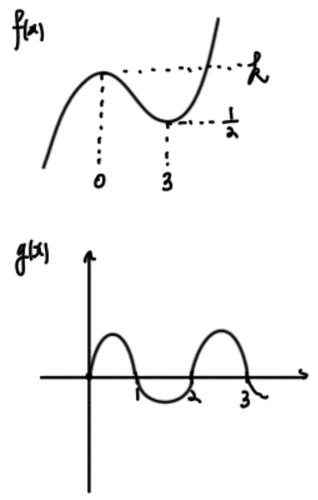
(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.

(나) 열린구간 $(0,3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

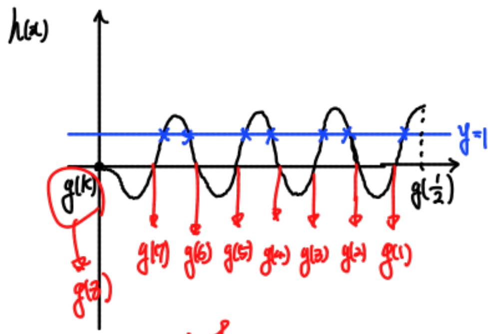
$f(3)=\dfrac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$ ⇒ $h'(0)=g'(f(0))\cdot f'(0)=0$ ⇒ $f'(0)=0$ ($\because g'(x)\neq 0$)

$h(x)=g(f(x))$ ⇒ $h(0)=g(f(0))=0$ ⇒ $f(0)=1,2,3,4,\cdots$



⇒



$\therefore k=8$

$f'(x)=a(x)(x-3)$

$f(x)=\frac{1}{3}ax^{3}-\frac{3}{2}ax^{2}+8$

$f(3)=9a-\frac{27}{2}a+8=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{5}{3}$

$f(2)=\frac{8}{3}a-6a+8=-\frac{10}{3}a+8=-\frac{50}{9}+8=\frac{22}{9}$

$\therefore p+q=31$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.