선형대수학과 미적분

崔

May 2, 2023

Abstract

In this paper, based on the well-known linear properties of differentiation and integration, we apply Linear Algebra - especially matrix multiplication - in order to differentiate and integrate real functions of specific cases.

1 Linearity

1.1 Linear Transformations

동일한 필드 K 위에 있는 두 벡터 공간 V, W를 생각하자. 함수 $f : V \to W$가 선형 변환(linear transformation)이라는 것은, V의 임의의 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$와 K의 스칼라 k에 대하여 다음 두 조건이 성립한다는 것과 동치이다.

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$
$$f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u})$$

첫 번째 성질을 Additivity Property, 두 번째 성질을 Homogeneity Property라 한다.

1.2 Differentiation and Integration

미분과 적분에 대해 다음이 성립함이 잘 알려져 있다. (단, $\mathbf{f}, \mathbf{g}$는 미분가능한 실함수이고, k는 임의의 실수이다.)

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}', \quad (k\mathbf{f})' = k\mathbf{f}'$$
$$\int(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \int \mathbf{f} + \int \mathbf{g}, \quad \int(k\mathbf{f}) = k\int \mathbf{f}$$

즉, 미분과 적분 연산은 모두 선형 변환임을 알 수 있다.

2 The Standard Matrix of Differentiation

2.1 The Standard Matrix of a Linear Transformation

선형 변환 중 자연수 n, m에 대하여 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로 가는 선형 변환 T의 경우 standard matrix A가 존재하여 $\mathbb{R}^n$의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

이러한 선형 변환을 편의상 T_A라 쓰자. 예를 들어, $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\mathbf{x} = (x, y, z)$를 $\mathbb{R}^4$의 벡터 $(x + 2z, \pi y - 3z, 7x - 2y, x + y + z)$로 보내는 선형 변환 T_A에 대하여

$$T_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \pi & -3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2z \\ \pi y - 3z \\ 7x - 2y \\ x + y + z \end{bmatrix}$$

가 성립하므로 T_A의 standard matrix A는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \pi & -3 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Constructing the Standard Matrix of Differentiation

미분은 선형 변환이지만, $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로 가는 변환이 아니므로 일반적으로 standard matrix를 찾을 수 없다. 하지만 좌표벡터를 이용할 경우 미분 연산자가 적용되는 미분가능한 함수들의 집합을 $\mathbb{R}^n$으로 보내, standard matrix를 구축할 수 있다.

가령, 다음과 같은 벡터 공간 V를 생각하자.

$$V = \operatorname{span}\{e^x, xe^x, x^2e^x\} = \operatorname{span}(\mathcal{B})$$

이때 V의 임의의 원소 $\mathbf{f}$에 대하여 $\mathbf{f}$의 도함수 $\mathbf{f}'$ 역시 V의 원소임을 쉽게 알 수 있다.
실수 a_1, a_2, a_3에 대하여 $\mathbf{f}(x) = a_1e^x + a_2xe^x + a_3x^2e^x$라 하면, $\mathbf{f}$의 좌표벡터는 다음과 같다.

$$[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}$의 도함수 $\mathbf{f}'$을 계산한 후 좌표벡터로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}'(x) = (a_1 + a_2)e^x + (a_2 + 2a_3)xe^x + a_3x^2e^x$$

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

이때 $[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}}$와 $[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}}$의 관계를 살펴보면 다음과 같이 D라는 행렬이 곱해져 얻어지는 관계이다.

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + 2a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=D} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = D\,[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}}$$

따라서 이러한 행렬 D를 기저 $\mathcal{B} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$에 대한 미분 연산자의 standard matrix라고 할 수 있을 것이다. 즉, 다음 다이어그램과 같이 V의 임의의 원소(미분가능한 실함수) $\mathbf{f}$를 기저 $\mathcal{B}$에 대한 좌표벡터로 바꾼 후, 미분 연산자의 standard matrix D를 곱하고 얻어진 벡터를 다시 실함수로 바꾸면 $\mathbf{f}$의 도함수가 얻어지는 것이다.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{f} \arrow[r, "\frac{d}{dx}"] \arrow[d, "\text{좌표벡터 연산}"'] & \mathbf{f}' \\
{[\,\mathbf{f}\,]_B} \arrow[r, "T_D"'] & {[\,\mathbf{f}'\,]_B} \arrow[u, "\text{역-좌표벡터 연산}"']
\end{tikzcd}$$

2.3 The Standard Matrix of Differentiation

이러한 접근은 다른 기저 집합에 대해서도 적용 가능하다. 일반적으로, $V = \text{span}(\mathcal{B})$의 임의의 원소 $\mathbf{f}$에 대하여 $\mathbf{f}$의 도함수 $\mathbf{f}'$이 V의 원소일 때, 기저 $\mathcal{B}$에 대한 미분 연산자의 standard matrix가 존재함을 증명해보자. $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$라 하자. $\mathcal{B}$의 임의의 원소의 도함수는 $\text{span}(\mathcal{B})$의 원소이므로 적당한 실수 c_{ij} $(1 \le i, j \le n)$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$\mathbf{f}_1'(x) = c_{11}\mathbf{f}_1(x) + c_{12}\mathbf{f}_2(x) + \cdots + c_{1n}\mathbf{f}_n(x)$$

$$\mathbf{f}_2'(x) = c_{21}\mathbf{f}_1(x) + c_{22}\mathbf{f}_2(x) + \cdots + c_{2n}\mathbf{f}_n(x)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{f}_n'(x) = c_{n1}\mathbf{f}_1(x) + c_{n2}\mathbf{f}_2(x) + \cdots + c_{nn}\mathbf{f}_n(x)$$

이제 V의 임의의 원소 $\mathbf{f}$를 잡고 기저 $\mathcal{B}$에 대한 좌표벡터가 다음과 같다고 가정하자.

$$[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

이때 $\mathbf{f}$의 도함수 $\mathbf{f}'$은

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'(x) &= a_1\mathbf{f}_1'(x) + a_2\mathbf{f}_2'(x) + \cdots + a_n\mathbf{f}_n'(x) \\
&= a_1\left[\sum_{i=1}^{n} c_{1i}\mathbf{f}_i(x)\right] + a_2\left[\sum_{i=1}^{n} c_{2i}\mathbf{f}_i(x)\right] + \cdots + a_n\left[\sum_{i=1}^{n} c_{ni}\mathbf{f}_i(x)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i c_{i1}\right]\mathbf{f}_1(x) + \left[\sum_{i=1}^{n} a_i c_{i2}\right]\mathbf{f}_2(x) + \cdots + \left[\sum_{i=1}^{n} a_i c_{in}\right]\mathbf{f}_n(x)
\end{aligned}$$

이므로 $1 \le j \le n$에 대하여 $A_j = \sum_{i=1}^{n} a_i c_{ij}$라 하면 $\mathbf{f}'$의 기저 $\mathcal{B}$에 대한 좌표벡터는 다음과 같다.

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

따라서 기저 $\mathcal{B}$에 대한 미분 연산자의 standard matrix D에 관한 공식을 다음과 같이 일반적으로 구할 수 있다.

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{=D}[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}}$$

한편 행렬 D가 가역이기 위한 필요충분조건은 D의 열벡터들이 모두 일차독립인 것이고, D의 열벡터들이 모두 일차독립이기 위한 필요충분조건은 집합 $W := \{\mathbf{f}_1', \mathbf{f}_2', \dots, \mathbf{f}_n'\}$이 일차독립인 것이다. 이제 집합 W가 일차종속이라고 가정해보자. W가 일차종속이려면 $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$가 상수함수를 포함하거나, 두 함수 $\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j$가 존재하여 0이 아닌 실수 k_1, k_2에 대하여 다음이 성립해야 한다.

$$\mathbf{f}_i = k_1\mathbf{f}_j + k_2$$

만약 $\mathcal{B}$가 상수함수를 포함한다면 집합 W는 영함수 $\mathbf{0}$을 원소로 가지고, 따라서 $\mathcal{B}$도 영함수를 원소로 가진다. 하지만 영벡터가 포함된 집합은 반드시 일차종속이므로 이는 $\mathcal{B}$가 벡터 공간 V의 기저임에 모순이다.

한편 $\mathbf{f}_i = k_1\mathbf{f}_j + k_2$인 경우는 피적분함수에서 상수항을 빼내어 모순을 이끌어낼 수 있다. 즉, $V = \operatorname{span}(\mathcal{B})$의 원소인 피적분함수의 상수항을 없앤다면 $\mathbf{f}_i = k_1\mathbf{f}_j + k_2$인 경우 $\mathcal{B}$가 span하는 집합의 원소는 상수항을 가질 수밖에 없어 모순이 발생한다. 따라서 기저를 설정하기 전 피적분함수에서 상수항을 제거함으로써 미분 연산자의 standard matrix D가 항상 가역이 되도록 할 수 있다.

3 The Standard Matrix of Integration

미분의 역연산은 적분상수가 0인 부정적분이므로, 미분 연산자의 standard matrix의 역행렬은 적분 연산자의 standard matrix가 된다. (이를 이용하여 실제로 부정적분을 구할 때에는 단순히 적분상수 C를 더해주는 것으로 적분상수가 0인 문제점을 해결할 수 있다.) 즉, 다음 다이어그램과 같이 미분 연산의 역연산을 적용하여 역도함수를 구할 수 있다.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{f} \arrow[r, "\int"'] \arrow[d, "\text{좌표벡터 연산}"'] & \int \mathbf{f} \\
{[\,\mathbf{f}\,]_B} \arrow[r, "T_D^{-1}"'] & {\left[\int \mathbf{f}\right]_B} \arrow[u, "\text{역-좌표벡터 연산}"']
\end{tikzcd}$$

위에서 살펴본 예시인 $\mathcal{B} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$에 대하여 미분 연산자의 standard matrix D와 적분 연산자의 standard matrix D^{-1}는 각각 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이를 이용하여 다음 부정적분을 구해보자.

$$I(x) = \int (3e^x - 17xe^x + \sqrt{37\pi}x^2e^x)dx$$

기저 $\mathcal{B}$에 대한 피적분함수의 좌표벡터는

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -17 \\ \sqrt{37\pi} \end{bmatrix}$$

이므로 이 좌표벡터에 D^{-1}를 곱하면 다음을 얻는다.

$$D^{-1}\,[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -17 \\ \sqrt{37\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 2\sqrt{37\pi} \\ -17 - 2\sqrt{37\pi} \\ \sqrt{37\pi} \end{bmatrix}$$

따라서 이 좌표벡터를 다시 실함수로 바꾼 후 적분상수를 추가하면 구하고자 하는 부정적분이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$I(x) = (20 + 2\sqrt{37\pi})e^x - (17 + 2\sqrt{37\pi})xe^x + \sqrt{37\pi}x^2e^x + C$$

이러한 방법은 직접적인 부분적분보다 비효율적일 수 있지만, $\mathcal{B}$가 span하는 임의의 함수의 부정적분을 행렬 곱셈 한 번으로 구할 수 있다는 점에서 의미가 있다.

4 Other Examples

4.1 $\mathcal{B} = \{\sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x\}$

$V = \operatorname{span}(\mathcal{B}) = \operatorname{span}\{\sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x\}$인 경우, V의 임의의 원소의 도함수는 V의 원소가 되므로 V는 조건을 만족시킨다. 따라서 V의 임의의 원소 $\mathbf{f}$에 대하여 $\mathbf{f}$와 $\mathbf{f}'$의 좌표벡터를 각각 구하면

$$[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

일 때

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -a_2 + a_3 \\ a_1 + a_4 \\ -a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

이므로 미분 연산자의 standard matrix D와 그 역행렬 D^{-1}는 각각 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 $\mathcal{B} = \{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx)\}$

$V = \operatorname{span}(\mathcal{B}) = \operatorname{span}\{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx)\}$인 경우, V의 임의의 원소의 도함수는 V의 원소가 되므로 V는 조건을 만족시킨다. (단, $b \neq 0$) 따라서 V의 임의의 원소 $\mathbf{f}$에 대하여 $\mathbf{f}$와 $\mathbf{f}'$의 좌표벡터를 각각 구하면

$$[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

일 때

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} ak_1 - bk_2 \\ bk_1 + ak_2 \end{bmatrix}$$

이므로 미분 연산자의 standard matrix D와 그 역행렬 D^{-1}는 각각 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

4.3 $\mathcal{B} = \{e^x, xe^x, x^2e^x, \ldots, x^ne^x\}$

$n \in \mathbb{N}$에 대하여 $V = \text{span}(\mathcal{B}) = \text{span}\{e^x, xe^x, x^2e^x, \ldots, x^ne^x\}$인 경우, V의 임의의 원소의 도함수는 V의 원소가 되므로 V는 조건을 만족시킨다. 따라서 V의 임의의 원소 $\mathbf{f}$에 대하여 $\mathbf{f}$와 $\mathbf{f}'$의 좌표벡터를 각각 구하면

$$[\,\mathbf{f}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

일 때

$$[\,\mathbf{f}'\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 \\ k_1 + 2k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} + nk_n \\ k_n \end{bmatrix}$$

이므로 미분 연산자의 standard matrix D는 다음과 같다.

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3, 4, 5, 6, 7$인 경우에 대해 D_n의 역행렬을 직접 구한 후 규칙성을 찾아보면 D_n의 역행렬이 다음과 같다는 것을 추측할 수 있고, D_n와 D_n^{-1}를 곱해보면 타당한 결과라는 것을 확인할 수 있다.

$$D_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 & \cdots & (-1)^{n-1}(n-1)! & (-1)^n n! \\ 0 & 1 & -2 & 6 & \cdots & (-1)^n(n-1)! & (-1)^{n+1}n! \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots & (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2!} & (-1)^n\frac{n!}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^n\frac{(n-1)!}{3!} & (-1)^{n+1}\frac{n!}{3!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 이를 이용하면 $\mathcal{B} = \{e^x, xe^x, x^2e^x, \ldots, x^ne^x\}$가 span하는 복잡한 함수의 부정적분을 구할 때 부분적분을 전혀 하지 않고도 위에서 구한 D_n^{-1}와 피적분함수의 좌표벡터를 곱하는 행렬 곱셈 한 번으로 부정적분을 구할 수 있다.