P PL

M ATH

L AB

주간지

4주차

부정적분과 정적분

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는
수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며
대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고
있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원
dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

[2022년 고3 4월 18번]

2. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[2016학년도 대수능 A형 29번]

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[2016학년도 대수능 A형 20번]

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_{1}^{x}f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[2022학년도 9월 11번]

5. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

[2021학년도 9월 나형 28번]

6. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3-4x\int_0^1 |f(t)|dt$$

를 만족시킨다. $f(1)>0$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2020학년도 고3 3월 가형 16번]

7. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=-2$
(나) $f(-x)=f(x)$
(다) $f(f'(x))=f'(f(x))$

함수 $F(x)=\int f(x)\,dx$가 감소하는 구간의 길이는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[2011학년도 고3 7월 가형 12번]

8. $\int_{1}^{4}(x+|x-3|)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

[2019학년도 대수능 나형 25번]

9. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$
(나) $f(0)=-1$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

[2021학년도 고3 7월 나형 14번]

10. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$$

가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

[2021학년도 9월 나형 28번]

STEP 2

11. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 1$에서 $f(x) = x^2 + 1$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x) = f(1+x)$이다.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \int_{-n}^{n} f(x)dx$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, $a_7 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2014학년도 사관학교 A형 28번]

12. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \int_{x}^{x+1} |f(t)| dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

[2023학년도 고3 6월 20번]

13. 함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}=3$일 때, $f(a)$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[2019학년도 고3 6월 가형 15번]

14. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx=120$

$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

[2020학년도 고3 9월 가형 17번]

15. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{5}\{8x+f(x)\}dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{3}f(x)dx=2$
(다) $\int_{-5}^{-1}f(x)dx=-8$

① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

16. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}f(t)\,dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
(나) $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=5\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 대수능 나형 28번]

17. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고, $\int_{0}^{2013} f(x)\,dx = \int_{3}^{2013} f(x)\,dx$를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

[2013학년도 대수능 나형 28번]

18. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_{0}^{1} g(t)\,dt$
(나) $g(0)-\int_{0}^{1} g(t)\,dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

[2021학년도 고3 10월 나형 16번]

19. 이차함수 $f(x)$ 는 $f(0)=-1$ 이고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? [4점]

① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

[2012학년도 대수능 나형 19번]

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, β $(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다. (나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=\lvert f'(x)\rvert-f'(x)$에 대하여 $\int_{0}^{10} g(x)\,dx$의 값은?

[4점]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

[2022학년도 고3 7월 15번]

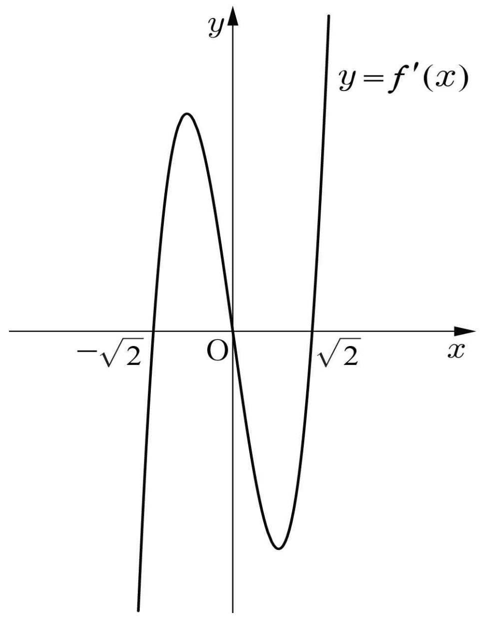
21. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)\,dt$$

일 때, $f(0)=a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

[2014학년도 9월 나형 28번]

22. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이다.



$f(0)=1$, $f(\sqrt{2})=-3$일 때, $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[2017학년도 고3 10월 나형 21번]

23. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)\,dt$
>
> (나) $g(0)-\int_0^1 g(t)\,dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은? 〔4점〕

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

[2020학년도 고3 10월 나형 16번]

24. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = x^3+ax^2-2$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

〔4점〕

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2019학년도 대수능 나형 14번]

25. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$

(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오 .[4점]

[2024학년도 고3 3월 20번]

26. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2+\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

[2019학년도 사관학교 나형 14번]

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_{1}^{2}f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

[2022학년도 대수능 20번]

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $\vert f(x)\vert=\vert 6(x-n+1)(x-n)\vert$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

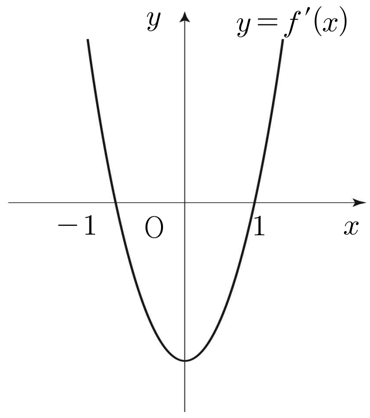
열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{4}f(t)dt$ 가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4}f(x)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[2023학년도 대수능 12번]

29. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f'(-1)=f'(1)=0$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

[2013학년도 고3 4월 가형 13번]

30. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2022학년도 6월 20번]

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	9	11번	20	21번	40
2번	45	12번	13	22번	①
3번	①	13번	⑤	23번	③
4번	④	14번	②	24번	⑤
5번	5	15번	③	25번	66
6번	②	16번	7	26번	②
7번	①	17번	40	27번	110
8번	10	18번	③	28번	②
9번	⑤	19번	①	29번	④
10번	5	20번	②	30번	8

정답 및 해설

1. 9

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을

x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$

$f(x)=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)

$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$

따라서 $f(2)=6-12+15=9$

2. 45

$f(0)=0$ 이므로

$f(x)=ax^2+bx\ (a\neq 0)$라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2|f(x)|dx=4$, $\int_0^2 f(x)dx=-4$

이므로 구간 $[0,2]$에서 $f(x)\leq 0$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3|f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$

이므로 구간 $[2,3]$에서 $f(x)\geq 0$이다.

따라서, $f(2)=0$ 이므로

$f(2)=4a+2b=0$

즉, $b=-2a$

$f(x)=ax^2-2ax$ 이므로

$\int_0^2(ax^2-2ax)dx=\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a=-4$

따라서, $a=3$

따라서, $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$f(5)=45$

3. ①

$f(x)$는 원점 대칭, $g(x)$는 y축 대칭함수이므로,

$h(x)$는 원점 대칭함수가 된다.

즉, $h(0)=0$

적분구간이 대칭하는 함수의 적분 방법에 의해

$\int_{-3}^{3}(xh'(x)+5h'(x))dx=2\int_0^3 5h'(x)dx$가 되므로

$=10(h(3)-h(0))=10$에서

$h(3)=h(0)+1=1$

4. ④

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a$이므로

$f(1)=2+4a$

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)dt$

즉, $0=3a-\int_0^1 f(t)dt$이므로

$\int_0^1 f(t)dt=3a$

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로

$2+4a=3a$

즉, $a=-2, f(1)=-6$

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서,

$f(x)=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

5. 5

$f(x)=-x^2-4x+a$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)$

$=-x^2-4x+a$

$=-(x+2)^2+a+4$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5\geq 0$

즉, $a\geq 5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

6. ②

$a=\int_0^1 |f(t)|dt$라 하면 $a>0$이고,

$f(x)=x^3-4ax$

$f(1)=1-4a>0$에서 $a<\frac{1}{4}$

따라서 $0<a<\frac{1}{4}$이다.

$f(x)=x(x^2-4a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{a}$

$0<x<2\sqrt{a}$일 때 $f(x)<0$이고 $x\geq 2\sqrt{a}$일 때 $f(x)\geq 0$이다.

$0<a<\frac{1}{4}$에서 $2\sqrt{a}<1$이므로

$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$

$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^1(t^3-4at)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$

$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$

$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서

$32a^2-12a+1=0$, $(4a-1)(8a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$이므로 $a=\frac{1}{8}$이고

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$

이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times 2=7$

7. ①

조건 (나)에 의하여 $f(x)=ax^2+b$라 하면

$f(0)=-2$이므로 $b=-2$

$f(x)=ax^2-2$, $f'(x)=2ax$

$f(f'(x))=f'(f(x))$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$이다.

$F(x)$가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x)<0$

즉, $f(x)<0$을 만족하는 구간이므로

$\frac{1}{2}x^2-2<0$, $-2<x<2$

∴ 감소하는 구간의 길이는 4

8. 10

$\int_1^4(x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3(x+|x-3|)dx+\int_3^4(x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3(x-(x-3))dx+\int_3^4(x+(x-3))dx$

$=\int_1^3 3dx+\int_3^4(2x-3)dx$

$=[3x]_1^3+[x^2-3x]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=10$

9. ⑤

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수)라 하면

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$

이고 k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^3 x^k dx=0$이므로

$\int_{-3}^{3} f(-x)dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx$

조건 (가)에 의하여

$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로

$a=0$

조건 (나)에 의하여 $f(0)+f(0)=-2=b$

그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$

$\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}f(-x)dx$

$=2\int_{-3}^{3}f(x)dx$

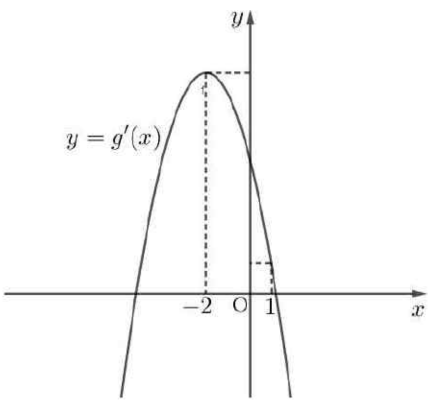
따라서 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx=21$

10. 5

$f(x)=-x^2-4x+a$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$



함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5\geqq 0$

즉, $a\geqq 5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

11. 29

(가)와 (나)에서

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$

$=\frac{8}{3}$

(나)와 (다)에서 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이고 주기가 2인 함수이므로

$\int_{-n}^{n}f(x)dx=n\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{8}{3}n$

따라서 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n}f(x)dx=\frac{8}{3}n$

위의 식에 $n=6$과 $n=7$을 각각 대입하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+6a_6=\frac{48}{3}=16$ ……㉠

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+6a_6+7a_7=\frac{56}{3}$ ……㉡

㉡ - ㉠을 하면

$7a_7=\frac{8}{3}$

$\therefore a_7=\frac{8}{21}$

$\therefore p=21$, $q=8$, $p+q=29$

12. 13

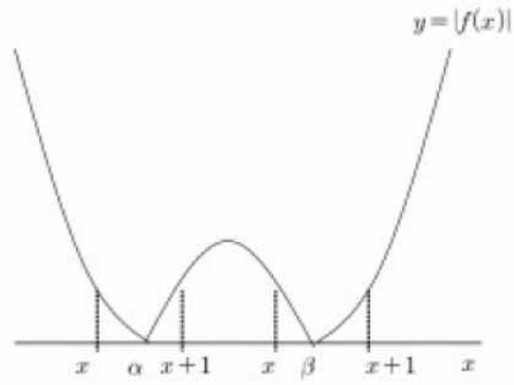
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{x+1}f(t)dt$

이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다. 따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고 $x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ … ㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$= \int_{\beta}^{x} f(t)dt + \int_{\beta}^{x+1} f(t)dt$

$= \int_{\beta}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_{\beta}^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$= \int_{\beta}^{x} 2(t-\alpha)(t-\beta)dt + \int_{\beta-1}^{x} 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(4) = 2(4-\alpha)(4-\beta) + 2(5-\alpha)(5-\beta)$

$= 82 - 18\alpha - 18\beta + 4\alpha\beta = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha\beta = \dfrac{13}{2}$이므로

$f(0) = 2\alpha\beta = 13$

13. ⑤

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{x^2+1}{x}\int_{1}^{x+1} f(t)dt\right\}$

$= \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+1}{x}\{F(x+1)-F(1)\}\right]$

$= \lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\dfrac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$

$= \lim_{x\to 0}(x^2+1)\times\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x+1)-F(1)}{x}$

$= (0+1)\times F'(1)$

$= 1\times f(1)$

$= f(1) = 3$

$f(x) = a\cos(\pi x^2)$에서

$f(1) = a\cos\pi = -a = 3$이므로

$a = -3$이고 $f(x) = -3\cos(\pi x^2)$

따라서

$f(a) = f(-3) = -3\cos(9\pi) = -3\times(-1) = 3$

14. ②

조건 (가)에서

$f(x)g(x) = x^4 - 1$이므로

$f(1)g(1) = 0$, $f(-1)g(-1) = 0$

또, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 \cdots\cdots$ ㉠

한편, $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx$에서

$u(x) = \{f(x)\}^2$, $v'(x) = g'(x)$로 놓으면

$u'(x) = 2f(x)f'(x)$, $v(x) = g(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx$

$= \left[\{f(x)\}^2 g(x)\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} f(x)f'(x)g(x)dx$

$= 0 - 2\int_{-1}^{1} f(x)f'(x)g(x)dx$

조건 (나)에서

$\int_{-1}^{1} f(x)f'(x)g(x)dx = -60$

㉠에서

$\int_{-1}^{1}\{f(x)(4x^3 - f(x)g'(x))\}dx = -60$

$4\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx - \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx = -60$

$4\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx - 120 = -60$

따라서

$4\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx = 60$

이므로

$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)dx = 15$

15. ③

조건 (가)에서

$f(x) + f(-x) = 0$, 즉 $f(x) = -f(-x)$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

$= \int_{1}^{3} f(x)dx$

이므로

$\int_{1}^{3} f(x)dx = 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (다)에서

$\int_{-5}^{-1} f(x)dx = -\int_{1}^{5} f(x)dx$이므로

$\int_{1}^{5} f(x)dx = 8 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\int_{1}^{5} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx = 6$

$\int_{3}^{5} f(x)dx = 6$

따라서

$\int_{-3}^{5}\{8x + f(x)\}dx$

$= \int_{-3}^{3}\{8x + f(x)\}dx + \int_{3}^{5}\{8x + f(x)\}dx$

$= 0 + \int_{3}^{5} 8x dx + \int_{3}^{5} f(x)dx$

$= \left[4x^2\right]_{3}^{5} + 6$

$= 64 + 6$

$= 70$

16. 7

조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1)+\frac{x-1}{2}f'(x)$

즉,

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 좌편인 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)

라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은

$x\times anx^{n-1}=anx^n$

이므로 $ax^n=anx^n$에서 $n=1$

이때 $f(0)=1$이므로 일차함수 $f(x)$는

$f(x)=ax+1$

로 놓을 수 있다.

이때

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax+1)dx=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2$

이고,

$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^2+x)dx=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}$

이므로 조건 (나)에서

$2a+2=5\times\frac{2a}{3}$

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$f(4)=\frac{3}{2}\times4+1=7$

17. 40

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=(x-3)(x-a)\ =x^2-(a+3)x+3a$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$에서

$\int_0^3 f(x)dx=0$ ⋯⋯ ㉠이므로

$\int_0^3 \{x^2-(a+3)x+3a\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3$

$=9-\frac{9}{2}a-\frac{27}{2}+9a=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$

$\therefore\ a=1$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$이므로

$S=\left|\int_1^3 (x^2-4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\right|$

$=\left|(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 30S=30\times\frac{4}{3}=40$

18. ③

$\int_0^1 g(t)dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1 (t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)dt=a$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

19. ①

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx$이면

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=0$

따라서 $f(x)=ax^2-1$로 놓으면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^2-1)dx=\frac{a}{3}-1=0\quad\therefore\ a=3$

$\therefore\ f(x)=3x^2-1$, $f(2)=12-1=11$

20. ②

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$

$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

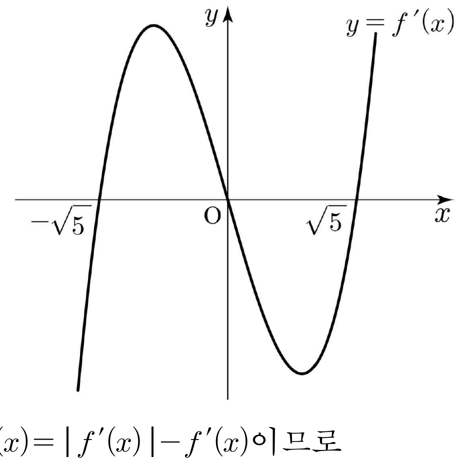
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$f(0)=9$, $C=9$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

$\alpha=-\sqrt{5}$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

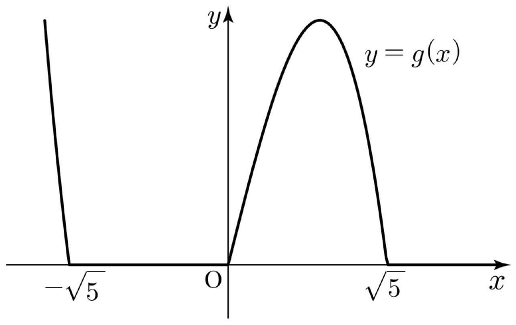


함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로

함수

$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_0^{10} g(x)\,dx=-2\int_0^{\sqrt{5}} f'(x)\,dx$

$=-2\Big[f(x)\Big]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$

$=-2\times(-16-9)=50$

21. 40

$\int_0^1 f(t)dt=1-2-2\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=-\dfrac{1}{3}$

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\dfrac{2}{3}x$

$f(x)=3x^2-4x+\dfrac{2}{3}$

$\therefore 60a=40$

22. ①

함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(\sqrt{2})=f'(-\sqrt{2})=0$이므로

$f'(x)=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$=kx(x^2-2)=kx^3-2kx$ (단, k는 상수)

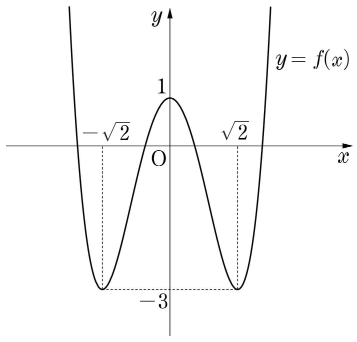
$f(x)=\dfrac{k}{4}x^4-kx^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$

$f(\sqrt{2})=k-2k+C=-k+1=-3$이므로 $k=4$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-2)=f(2)=1>0$,

$f(-1)=f(1)=-2<0$이므로

$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수는

-2, -1, 0, 1이다.

따라서 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은 -2

23. ③

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1(t^2+2at+C)dt=\dfrac{2}{3}$

$C-\left(\dfrac{1}{3}+a+C\right)=\dfrac{2}{3}$에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$에서 $\left[\dfrac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\dfrac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\dfrac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4}{3}$

24. ⑤

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2$에서 $a=1$

한편, $\dfrac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로

$\int_1^x\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_1^x f'(t)dt=[f(t)]_1^x=f(x)-f(1)$

이때 $\int_1^x\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$ 에서

$f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$

따라서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로

$f'(a)=f'(1)=3+2=5$

25. 66

$g(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$

$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$

$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$

$x\geq 0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}dx$

$=\int_0^p(x^3+3px^2)dx$

$=\left[\dfrac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\dfrac{5}{4}p^4=20$

$p>0$이므로 $p=2$이고, $f(x)=x^3-12x+1$

따라서 $f(5)=66$

26. ②

$\int_0^1 f(x)dx=a$ 라 하면, $f(x)=\frac{3}{4}x^2+a^2$

$a=\int_0^1\left(\frac{3}{4}x^2+a^2\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^3+a^2x\right]_0^1=a^2+\frac{1}{4}$

$a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=0$, $a=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^2=\frac{5}{2}$

27. 110

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$ 에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이므로 $b=1$

또, $f(x+1)=xf(x)+ax+1$이므로

$0\le x\le 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$=t^2+(a-2)t+2-a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\le x\le 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$이다.

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}$

$=\frac{11}{6}$

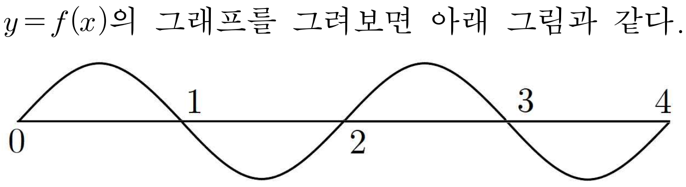
즉, $60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}$

$=110$

28. ②

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는 $f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$이므로

주어진 조건에 따라 최소가 $x=2$에서 0이 되도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



$\int_0^1 f(x)dx=\frac{6}{6}(1-0)^3=1$

$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

29. ④

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a>0)$이므로

$x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가진다.

$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx$

$=\int a(x^2-1)dx=a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=3$, $C=2$이므로 $f(x)=x^3-3x+2$이다.

따라서 $f(3)=20$

30. 8

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(i) $a\neq 3$, $a\neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$