P PL

M ATH

L AB

주간지

4주차

사인 법칙과 코사인 법칙

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

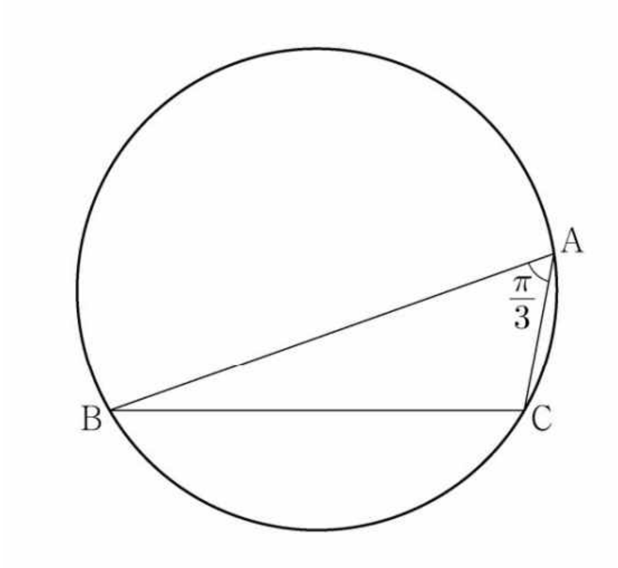
PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

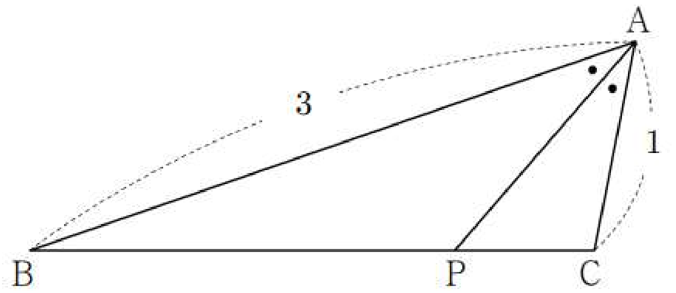
1. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때,
선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



[2021학년도 대수능 공통 10번]

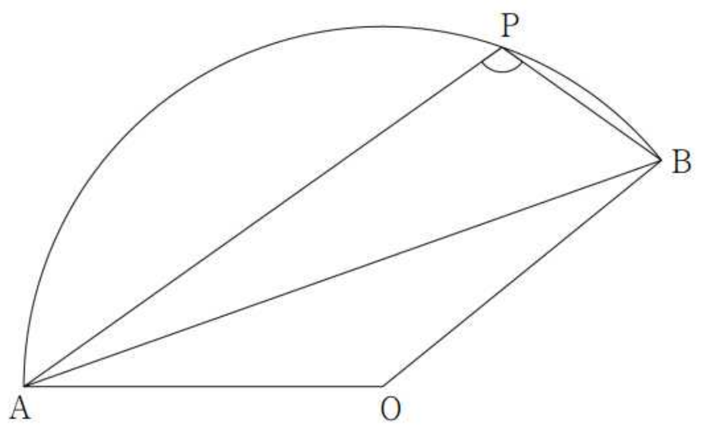
2. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{5}{16}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$ ④ $\frac{7}{16}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[2022학년도 고2 6월 15번]

3. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{AB}=8\sqrt{2}$이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle BPA > 90°$, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$일 때, 선분 BP의 길이는? [4점]



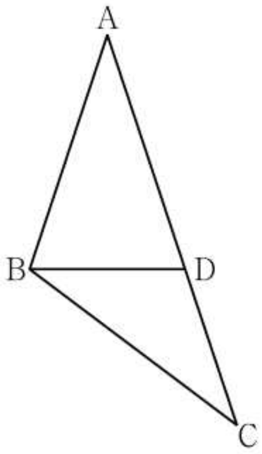
① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

[2023학년도 고2 9월 14번]

4. $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

[2022학년도 고3 4월 20번]

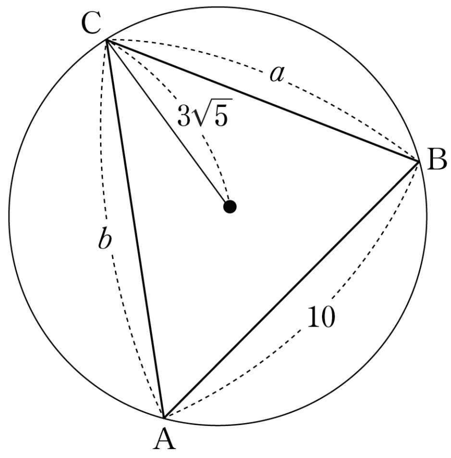
5. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]



[2021학년도 9월 나형 25번]

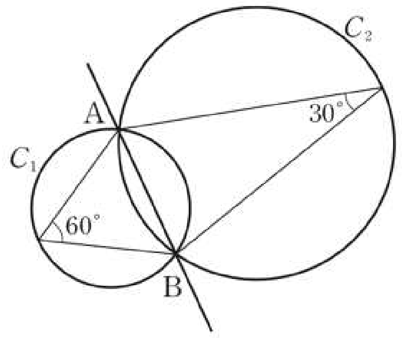
6. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은? [4점]

① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



[2021학년도 고3 3월 나형 19번]

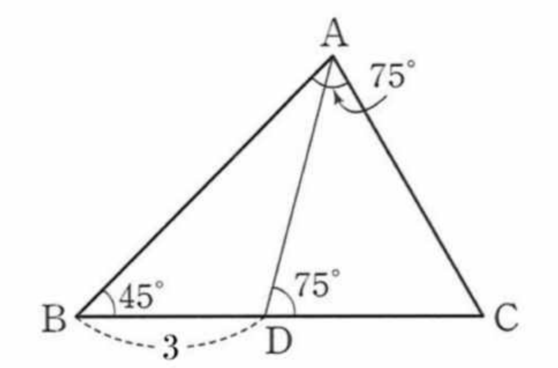
7. 두 원 C_1, C_2가 그림과 같이 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이는 12이고, 그에 대한 원주각의 크기는 각각 $60°, 30°$이다. 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라고 할 때, $R_1^2+R_2^2$의 값을 구하시오. [4점]



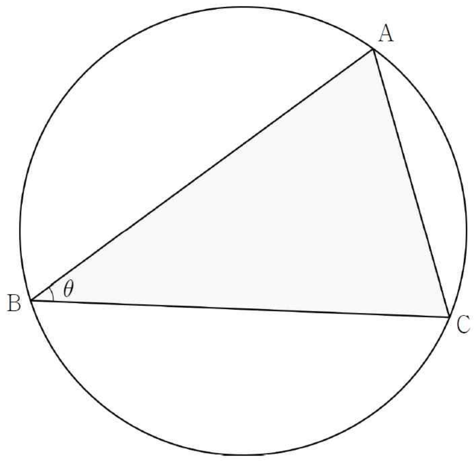
[2005 고2 6월 가형 28번]

8. $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=16$인 삼각형 ABC의 외심을 O라 하자. 삼각형 OAC의 넓이가 120일 때, 선분 BC의 길이는 a이다. 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합이 $\frac{m}{17}$일 때 m을 구하시오. [4점]

9. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=3$이고, $\angle ABC=45^\circ$, $\angle BAC=\angle ADC=75^\circ$이다. $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{DC}=k\sqrt{2}+l\sqrt{3}+m\sqrt{6}$일 때, $k+l+m$을 구하시오.
[4점]



10. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하고 변 AC의 길이가 5인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점]

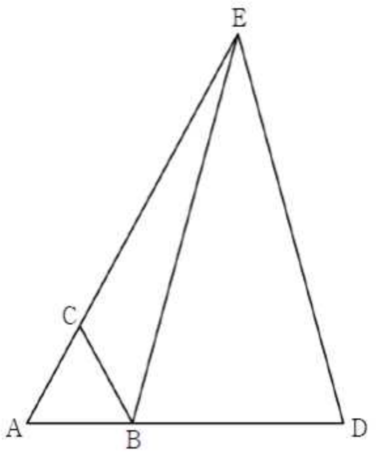


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$　⑤ $\frac{3}{4}$

[2021학년도 고3 4월 나형 13번]

STEP 2

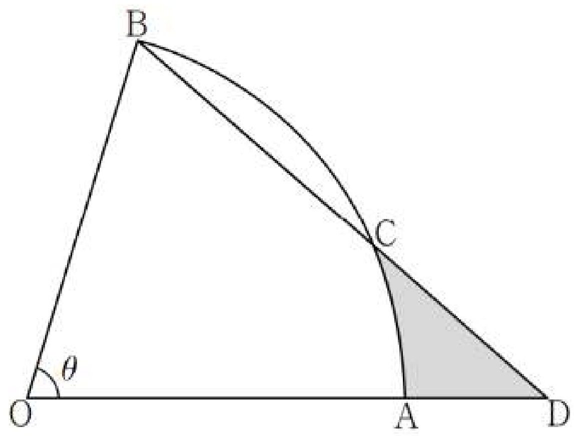
11. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형ABC에서 선분 AB의 연장선과 선분 AC의 연장선 위에 $\overline{AD}=\overline{CE}$가 되도록 하는 두 점 D,E를 잡는다. $\overline{DE}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BDE의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{6}$
② $2\sqrt{2}$
③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$
⑤ $\sqrt{14}$

[2020년 고2 9월 16번]

12. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하고, 직선 OA와 직선 BC가 만나는 점을 D이라 하자. 다음은 두 선분 AD,CD와 호 AC가 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다. (단, $0<\theta<\frac{3}{4}\pi$)



점 C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로

$\angle BOC=\boxed{(가)}$

이다. 또한, 삼각형 BOC에서

$\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}(\pi-\boxed{(가)})$

이다. 한편, 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{OD}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{3}}{\boxed{(나)}}$

이다. $S(\theta)$는 삼각형 COD의 넓이에서 부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\dfrac{\cos\frac{\theta}{3}}{\boxed{(나)}}\times\sin\frac{\theta}{3}-\boxed{(다)}$

이다.

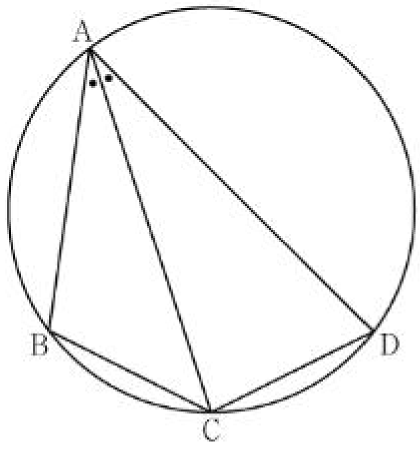
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$라 할 때, $\dfrac{f(\frac{\pi}{2})\times g(\frac{\pi}{4})}{h(\frac{\pi}{8})}$의 값은? [4점]

① $8\sqrt{3}$
② $\frac{17\sqrt{3}}{2}$
③ $9\sqrt{3}$
④ $\frac{19\sqrt{3}}{2}$
⑤ $10\sqrt{3}$

[2022년 고2 6월 19번]

13. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

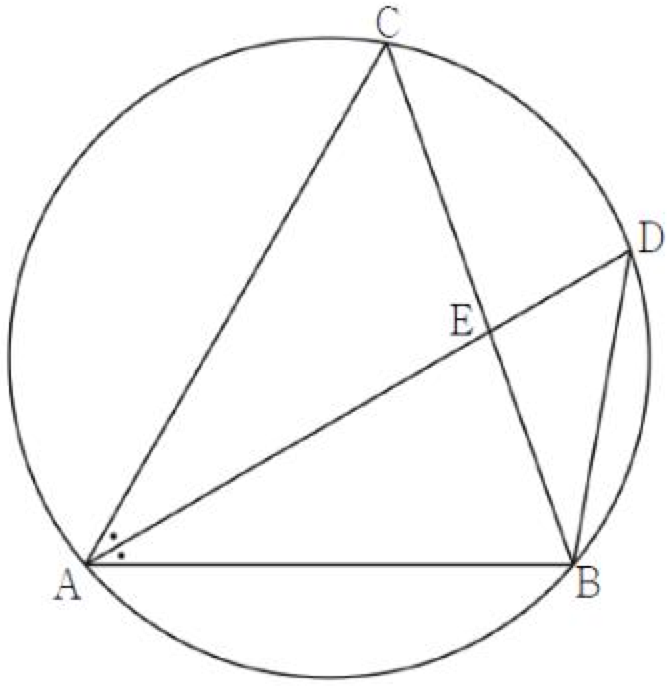
$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

[2023학년도 대수능 11번]

14. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 C에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC$의 이등분선이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 두 선분 BC, AD의 교점을 E이라 하자. $\overline{BD}=\sqrt{3}$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $\sin(\angle DBE)=\frac{1}{2}$

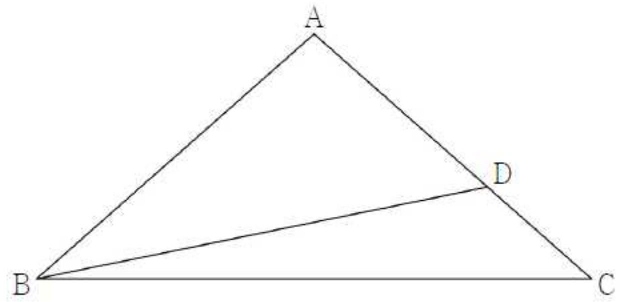
ㄴ. $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}\times\overline{AC}+9$

ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이가 4배가 되도록 하는 모든 $\overline{BE}$의 값의 합은 $\frac{9}{4}$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2022년 고2 11월 20번]

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.
$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은? [4점]



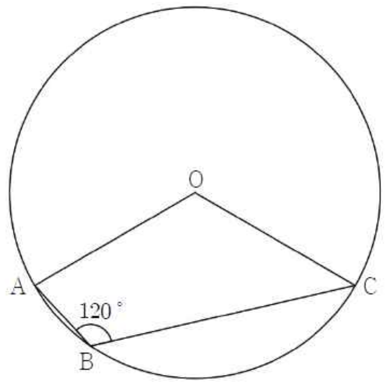
① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[2021학년도 사관학교 나형 19번]

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC=120^\circ,\ \overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



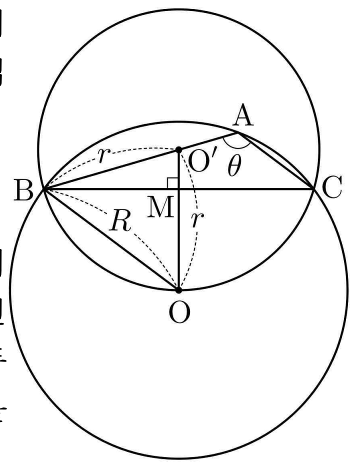
① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

[2021학년도 사관학교 가형 15번]

17. $\angle \mathrm{BAC}=\theta\left(\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{3}{4}\pi\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O$'$이라 하자. 다음은 점 O$'$이 선분 AB 위에 있을 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값은 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$$



세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 선분 OO$'$는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면

$$\overline{\mathrm{O'M}}=r-\overline{\mathrm{OM}}$$
$$=r-|R\cos\theta|$$

직각삼각형 O$'$BM에서

$$R=\boxed{\text{(가)}}\times r$$

이므로

$$\sin(\angle \mathrm{O'BM})=\boxed{\text{(나)}}$$

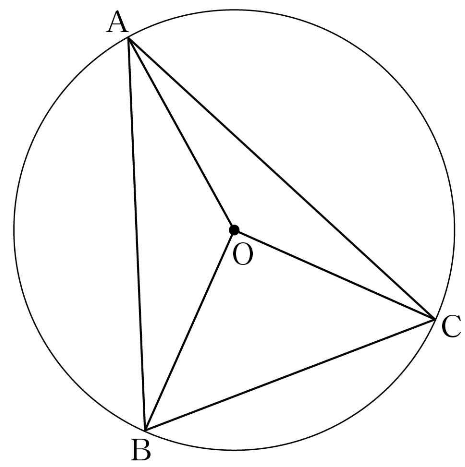
따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[2021학년도 사관학교 21번]

18. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



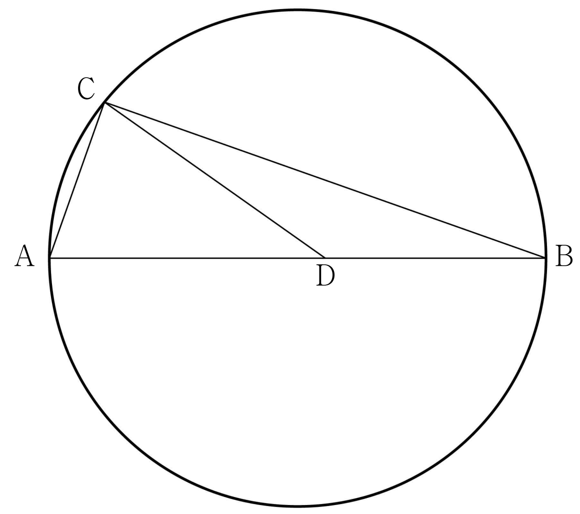
① $2\sqrt{7}$　② $\sqrt{30}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $\sqrt{34}$　⑤ 6

[2020학년도 고3 3월 가형 19번]

19. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

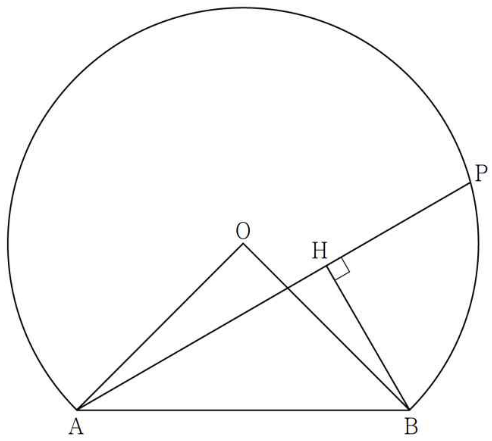
$$\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



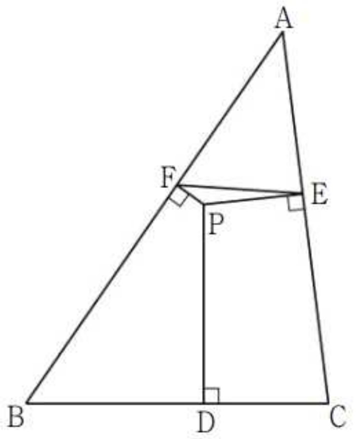
[2021학년도 고3 7월 가형 20번]

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}^2$의 값은 $m+n\sqrt{3}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [4점]



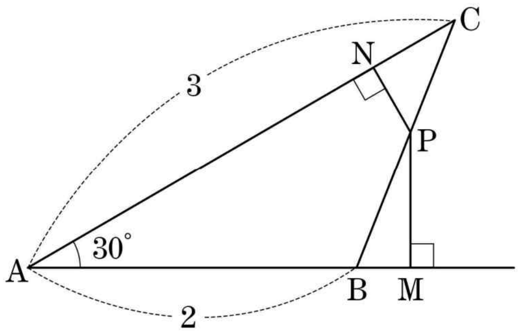
[2021학년도 고2 9월 27번]

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$일 때, 삼각형 EFP의 넓이는 $\dfrac{p}{q}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



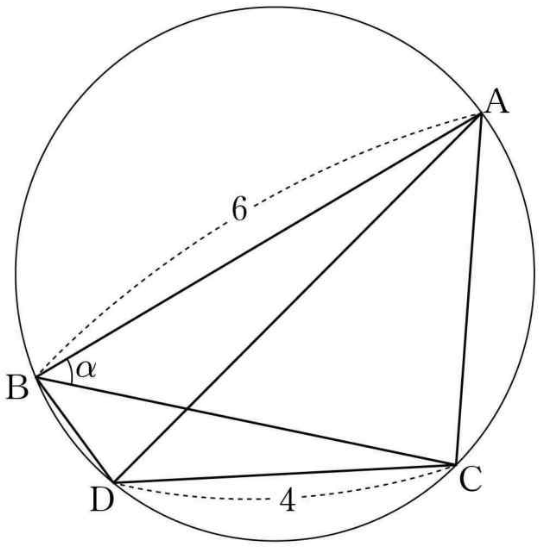
[2013학년도 고2 3월 30번]

22. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$, $A=30°$인 삼각형 ABC의 변 BC위의 점 P에서 두 직선 AB, AC위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



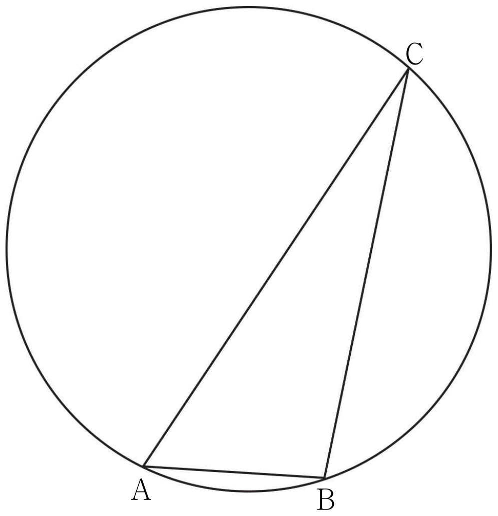
[2015학년도 고2 3월 A형 30번]

23. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1:S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S의 값을 구하시오. [4점]



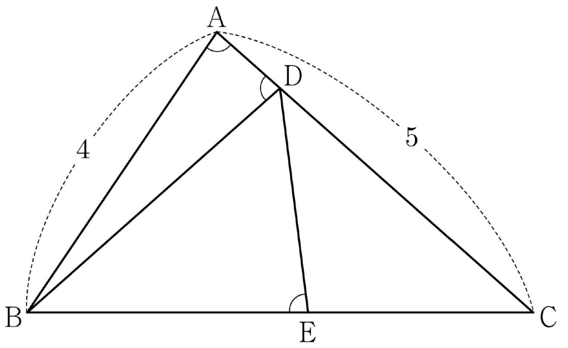
[2019학년도 고3 3월 나형 29번]

24. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



[2021학년도 고3 4월 가형 19번]

25. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BED}$ 일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



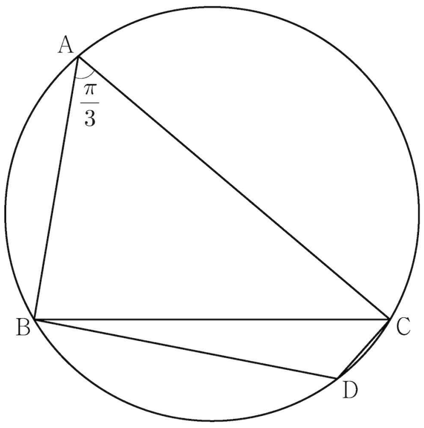
① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

[2022학년도 6월 12번]

26. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?

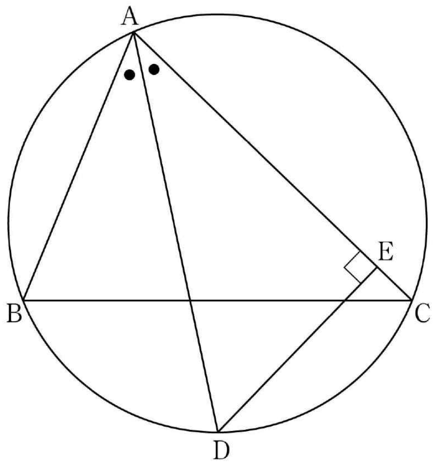
[4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



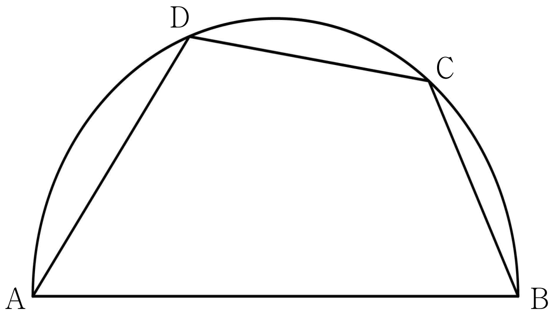
[2022학년도 9월 12번]

27. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



[2022학년도 고3 10월 21번]

28. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

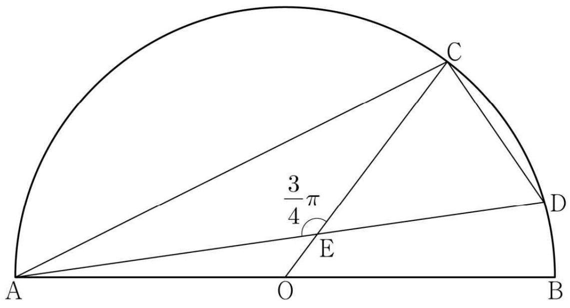
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2023학년도 고3 7월 14번]

29. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

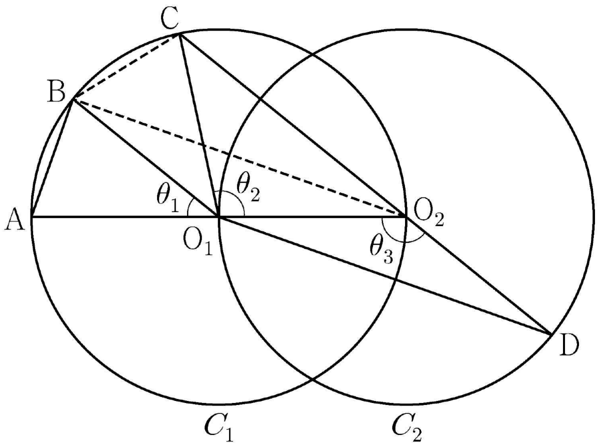
이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[2023학년도 9월 13번]

30. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때,
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{\text{(가)}}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{\text{(다)}}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{\text{(가)}}}{2}+\boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

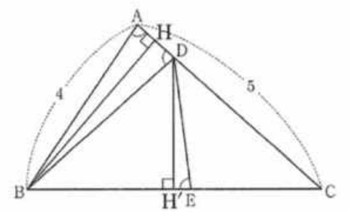
① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$
④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

[2022학년도 대수능 15번]

빠른 정답					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	②	11번	④	21번	103
2번	④	12번	①	22번	28
3번	⑤	13번	①	23번	63
4번	7	14번	⑤	24번	④
5번	41	15번	③	25번	③
6번	②	16번	③	26번	②
7번	192	17번	27	27번	84
8번	900	18번	③	28번	⑤
9번	11	19번	27	29번	⑤
10번	④	20번	20	30번	②

정답 및 해설

1. ②



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로
사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times7$

$\overline{BC}=7\sqrt{3}$ … ㉠

한편, $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로

$\overline{AC}=k$ $(k>0)$이라 치면 $\overline{AB}=3k$

이때

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{9k^2+k^2-2\times3k\times k\times\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{7k^2}$

$=\sqrt{7}k$ … ㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$

$k=\sqrt{21}$

따라서

$\overline{AC}=k=\sqrt{21}$

2. ④

선분 AP가 $\angle BAC$의 이등분선이고

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로 $\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$이다.

$\overline{PC}=k$라 하면 $\overline{BP}=3k$이다.

삼각형 BAC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\dfrac{3^2+1^2-(4k)^2}{2\times3\times1}$에서 $k>0$이므로

$k=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이다.

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여

$\dfrac{k}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$이므로 $R=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는 $\dfrac{7}{16}\pi$

3. ⑤

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이 R는
부채꼴 OAB의 반지름의 길이와 같으므로

$R=6$

$\angle BPA=\theta$ $\left(\theta>\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\sin\theta = \dfrac{8\sqrt{2}}{2\times 6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta = 1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

$\theta > \dfrac{\pi}{2}$일 때, $\cos\theta < 0$이므로 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

$\overline{BP}=k$라 하면, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$ 이므로 $\overline{AP}=3k$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$(3k)^2+k^2-2\times 3k\times k\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=(8\sqrt{2})^2$

$9k^2+k^2+2k^2=128$, $k^2=\dfrac{32}{3}$

따라서 선분 BP의 길이는 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

4. 7

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$에서

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 k, $2k$, $\sqrt{2}k(k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$2k^2=k^2+4k^2-4k^2\cos(\angle ABC)$

$4k^2\cos(\angle ABC)=3k^2$

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{CA}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

5. 41

삼각형 ABD에서

$\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$

이므로 $\angle BAD=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=\dfrac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times 6\times 6}=\dfrac{19}{24}$

따라서 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} k^2 &= \overline{BC}^2 \\ &= 6^2+10^2-2\times 6\times 10\times\cos\theta \\ &= 36+100-120\times\frac{19}{24} \\ &= 136-5\times 19 \\ &= 41 \end{aligned}$$

6. ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{10}{\sin C}=2\times 3\sqrt{5}$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}a^2$,

$100=\dfrac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

7. 192

공통현 AB를 기준으로 사인법칙을 적용하면,

$\overline{AB}=2R_1\sin 60^\circ$에서, $R_1=4\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2R_2\sin 30^\circ$에서, $R_2=12$

$\therefore R_1^2+R_2^2=192$

8. 900

삼각형 OBC에서, 외심O에서 선분BC에 수선을 내려 수선의 발을 H라 하자. $\overline{HC}=8$이고, $\triangle OBC=120$이므로, $\overline{OH}=15$

원주각의 성질을 이용하여, $\angle COH=\angle ABC$이므로 $\angle COH=\angle ABC=\theta$라 할 때,

삼각형 OBC에서 $\cos\theta=\dfrac{15}{17}$

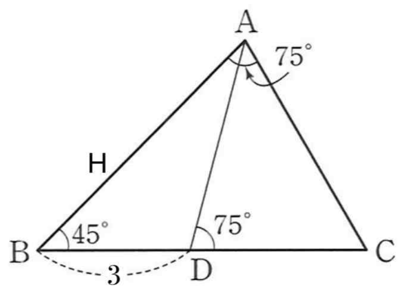
삼각형 ABC에서, 코사인 법칙을 사용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구하자. $\overline{BC}=a$일 때, $a^2+30^2-60a\cos\theta=16^2$

$a^2-(60\cos\theta)a+(30+16)(30-16)=0$

$a^2-\dfrac{900}{17}a+644=0$이므로, 근과 계수의 관계에 의하여

$\therefore m=900$

9. 11



$\angle C=60^\circ$, $\angle DAC=45^\circ$, $\angle BAD=30^\circ$이고, $\triangle ABD$에서 외접원의 반지름을 R_1이라 하여 사인법칙을 이용하면,

$\overline{BD}=2R_1\sin 30^\circ$에서, $3=R_1$이고, $\overline{AD}=2R_1\sin 45^\circ=3\sqrt{2}$

$\triangle$ADC에서 외접원의 반지름을 R_2이라 하여 사인법칙을 이용하면, $\overline{AD}=2R_2\sin 60^\circ=3\sqrt{2}$, $R_2=\sqrt{6}$,

$\overline{DC}=2R_2\sin 45^\circ=2\sqrt{3}$

점D에서 $\overline{AB}$에 수선을 그어, 특수각의 삼각비를 이용하면

$\overline{AB}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{DC}=k\sqrt{2}+l\sqrt{3}+m\sqrt{6}$에서,

$\therefore k+l+m=3+2+\dfrac{3}{2}\times 2=11$

10. ④

사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin\theta}=2\times 4$

$\sin\theta=\dfrac{5}{8}$

11. ④

$\overline{AD}=\overline{CE}=a(a>0)$이라 하면

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2a(a+1)\cos\dfrac{\pi}{3}$

$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$, $a=3$

($\triangle$ADE의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

($\triangle$ABE의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times 4\times 1\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서

($\triangle$BDE의 넓이) $=$($\triangle$ADE의 넓이)$-$($\triangle$ABE의 넓이)

$=2\sqrt{3}$

12. ①

점C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로

$\angle BOC=\boxed{\dfrac{2}{3}\theta}$이다.

또한, 삼각형 BOC에서

$\angle OBC=\angle OCB=\dfrac{1}{2}(\pi-\boxed{\dfrac{2}{3}\theta})$이다.

한편, 삼각형 BOD에서

$\angle BDO=\pi-\theta-(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3})=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\theta}{3}$이다.

따라서 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OD}}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3})}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\theta}{3})}$

$\overline{OD}=\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2\theta}{3}}}$이다.

한편, 부채꼴 OAC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{\theta}{6}$이다.

$S(\theta)$는 삼각형 COD의 넓이에서 부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2\theta}{3}}}\times\sin\dfrac{\theta}{3}-\boxed{\dfrac{\theta}{6}}$이다.

따라서 $f(\theta)=\dfrac{2}{3}\theta$, $g(\theta)=\cos\dfrac{2}{3}\theta$, $h(\theta)=\dfrac{\theta}{6}$이므로

$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{3}$, $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h(\dfrac{\pi}{8})=\dfrac{\pi}{48}$이다.

그러므로 $\dfrac{f(\dfrac{\pi}{2})\times g(\dfrac{\pi}{4})}{h(\dfrac{\pi}{8})}=8\sqrt{3}$

13. ①

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=25+45-2\times 5\times 3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$

또 삼각형 ACD에서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=49+45-2\times 7\times 3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로

$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=10$

즉, $\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편,

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(\dfrac{2\sqrt{5}}{5})^2=\dfrac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$

$\dfrac{\sqrt{10}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=2R$

$5\sqrt{2}=2R$

즉, $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

14. ⑤

$\angle DAC=\angle BAD=\theta$라 하면

두 각 $\angle DAC$, $\angle DBC$가 모두 호 CD에 대한 원주각이므로

$\angle DBC=\theta$

ㄱ. 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2\sqrt{3}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin(\angle DBE)=\sin(\angle DBC)=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $0<\angle BAC=2\theta<\pi$에서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고

$\sin\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\angle\mathrm{BAC}=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}+9\cdots\cdots(*)$ (참)

ㄷ.

$\overline{\mathrm{BE}}=a(0<a<3)$이라 하면

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BE}}=3-a$

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{EAC}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=a:(3-a)$

양수 k에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=ak$, $\overline{\mathrm{AC}}=(3-a)k$라 하면

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}-a(3-a)k^2}{4}$이고

삼각형 BDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}-a}{4}$

삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이의 4배이어야 하므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a(3-a)k^2=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a$

$(3-a)k^2=4\cdots\cdots(**)$

$(*)$에 의하여

$(ak)^2+(3-a)k^2=(ak)(3-a)k+9$

$k^2(a^2-3a+3)=3$

$(3-a)k^2(a^2-3a+3)=3(3-a)$

위 식에 $(**)$를 대입하면

$4(a^2-3a+3)=3(3-a)$

$4a^2-9a+3=0$에서

$a=\frac{9+\sqrt{33}}{8}$ 또는 $a=\frac{9-\sqrt{33}}{8}$

그러므로 모든 a값의 합은 $\frac{9}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. ③

사인법칙에 의하여

$\sin C=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{DBC})}{\overline{\mathrm{DC}}}$,

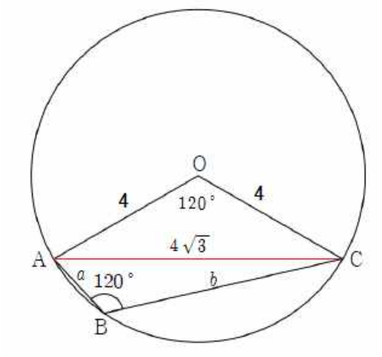
$\sin A=\frac{\overline{\mathrm{BD}}\times\sin(\angle\mathrm{ABD})}{\overline{\mathrm{AD}}}$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=5:3$이고

$\sin(\angle\mathrm{ABD}):\sin(\angle\mathrm{DBC})=5:2$ 이므로

$\frac{\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$

16. ③



사인법칙에서 $\overline{\mathrm{AC}}=8\times\sin120^\circ=4\sqrt{3}$

코사인법칙에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$

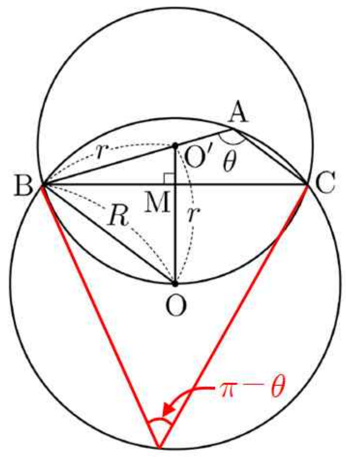
$\quad=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$

$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$

구하는 넓이는

$\frac{1}{2}(4\times4+ab)\sin120^\circ=7\sqrt{3}$

17. 27



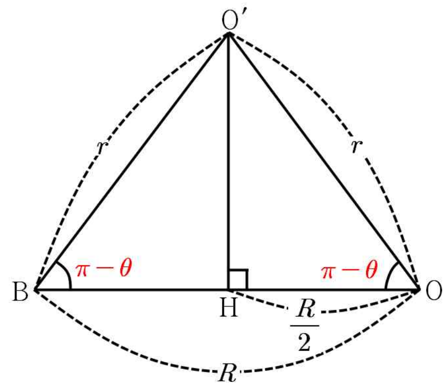
□BACQ는 원 위에 내접하는 사각형이므로 $\angle\mathrm{BQC}=\pi-\theta$

$\angle\mathrm{BQC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$의 원주각이고 $\angle\mathrm{BOC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$의 중심각이므로

$\angle\mathrm{BOC}=2\pi-2\theta$

$\triangle\mathrm{BOM}\equiv\triangle\mathrm{COM}$이므로 $\angle\mathrm{O'OB}=\pi-\theta$이고 $\angle\mathrm{BO'O}=2\theta-\pi$이다.

(i)



$\triangle\mathrm{O'BO}$는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{O'BO}=\angle\mathrm{O'OB}=\pi-\theta$

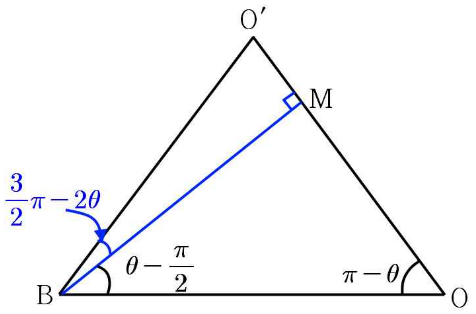
점 O′에서 $\overline{\mathrm{BO}}$에 수선을 긋고, 수선의 발을 H라고 하면
△O′OH에서

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\frac{R}{2}}{r},\quad -\cos\theta=\frac{\frac{R}{2}}{r},\quad \frac{R}{2}=-r\cos\theta$$

∴ $R=-2\cos\theta r$

따라서 (가)는 $-2\cos\theta$ ⋯ ㉠

(ii)



△BO′M에서

$\angle \mathrm{O'BM}+\angle \mathrm{BMO'}+\angle \mathrm{MO'B}=\pi$

$\angle \mathrm{O'BM}+\frac{\pi}{2}+2\theta-\pi=\pi$

$\angle \mathrm{O'BM}=\frac{3}{2}\pi-2\theta$

△O′BM에서

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\theta\right)=-\cos2\theta$

따라서 (나)는 $-\cos2\theta$ ⋯ ㉡

(iii) △ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{O'BM})},\quad \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$$

따라서 (다)는 $\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$ ⋯ ㉢

즉, ㉠, ㉡, ㉢에서

$f(\theta)=-2\cos\theta$, $g(\theta)=-\cos2\theta$, $h(\theta)=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

그런데, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2$

$=\frac{6}{5}+1-2\times\frac{2}{5}+3$

$=\frac{22}{5}$

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{22}{5}$에서 $p=5$, $q=22$이므로

$p+q=2+5=27$

18. ③

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 OBC는 직각이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{BOC}=\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle \mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle \mathrm{AOC}=\beta$라 하면

두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2는 각각

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\overline{\mathrm{OA}})^2+(\overline{\mathrm{OB}})^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\alpha}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=4\sqrt{2}$

19. 27

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로
삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$이므로

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=18$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=6$

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DC}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$

$\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

따라서 $\frac{S}{\pi}=27$

20. 20

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$ 삼각형 OAM에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\angle \mathrm{OAM}=\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2}$ 삼각형 BHM에서

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABH}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 BHM은 정삼각

형 따라서 $\overline{\mathrm{HM}}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{BMH}=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 OMH에서 $\angle\mathrm{OMH}=\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{HM}}=\sqrt{2}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=4-2\sqrt{3}$

$m=4,\ n=-2$따라서 $m^2+n^2=20$

21. 103

함수 $\cos A=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$이므로 $\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이다.

$\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times6\times5\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

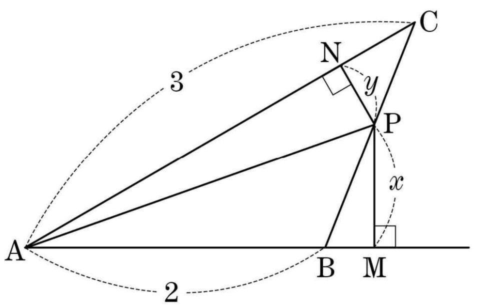
$\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면

$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{2}\left(6x+4\sqrt{7}+\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\right)$ $\qquad\therefore x=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

$\triangle\mathrm{EFP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{6}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin(\pi-\mathrm{A})=\dfrac{7\sqrt{7}}{96}$

$\therefore p+q=103$

22. 28



$\overline{\mathrm{PM}}=x$, $\overline{\mathrm{PN}}=\mathrm{y}$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{APC}$에서

$\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\times2\times x+\dfrac{1}{2}\times3\times y$

$\therefore 2x+3y=3$

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$에서

$3\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\right)$

$=13+\dfrac{6x}{y}+\dfrac{6y}{x}$

$\geq13+2\sqrt{\dfrac{6x}{y}\times\dfrac{6y}{x}}=25$

(단, 등호는 $x=y=\dfrac{3}{5}$일 때 성립한다.)

따라서 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\geq\dfrac{25}{3}$이므로 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$이다.

$\therefore p+q=3+25=28$

23. 63

$\angle\mathrm{BAD}$와 $\angle\mathrm{BCD}$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다. $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{CB}}=\mathrm{b}$라 하면 삼각형 ABD의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2bsin\theta$

$S_1:S_2=9:5$이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$이므로 $a=6k,\ b=5k(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha\cdots\cdots$㉠

$\angle\mathrm{ABC}$와 $\angle\mathrm{ADC}$는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=1$이고 $\alpha=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

24. ④

원 C의 반제름의 길이를 R라하면 원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$이므로 $R^2\pi=\dfrac{49}{3}\pi$, $R=\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\mathrm{R}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\times\dfrac{7}{3}\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$a^2-3a-40=0,\ (a-8)(a+5)=0$

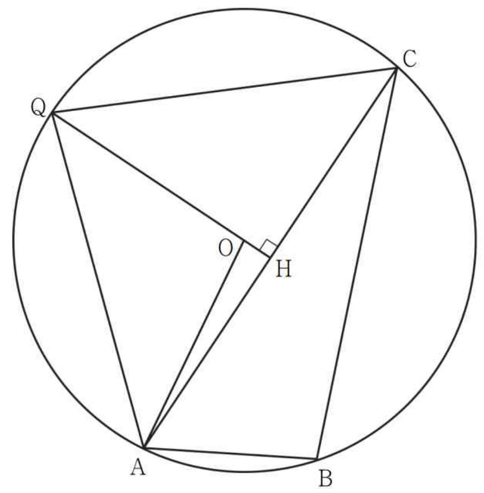
$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{\mathrm{AC}}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해

$\cos(\angle\mathrm{CBA})=\dfrac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\dfrac{1}{7}$이므로

$\dfrac{\pi}{2}<\angle\mathrm{CBA}<\pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다. 그림과 같이 점 Q는 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH위에 있다.



직각삼각형 AHO에서 $\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{OH}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

25. ③

삼각형 ABD에서

$\angle BAC=\angle BDA$이고 $\overline{AB}=4$이므로

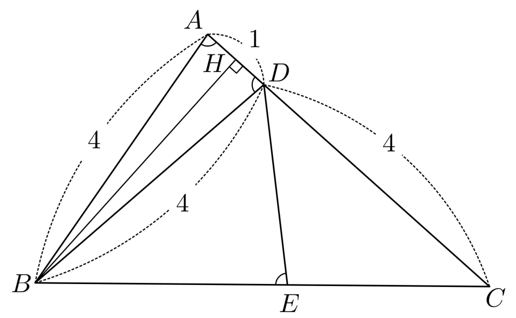
$\overline{BD}=4$ …… ㉠

이때 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{AB}\cos(\angle BAC)=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

그러므로

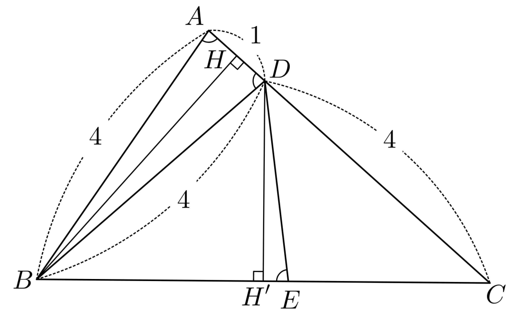
$\overline{AD}=1$



삼각형 BCD는 $\overline{DB}=\overline{DC}=4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{DE}=x$라 하면

$\overline{DH'}=x\sin(\angle H'ED)=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{63}}{8}x$ …… ㉡



한편, 삼각형 ABC에서

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$

$=36$

이므로

$\overline{BC}=6$

이때, $\overline{BH'}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$ …… ㉢

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$4^2=\left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2+3^2$

$\frac{63}{64}x^2=7$

$x^2=\frac{64}{9}$

$\overline{DE}=x$이므로 $x>0$

따라서 $\overline{DE}=\frac{8}{3}$

26. ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

27. 84

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle CBD=\angle CAD=\angle DAB=\angle DCB$이다.

즉, $\overline{BD}=\overline{DC}$

$\overline{BD}=\overline{DC}=a$, $\overline{AD}=b$, $\angle CAD=\theta$라 하면

$\angle DAB=\theta$이고 $\overline{BD}^2=\overline{DC}^2$이므로

삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면

$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$

$4b\cos\theta=28$이므로

직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$
따라서 $12k=84$

28. ⑤

ㄱ. $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\angle CBA)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle CBA)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle CBA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{AC}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{AD}=k\,(k>0)$이라 하면
삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times 7\times\cos(\pi-\theta)$
$=k^2+49+14k\cos\theta$
$=k^2+6k+49$
$k^2+6k-111=0$이므로
$\overline{AD}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다.
그러므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$
$\overline{AD}=x\,(x>0)$이라 하면
삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$
$=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$
$x^2=56$이므로 $\overline{AD}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

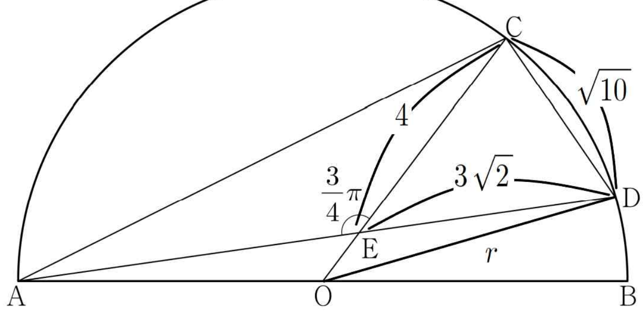
29. ⑤

삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{CD}^{\,2}=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\cos(\angle CED)$

$\quad=16+18-24\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$, $\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{10}$

원의 반지름을 r이라 할 때,



삼각형 OED에서 코사인 법칙에 따라

$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$r^2=r^2-8r+16+18+6(r-4)$, $10-2r=0$, $r=5$

삼각형 ACD에서 $\angle CAD=\theta$라 할 때, 사인법칙에 따라

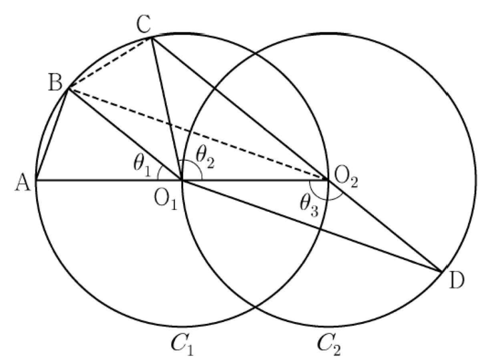
$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AEC에서

$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{4}{\sin\theta}$, $\overline{AC}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{40}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

30. ②



$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로

$\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

$\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때,

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 BO_2C에서

$\overline{O_2C}=x\,(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos\dfrac{\theta_1}{2}$

$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$

$(3x - 7k)(x - 3k) = 0$

$0 < x < 3k$이므로

$x = \dfrac{7}{3}k$

즉, $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = k : \left(\dfrac{\boxed{3k}}{2} + \boxed{\dfrac{7}{3}\mathrm{k}}\right)$이다.

이상에서

$f(k) = 3k$, $g(k) = \dfrac{7}{3}k$, $p = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p) \times g(p)$

$= \left(3 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \left(\dfrac{7}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$= \dfrac{56}{9}$