P PL
M ATH
L AB

주간지

3주차
도함수의 활용

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는
수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며
대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고
있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원
dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16
④ -15 ⑤ -14

[2022학년도 대수능 10번]

2. 두 함수 $y=-x^2+4$, $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 점 A$(2,\ 0)$에서 만나고, 점 A에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[2014학년도 사관학교 나형 4번]

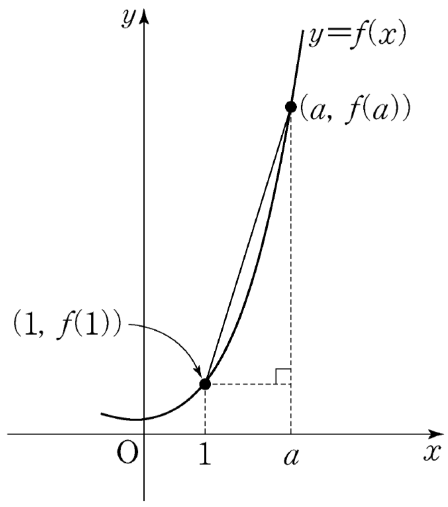
3.

함수 $f(x)=x^3=(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.

〔3점〕

[2011학년도 9월 가형 21번]

4. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은? 〔4점〕



① 1　② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

[2013학년도 6월 가형 16번]

5.

두 함수 $f(x)=3x^3-x^2-3x$, $g(x)=x^3-4x^2+9x+a$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[2016학년도 6월 A형 17번]

6. 함수

$$f(x)=|x^3-3x^2+p|$$

는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? [4점] (단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[2024학년도 고3 3월 9번]

7. 두 함수 $f(x)=2x^3-3x^2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 방정식 $(g \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2009학년도 사관학교 가형 12번]

8. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-5x^2+3x+n \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

[2022학년도 사관학교 18번]

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 3t^2 + at \quad (a\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도가 15일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

[2020학년도 고3 7월 나형 25번]

10. 함수 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15|x-2a| + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

[2011학년도 고3 10월 가형 6번]

STEP 2

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 최솟값은?

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선이 점 $(1, 0)$을 지난다.
> (나) $x_1 \neq x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

12. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가 $x_1 = t^3 + at^2 + 6$, $x_2 = 3t^2 + bt + 6$이다. 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 시각 $t=4$일 때 두 점 P, Q가 만난다.
> (나) $0<t<4$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는 시각 $t=\alpha(0<\alpha<4)$일 때 최대이고, 이 시각에 점 Q가 운동방향을 바꾼다.

시각 $t=\alpha$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

13. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수 $g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2022학년도 6월 교육청 20번]

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

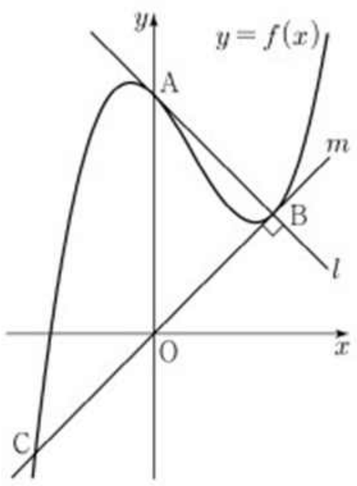
(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

[2023학년도 대수능 22번]

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[2016학년도 사관학교 A형 21번]

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다. (나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

[2020학년도 사관학교 나형 20번]

17.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[2021년 고3 10월 10번]

18. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a^2 \leq 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2022학년도 고3 10월 13번]

19. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\alpha-\beta|=10$
(나) 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 사이의 거리는 26이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는? [4점]

① $12\sqrt{2}$ ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ $24\sqrt{2}$

[2020학년도 고3 10월 나형 16번]

20. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[2021학년도 9월 나형 18번]

21. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④2 ⑤$\frac{5}{2}$

[2017학년도 6월 나형 20번]

22. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선

$y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2017학년도 9월 나형 20번]

23. 방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤10

[2018학년도 9월 나형 15번]

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.
> (다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

[2018학년도 고3 10월 나형 20번]

25. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다. (나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? 〔4점〕

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

[2019학년도 대수능 21번]

26. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

[2014학년도 6월 나형 21번]

27. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

[2016학년도 수능 나형 28번]

28. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[2018학년도 수능 나형 18번]

29. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=-x^4-2x^3-x^2,\ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k \le g(x)$ 를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

[2020학년도 3월 나형 28번]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$ (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다. (다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[2021학년도 3월 14번]

정답 및 해설

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	⑤	11번	②	21번	③
2번	①	12번	$\frac{15}{2}$	22번	③
3번	13	13번	8	23번	②
4번	⑤	14번	13	24번	④
5번	①	15번	②	25번	①
6번	②	16번	②	26번	⑤
7번	③	17번	①	27번	97
8번	9	18번	①	28번	④
9번	6	19번	③	29번	34
10번	①	20번	②	30번	①

1. ⑤
점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로
$f(0)=0$
이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(0)(x-0)+0$
즉 $y=f'(0)x$
또 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있으므로
$1\times f(1)=2$
즉, $f(1)=2$
$y=xf(x)$에서
$y'=f(x)+xf'(x)$이므로
$(1,2)$에서의 접선의 방정식은
$y=f(1)+f'(1)(x-1)+2$
$=f'(1)+2(x-1)+2$
$=f'(1)+2x-f'(1)$ 이고,
두 접선이 일치해야 하므로
$f'(0)=f'(1)+2$, $f'(1)=0$
따라서 $f'(0)=2$, $f'(1)=0$ 임을 알 수 있다.
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하고,
$f(0)=0$, $f(1)=2$, $f'(0)=2$, $f'(1)=0$을 이용해서
$a=-2$, $b=2$, $c=2$, $d=0$임을 알 수 있다.
따라서, $f'(2)=-14$

2. ①
$f(x)=-x^2+4$, $g(x)=2x^2+ax+b$라 하자.
ⅰ) $y=g(x)$의 그래프가 $(2,0)$을 지나므로
$g(2)=8+2a+b=0$
$\therefore\ 2a+b=-8$ …… ㉠
ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $(2,0)$에서 접하므로
$f'(2)=g'(2)$
$f'(x)=-2x$, $g'(x)=4x+a$이므로
$-2\cdot 2=4\cdot 2+a$
$\therefore\ a=-12$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b=16$이다.
$\therefore\ a+b=4$

3. 13
$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$ 이므로
점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$
$x=0$일 때, $y=g(t)$이므로
$g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$
$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$이므로
이차함수 $g'(t)$가
$0<t<5$에서 $g'(t)>0$이려면
$g'(0)\ge 0$, $g'(5)\ge 0$이어야 한다.
$g'(0)=0$이고,
$g'(5)=-150+10(a+2)\ge 0$이므로
$a\ge 13$
따라서, a의 최솟값은 13이다.

4. ⑤
$x>1$일 때 $\sqrt{(x-1)^2+\{f(x)-f(1)\}^2}=x^2-1$ 에서

$f(x)-f(1)=(x-1)\sqrt{x(x+2)}$ 이므로

$\therefore\ f'(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{3}$

5. ①
방정식 $f(x)=g(x)$에서
$3x^3-x^2-3x=x^3=4x^2+9x+a$
$2x^3+3x^2-12x=a$
이 때, $h(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 서로 다른 양의 실수 2개, 음의 실수 1개 이어야 한다.
$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$이므로,
$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
즉 $h(x)$의 극댓값은 $h(-2)=20$이고,
$h(x)$의 극솟값은 $h(1)=-7$이 된다.
이 때, 근의 개수가 양의 실수 2개, 음의 실수 1개가 되기 위해서는 $y=a$가 $h(0)$보다는 작고, $h(1)$보다는 커야하므로, $-7<a<0$이 되어야 하고, 정수 a는
$-6,-5,-4,-3,-2,-1$로 6개가 된다.

6. ②
$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

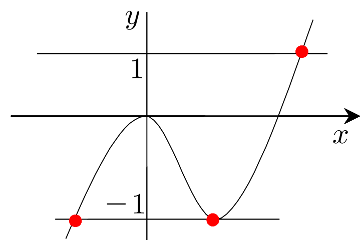
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x가
2개가 되려면
$g(0)=p>0,\ g(2)=p-4<0$즉, $0<p<4$
$f(0)=|p|=p,\ f(2)=|p-4|=4-p$
$f(0)=f(2)$이므로 $p=4-p$즉, $p=2$

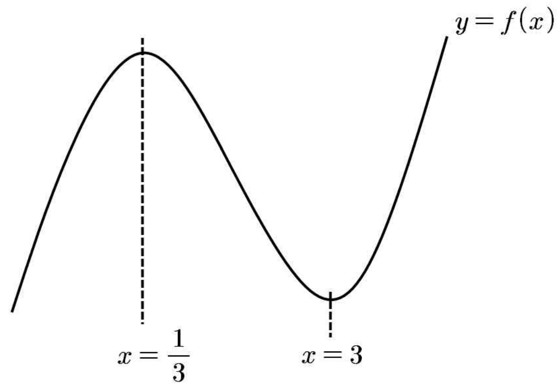
7. ③
$f(x)=t$라 두자.
$(g\circ f)(x)=0$의 근을 구한다는 것은 $g(t)=0$을 만족시키는 t값을 우선 구해야 한다.
$t^2-1=0 \Rightarrow t=\pm1$
즉, $f(x)=1$ or -1이 되게하는 x값의 개수를 구하면 된다.
$f(x)=2x^3-3x^2$에서 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cdots$	0	$\cdots$	-1	$\cdots$

$\therefore$ $f(x)=1$은 1개의 실근을 가지며, $f(x)=-1$은 2개의 실근을 가지게 된다.
$\therefore$ 총 3개의 실근을 갖는다.
cf) $f(x)$의 그래프와 실근의 위치를 표현하면 다음과 같다.



8. 9
$f(x)=x^3-5x^2+3x+n$이라 하자.
$f'(x)=3x^2-10x+3=0$에서 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=0,\ f'(3)=0$
즉, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 $f(0)=n$, $f(3)=n-9$이므로 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 최솟값은 $n-9$
따라서 $n-9\ge0$이므로 자연수 n의 최솟값은 9

9. 6
점 P의 시각 $t\,(t\ge0)$에서의 속도 $v(t)$는
$v(t)=3t^2-6t+a$
$v(3)=3\times3^2-6\times3+a=15$
따라서 $a=6$

10. ①
(ⅰ) $x\ge2a$일 때,
$f'(x)=3x^2+12x+15>0$이므로
함수 $f(x)$는 증가한다.
(ⅱ) $x\le2a$일 때,
$f'(x)=3(x+5)(x-1)$이므로
함수 $f(x)$가 증가하려면 $2a\le-5,\ a\le-\dfrac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{5}{2}$이다.

11. ②
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(0)\times x+f(0)$이고,
이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $0=f'(0)+f(0)$
즉, $f(0)=-f'(0)$
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f(0)=c$, $f'(0)=b$이므로
$c=-b$ ⋯ ㉠
함수 $f(x)$가 일대일함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이므로 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3b \le 0$ $b \ge \frac{a^2}{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(4)=64+16a+4b+c$

$\ge 64+16a+a^2$

$=(a+8)^2$

≥ 0

따라서 $f(4)$의 최솟값은 0이다.

12. $\frac{15}{2}$

시각 $t=4$일 때 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$4^3+a\times 4^2+6=4^2+b\times 4+6$

점 Q의 속도를 v_2라 하면

$b=4a+12$ $\cdots$ ㉠

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+b$

점 Q가 운동 방향을 바꾸는 시각에서 속도는 0이므로

$t=\alpha$일 때 $v_2=0$이다.

즉, $2\alpha+b=0$

$b=-2\alpha$ $\cdots$ ㉡

$f(t)=x_1-x_2$라 하면 $0<t<4$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 시각 $t=\alpha$일 때 최대이므로 $f'(\alpha)=0$

$f(t)=t^3+(a-1)t^2-bt$에서

$f'(t)=3t^2+2(a-1)t-b$

$f'(\alpha)=3\alpha^2+2(a-1)\alpha+2\alpha=0$

$3\alpha^2+2a\alpha=0$, $\alpha(3\alpha+2a)=0$

$0<\alpha<4$이므로 $\alpha=-\frac{2a}{3}$

㉡에서 $b=-2\alpha$이고, ㉠과 연립하면

$a=-\frac{9}{2}$, $b=-6$

㉡에서 $\alpha=3$

따라서 $x_1=t^3-\frac{9}{2}t^2+6$, $x_2=t^2-6t+6$이므로 시각 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\left|\left(3^3-\frac{9}{2}\times 3^2+6\right)-\left(3^2-6\times 3+6\right)\right|$

$=\left|-\frac{15}{2}-(-3)\right|=\frac{15}{2}$

13. 8

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$

$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$

$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$

$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$또는 $x=a$

{ⅰ} $a\ne 3$, $a\ne 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

{ⅱ} $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

{ⅲ} $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

{ⅰ}, {ⅱ}, {ⅲ}에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

14. 13

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이므로

$x\ne 1$일 때,

$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $\cdots$ ㉠

이때, 두 점 $(1,f(1))$, $(x,f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고 조건(나)에서 $g(x)\ge\frac{5}{2}$이므로 두 점 $(1,f(1))$, $\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선 $y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$는 점 $(1,f(1))$을 지난다.

즉, $1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$

$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$이 식을 정리하면

$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$

$a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

한편, ㉠에서

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$\lim_{x\to1}f'(g(x))$

$=\lim_{x\to1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$

$=3k^2-12k+b$ ⋯ ㉡

또, 우변은

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=3-12+b$

$=b-9$ ⋯ ㉢

㉡과 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=b-9$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉, $g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로 $g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

$27-54+3b-3=6$

$3b=36$

$b=12$

따라서, $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

15. ②

점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 하면 직선 m과 곡선 $y=f(x)$가 두 점 B, C에서 만나고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$ ⋯⋯㉠로 놓을 수 있다.

점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 좌표는 (b, b)이다.

직선 l은 점 B를 지나며 직선 $y=x$와 수직이므로 기울기가 -1이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-x+2b$이다.

점 A는 직선 l의 y절편이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2b)$, 즉 $f(0)=2b$이다.

문제의 조건에서 $f(0)>0$이므로 $b>0$이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-b^2c=2b$

$\therefore bc=-2$ $(\because b>0)$ ⋯⋯㉡

직선 l은 점 A에서 곡선 $y=f(x)$와 접하므로 $f'(0)=-1$이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=2(x-b)(x-c)+(x-b)^2$ ⋯⋯㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-1=2bc+b^2=-2$

$b^2=2$ $(\because$ ㉡$)$

$\therefore b=\sqrt{2}$ $(\because b>0)$

$b=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $c=-\sqrt{2}$

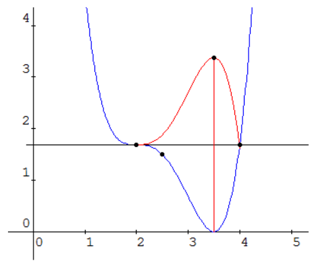
구하는 값은 $f'(c)$이므로 ㉢에 $x=c$르르 대입하면

$f'(c)-1=(c-b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$

$\therefore f'(c)=9$

16. ②

$y=2a-f(x)$는 $y=f(x)$을 $y=a$에 대하여 대칭이동한 것이다.



(가)에서 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-4)+a$

(나)에서 $f'(x)=(x-\alpha)^2(4x-14)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)=0$

두 식으로부터 $\alpha=2$, $a=\frac{27}{16}$이다.

$\therefore$ $f(x)=(x-2)^3(x-4)+\frac{27}{16}$,

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

17. ①

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$g(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가지는 것을 알 수 있다.

그러므로, $f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고, 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

극댓값과 극솟값의 2:1내분관계를 이용하여

함수 $h(x)$는 $x=\frac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$h(\frac{6+a}{3})=-4(1-\frac{a}{3})^3=-32$이므로, $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3))$에서 $f(4)=7$

18. ①

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$ 의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=a^2-3b\leq 0$, $a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$f(x)=\dfrac{g(x)-g(-x)}{2}$

$=\dfrac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$

$=x^3+bx$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D' 이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq\dfrac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

19. ③

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 $f(\alpha)$, $f(\beta)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.

조건에서 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$이므로

$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=10^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2$

$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2-10^2=24^2$

$|f(\beta)-f(\alpha)|=24$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 24

20. ②

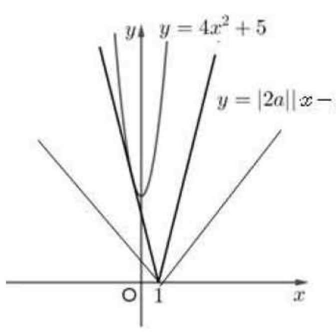
주어진 조건에 의하여 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)로 놓으면 $f'(x)=2a(x-1)$이므로

$|f'(x)|\leqq 4x^2+5$에서

$|2a(x-1)|\leqq 4x^2+5$ ⋯ ㉠

즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선 $y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|$, $y=4x^2+5$

가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을 $(k,\ 4k^2+5)$ $(k<0)$이라 하면 $y'=8x$에서

$y-(4k^2+5)=8k(x-k)$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$4k^2-8k-5=0$, $(2k-5)(2k+1)=0$, $k=-\dfrac{1}{2}$

즉, 접선의 기울기는 $8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$이므로

$-|2a|=-4$, $|a|=2$

$a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

21. ③

$f'(x)=x^2-2kx=0=x(x-2k)=0$

$x=0$에서 극대, $x=2k$에서 극소 ($\because\ k>0$)

$f'(x)=x^2-2kx=3k^2$

$x^2-2kx-3k^2=0$ 에서

$(x-3k)(x+k)=0$

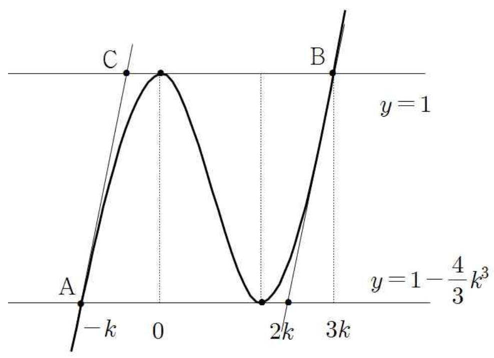
A, B점의 x좌표는 $-k$, $3k$이다.

$f(0)=1$, $f(2k)=\dfrac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\dfrac{4}{3}k^3$

$f(-k)=\dfrac{-k^3}{3}-k^3+1=1-\dfrac{4}{3}k^3$

$f(3k)=9k^3-9k^3+1=1$

이상을 정리하면 다음 그림과 같다.



따라서 구하려는 도형은 □ABCD이다.

$\mathrm{A}\left(-\mathrm{k},\ 1-\dfrac{3}{4}\mathrm{k}^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(1-\dfrac{4}{3}k^3\right)=3k^2(x+k)$

C점의 좌표가 1이므로 $y=1$을 대입하면

$\dfrac{4}{3}k^3=3k^2(x+k)\qquad\therefore\ x=-\dfrac{5}{9}k$

$\therefore\ \mathrm{C}\left(-\dfrac{5}{9}\mathrm{k},\ 1\right)$

따라서

밑변의 길이 $\overline{\mathrm{BC}}=3\mathrm{k}-\left(-\dfrac{5}{9}\mathrm{k}\right)$이고

높이는 $1-\left(1-\dfrac{3}{4}k^3\right)=\dfrac{3}{4}k^3$

$\mathrm{S}=\left(3\mathrm{k}+\dfrac{5}{9}\mathrm{k}\right)\dfrac{4}{3}\mathrm{k}^3=24$

$k^4=\dfrac{3^4}{2^4}$

$\therefore\ k=\dfrac{3}{2}$

22. ③

$f'(x)=x^2-2kx=0=x(x-2k)=0$

$x=0$에서 극대, $x=2k$에서 극소 ($\because\ k>0$)

$f'(x)=x^2-2kx=3k^2$

$x^2-2kx-3k^2=0$ 에서

$(x-3k)(x+k)=0$

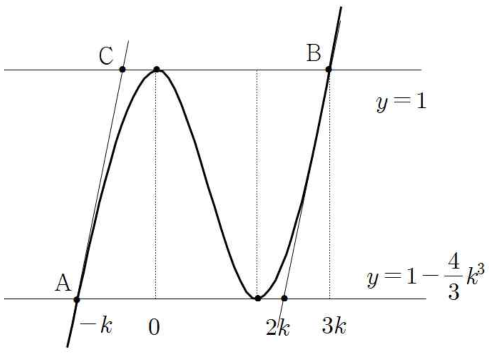
A, B점의 x좌표는 $-k$, $3k$이다.

$f(0)=1$, $f(2k)=\frac{8k^3}{3}-4k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$

$f(-k)=\frac{-k^3}{3}-k^3+1=1-\frac{4}{3}k^3$

$f(3k)=9k^3-9k^3+1=1$

이상을 정리하면 다음 그림과 같다.



따라서 구하려는 도형은 □ABCD이다.

$\mathrm{A}\left(-k,\ 1-\frac{3}{4}k^3\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=3k^2(x+k)$

C점의 좌표가 1이므로 $y=1$을 대입하면

$\frac{4}{3}k^3=3k^2(x+k)\qquad \therefore\ x=-\frac{5}{9}k$

$\therefore\ \mathrm{C}\left(-\frac{5}{9}k,\ 1\right)$

따라서

밑변의 길이 $\overline{\mathrm{BC}}=3k-\left(-\frac{5}{9}k\right)$이고

높이는 $1-\left(1-\frac{3}{4}k^3\right)=\frac{3}{4}k^3$

$\mathrm{S}=\left(3k+\frac{5}{9}k\right)\frac{4}{3}k^3=24$

$k^4=\frac{3^4}{2^4}$

$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

23. ②

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하자.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)=0$에서 $x=-1$, 3이므로

$f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=5$,

$x=3$에서 극솟값 $f(3)=-27$을 갖는다.

$f(x)=k$가 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는 k가

$f(x)$의 극솟값과 극댓값 사이의 가져야 하므로 $-27<k<5$가 된다.

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

24. ④

삼차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=2$에서 x축에 접하고 $x=4$에서 만나는 경우

$f(x)=(x-2)^2(x-4)+f(4)$

$f'(x)=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)(3x-10)$이므로

$f'\left(\frac{11}{3}\right)>0$이고 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=4$에서 x축에 접하는 경우

$f'(2)=0$, $f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4)$, $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$

$f(x)=\int 3(x-2)(x-4)\,dx$

$=x^3-9x^2+24x+C$ (단, C는 상수이다.)

$f(2)=C+20=35$이므로 $C=15$

$f(x)=x^3-9x^2+24x+15$

따라서 $f(0)=15$

25. ①

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x)=x(x+3)$

이고 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$, $f(0)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

이때,

$g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$ 에서

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=\frac{3}{b}$

또, $g(0)=1$ 이므로 $b=3$

이때 $g(x)=\frac{x+3}{x^2+ax+3}$

함수 $g(x)$가 실수전체 집합에서 연속이어야 하므로 방정식

$x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다. 그러므로

$D=a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

한편, $f(1)$이 자연수이므로

$f(1)=1\times(1^2+a+3)=a+4$

에서 $a+4$가 자연수이어야 하므로 $a>-4$이고 a는 정수이다.

㉠에서 a의 값은 -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3 이다.

한편 $g(2)=\frac{5}{2a+7}$이고

$a=3$일 때, 이 값은 최솟값 $\frac{5}{13}$를 갖는다.

26. ⑤

$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\geq0)\end{cases}$에서

$f'(x) = \begin{cases} a(3-3x^2) & (x<0) \\ 3x^2-a & (x>0) \end{cases}$이다.

a의 부호에 따라서 도함수의 그래프가 달라지기 때문에 a의 범위를 나누어야 한다.

(i) $a=0$일 때는 $f'(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$이 되어서 $f(x)$의 극댓값이 발생하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때는 $x=-1, \sqrt{\dfrac{a}{3}}$에서 $f(x)$가 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 그 값이 0이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a<0$일 때는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 $f(-1)=a(-3+1)=5$, $a=-\dfrac{5}{2}$이다.

$\therefore f(2)=2^3+\dfrac{5}{2}\cdot 2=13$

27. 97

조건 (나)에서 $x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하므로

$f(2)=g(2)$

조건 (가)에서 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$이므로

$g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$

또 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 2} \dfrac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2} = f'(2)-g'(2)=2$

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$x=2$를 대입하면

$g'(2)=12\times+8f'(2)$

$g'(2)=12\times 1+8\{g'(2)+2\}=8g'(2)+28$

에서 $g'(2)=-4$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)$, $y=-4x+9$

이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

28. ④

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2} = \dfrac{1}{4}$에서

$x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉 $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다. 이때,

$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$

이므로

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2}$

$=\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}$

$=\dfrac{2+a}{(2+a)^2}=\dfrac{1}{2+a}$

따라서 $\dfrac{1}{2+a}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

즉 $f(3)=2\times 1\times 5=10$

29. 34

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k \leq g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x) \leq 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$h(x)=f(x)-12x$라고 하면

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k \geq 20$

(ii) $g(x) \geq 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

부등식 $3x^2-12x+a-k \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k) \leq 0$, $k \leq a-12$

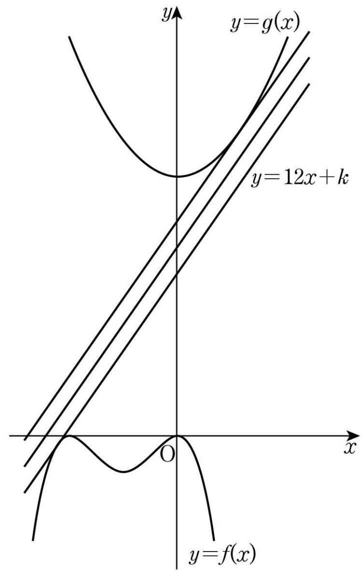
모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k \leq a-12$

(i), (ii)에 의해 $20 \leq k \leq a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22 \leq a-12 < 23$

따라서 $34 \leq a < 35$이므로 자연수 a의 값은 34

〔보충 설명〕

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$의 관계는 그림과 같다.



30. ①

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=\left(x^2+ax+b\right)+x(2x+a)$ 에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

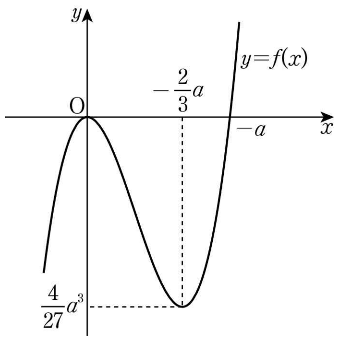
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$ 이므로 $-\dfrac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\right|=4$ 이므로

$f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=\dfrac{4}{27}a^3=-4$ 이고 $a^3=-27$ 에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$ 이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$