P PL

M ATH

L AB

주간지

3주차

삼각함수의 뜻과 그래프

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

주간지 소개

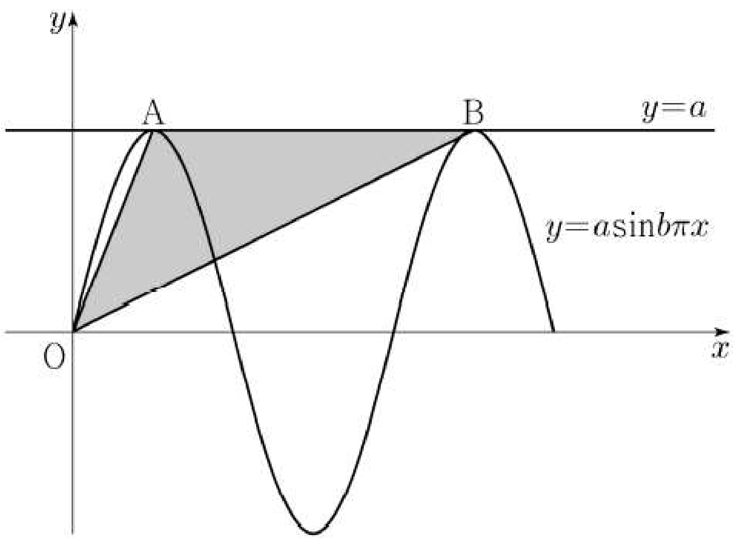
PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x$ $\left(0 \le x \le \dfrac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\dfrac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

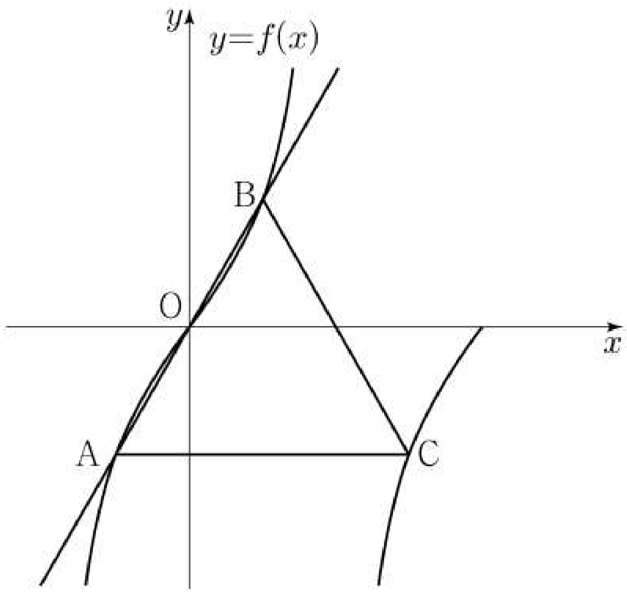


[2022학년도 9월 20번]

2. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\dfrac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \dfrac{a}{2}\right\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다) 〔4점〕



① $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

[2022학년도 대수능 11번]

3. $0 \le x < 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

[2021학년도 대수능 나형 16번]

4. 함수

$$f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

[2023학년도 대수능 6번]

5. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

[2023학년도 6월 7번]

6. 함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이다.
(나) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=\sin 4x$
(다) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$일 때, $f(x)=-\sin 4x$

이때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수를 구하시오.

[2014학년도 고2 3월 A형 21번]

7. 삼각방정식 $\sin(\pi\cos x)=0$의 해의 개수를 구하시오.

(단, $0 \le x \le 2\pi$)

[2005학년도 고3 4월 가형 27번]

8. $0 < x < 14$일 때, 방정식

$\cos^2 \frac{\pi x}{7} - \cos\frac{\pi x}{7} - \left(\cos\frac{3}{7}\pi + 1\right)\cos\frac{3}{7}\pi = 0$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오.

9. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = a\sin 3x + b$의 그래프가 두 직선 $y = 9$, $y = 2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오.

[2021학년도 고3 4월 가형 26번]

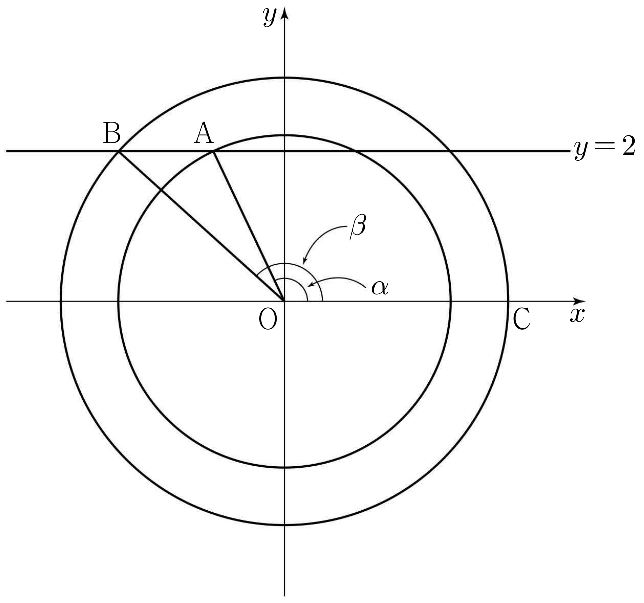
10. $\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{1-\cos\theta}{\tan\theta} = 1$일 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

[2021학년도 고3 4월 12번]

STEP 2

11. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=2$가 두 원 $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2=9$와 제 2사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
점 C(3, 0)에 대하여 $\angle\mathrm{COA}=\alpha$, $\angle\mathrm{COB}=\beta$라 할 때, $\sin\alpha\times\cos\beta$의 값은? (단, O는 원점이고, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$)

[4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

[2020학년도 고2 11월 나형 15번]

12. 두 함수 $f(x)=\log_3 x+2$, $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$가 있다. $0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 정의된 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 6월 나형 27번]

13. 좌표평면에서 제 1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ라 하자.
$\sin\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 시초선은 x축의 양의 방향이다.)
〔4점〕

[2021학년도 고3 4월 가형 26번]

14. 함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.
〔4점〕

[2020학년도 6월 나형 29번]

15. 두 함수 $y=4\sin 3x$, $y=3\cos 2x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$ $\left(단, 0<a<\frac{\pi}{2}<b<\pi\right)$라 하자. $y=4\sin 3x$의 그래프 위의 임의의 점 P에 대하여 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{6}$ ⑤ π

[2011학년도 고2 6월 가형 20번]

16. $a,\ b$는 양수이고 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 이다. $a^2+b^2=3ab\cos\gamma$일 때, $9\sin^2(\pi+\alpha+\beta)+9\cos\gamma$의 최댓값을 구하여라. [3점]

[1997학년도 수능 나형 27번]

17. $0<a<\frac{4}{7}$ 인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

[2021학년도 3월 가형 28번]

18. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점]

① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

[2021학년도 6월 가형 14번]

19. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕

< 보 기 >

ㄱ. $A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k) = 11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020학년도 4월 가형 21번]

20. $0 \le x \le \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = \sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. $a_3 + a_5$의 값을 구하시오. [4점]

[2019학년도 3월 가형 26번]

21. 함수 $y=\tan\left(nx-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y=-x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi,\pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, a_2+a_3의 값을 구하시오. [4점]

[2020년 고3 10월 나형 26번]

22. 자연수 n에 대하여 $0\le x<2^{n+1}$일 때, 부등식 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right)\le-\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

[2020년 고3 7월 나형 27번]

23. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

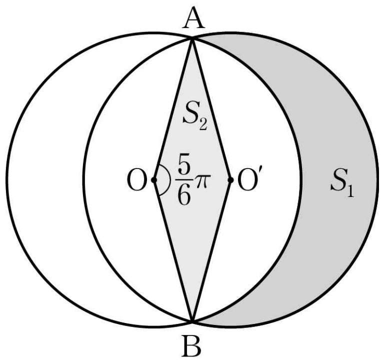
$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \le x \le \frac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\frac{k}{6}\pi < x \le 2\pi\right) \end{cases}$$

이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[2020년 고3 10월 11번]

24. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB}=\frac{5}{6}\pi$이다.

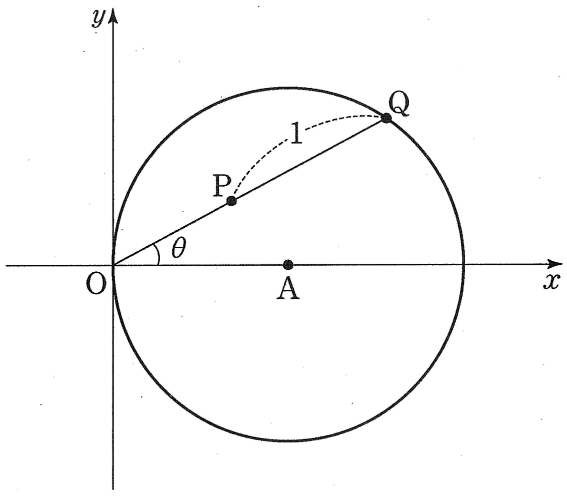


원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, S_1-S_2의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

[2021년 고3 3월 11번]

25. 그림과 같이 좌표평면에 점 A(1, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle \mathrm{AOQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) [4점]



[2018학년도 6월 가형 26번]

26. 열린 구간 $(0, \pi)$에서 부등식

$$\left(2^x-8\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)<0$$

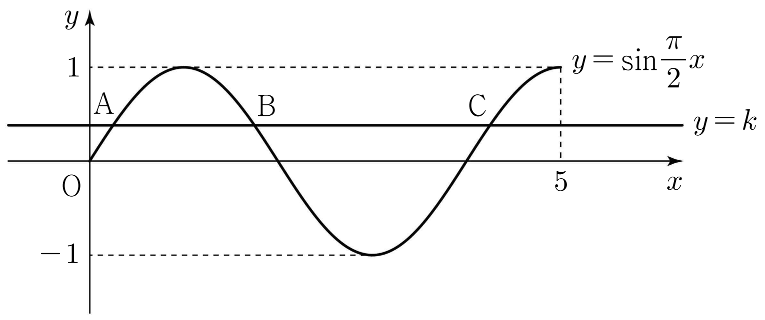
의 해가 $a<x<b$ 또는 $c<x<d$일 때, $(b-a)+(d-c)$의 값은? (단, $b<c$) [3점]

① $\pi-3$ ② $\frac{7\pi}{6}-3$ ③ $\frac{4\pi}{3}-3$ ④ $3-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $3-\frac{\pi}{6}$

[2019학년도 고3 10월 가형 12번]

27. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\,(0\leq x\leq 5)$가 직선 $y=k\,(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



[2023학년도 고3 7월 10번]

28. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ라 하자. $\sin\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x축의 양의 방향이다.) [4점]

[2021학년도 고3 3월 가형 26번]

29. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2022학년도 6월 15번]

30. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5}{12}\pi$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

[2023학년도 대수능 9번]

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	③	11번	⑤	21번	10
2번	③	12번	8	22번	169
3번	②	13번	80	23번	④
4번	③	14번	5	24번	④
5번	④	15번	④	25번	34
6번	8	16번	11	26번	③
7번	4	17번	40	27번	③
8번	120	18번	①	28번	80
9번	14	19번	②	29번	②
10번	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	20번	9	30번	③

정답 및 해설

1. ③
함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는
$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$
이므로 두 점 A, B의 좌표는
$A\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로
$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$
$a=5b\cdots$㉠
직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}$

$=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=3$

2. ③
$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로
함수 $f(x)$의 주기는 a이다.
직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로
양수 t에 대하여 $B(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면 $A(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,
$\overline{AB}=4t$이다.
이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로
$\overline{AC}=4t=a$이고,
$C(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.
점 C가 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3\pi}{4}$에서

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. ②
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은
$4\sin^2x+4\sin x-3=0$
$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$
$\sin x=\frac{1}{2}$
이 때, $0\le x<4\pi$ 이므로
$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ 2\pi+\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{5\pi}{6}$

따라서 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+2\pi+\frac{\pi}{6}+2\pi+\frac{5\pi}{6}=6\pi$

4. ③

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-\frac{\pi}{6}, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로 $-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[-\frac{\pi}{6}, b]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서

$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

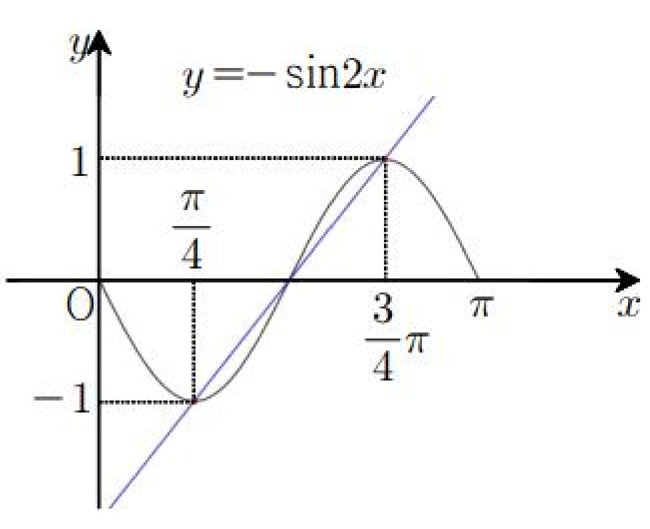
$2b=\frac{\pi}{6}$

$b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

5. ④

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3\pi}{4}$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점

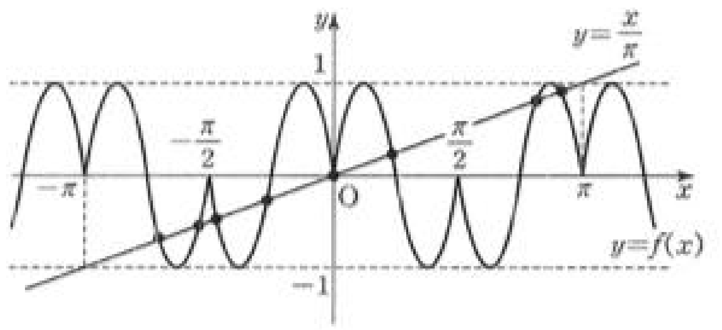
$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-(-1)}{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

6. 8

$f(x)=\begin{cases}\sin 4x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin 4x & \left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right)\end{cases}$이고, 서로 x축 대칭이다.

조건 (가)에 의하여, $f(x)$는 π를 주기로 하는 주기함수이므로, 그래프를 그려본다면 다음과 같다.



교점의 개수는 8개 이다.

7. 4

$\sin(\pi\cos x)=0$에서, $\pi\cos x=n\pi \Leftrightarrow \cos x=n$ (n은 정수)

$\cos x=-1, 0, 1$이고, $0\le x\le 2\pi$이므로,

$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi$

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

$\cos x=1 \Leftrightarrow x=0$

으로 해는 4개다.

8. 120

$0<x<14$일 때, 방정식

$t=\cos\frac{\pi x}{7}$ $(-1<t<1)$, $c=\cos\frac{3}{7}\pi$ 라고 하면,

$\cos^2\frac{\pi x}{7}-\cos\frac{\pi x}{7}-\left(\cos\frac{3}{7}\pi+1\right)\cos\frac{3}{7}\pi=0$에서,

$t^2-t-(c+1)c=0$, $\{t-(c+1)\}(t+c)=0$

범위 내에서, $t=c \Leftrightarrow \cos\frac{\pi x}{7}=\cos\frac{3}{7}\pi$

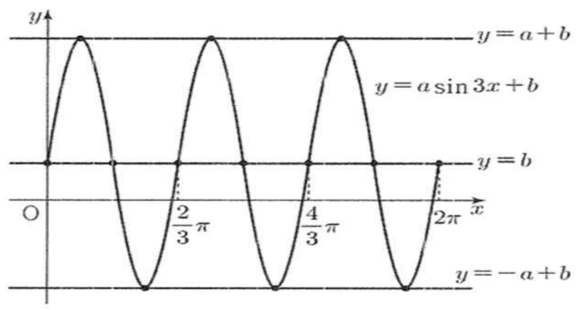
$x=3, 11$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=120$

9. 14

$0\le x\le 2\pi$에서, $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값은 $a+b$, $y=7$과 만나는 점이 7개이므로, $b=7$이다.

$y=9$와 만나는 점이 3개이므로, 최댓값이고, $a+b=9$



$\therefore a \times b = 7 \times 2 = 14$

10. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{1-\cos\theta}{\tan\theta} = 1$에서,

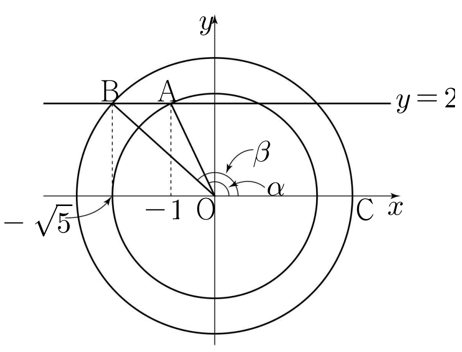
$\dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} + \dfrac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \dfrac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta} = 1 \Leftrightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{2}$이고, $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

11. ⑤



직선 $y=2$가 원 $x^2+y^2=5$와 제2사분면에서 만나는 점 A의 좌표는 $(-1, 2)$이고

$\overline{OA} = \sqrt{5}$이므로 $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

직선 $y=2$가 원 $x^2+y^2=9$와 제2사분면에서 만나는 점 B의 좌표는 $(-\sqrt{5}, 2)$이고

$\overline{OB} = 3$이므로 $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sin\alpha \times \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}$

12. 8

함수 $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi(x+a)}{2} + b$에서

최댓값은 $3+b=5$이고

최솟값은 $-3+b=-1$이므로 $b=2$

함수 $f(x) = 3\sin\dfrac{\pi}{2}(x+a)+2$의 그래프는 함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{2}x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+p) = f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p가 4이므로 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{2}x+2$의 그래프와 일치하고 함수 $f(x)$의 주기는 4이므로 $a=4k$(k는 정수)이다.

a가 양수일 때 a의 최솟값은 4이므로 $a \times b$의 최솟값은 8

13. 80

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$이므로

점 A의 좌표는 $A(2\sqrt{2},\ 1)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 B의 좌표는 $B(1,\ 2\sqrt{2})$ 점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로

동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $C(-1,\ -2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의해

$\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma = \dfrac{(-2\sqrt{2})}{(-1)} = 2\sqrt{2}$

따라서 $9(\sin^2\beta + \tan^2\gamma) = 9 \times \left(\dfrac{8}{9}+8\right) = 80$

14. 5

함수 $y = k\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프에서

(ⅰ) $k=0$일 때

$y=-6$이므로 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ⅱ) $k>0$일 때

$y = k\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+(k^2-6)$

이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$k+(k^2-6) \le 0$

$k^2+k-6 \le 0$

$(k-2)(k+3) \le 0$

$-3 \le k \le 2$

따라서 $0 < k \le 2$이다.

(ⅲ) $k<0$일 때

$y = k\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은

$-k+(k^2-6)$이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$-k+(k^2-6) \le 0$

$k^2-k-6 \le 0$

$(k+2)(k-3) \le 0$

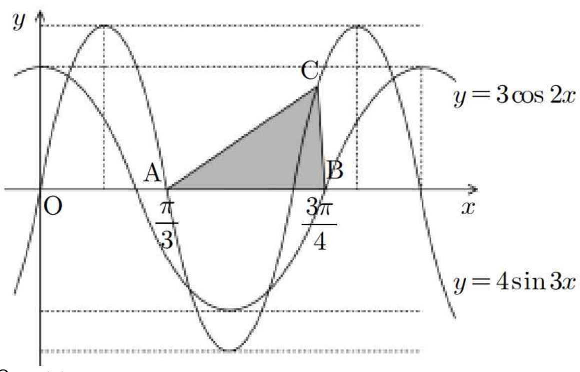
$-2 \le k \le 3$

따라서 $-2 \le k < 0$이다.

그러므로 $-2 \le k \le 2$이고 모든 정수 k의 개수는 5이다.

15. ④

러므 $A\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$, $B\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ 이므로 $\overline{AB} = \dfrac{5\pi}{12}$이다. 점 P의 y좌표의 최댓값은 4이므로 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{5\pi}{6}$ 이다.



16. 11

$a^2+b^2=3ab\cos\gamma$ 의 양변을 ab로 나누면

$3\cos\gamma=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

a, b는 양수이므로 $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$도 양수이다.

따라서, 산술-기하평균에 의하여

$3\cos\gamma=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$

$\therefore \cos\gamma\geqq\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{2}{3}\leqq\cos\gamma\leqq 1$

또, $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ 이므로

$\sin(\pi+\alpha+\beta)=\sin(2\pi-\gamma)=-\sin\gamma$

준식$=9\sin^2\gamma+9\cos\gamma=9(1-\cos^2\gamma)+9\cos\gamma$

$=-9(\cos^2\gamma-\cos\gamma)+9=-9\left(\cos\gamma-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{45}{4}$

그런데 $\frac{2}{3}\leqq\cos\gamma\leqq 1$이므로

$\cos\gamma=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 11을 갖는다.

17. 40

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $0<a<\frac{4}{7}$ 이므로

$-\frac{\pi}{a}<-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$ 이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,

$\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지나므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)+b=0$

$f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)+b=0$

따라서 $\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\frac{4}{7}$ 에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$ 이므로

$\frac{7a}{2}\pi=2\pi-\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi=\pi+\frac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(ⅰ) $a=\frac{1}{2}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$ 에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=-\sqrt{2}+b=0$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=\frac{1}{3}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$ 에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b=-1+b=0$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이고

$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

18. ①

이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$ 의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\ \geq\ 0$

이어야 한다.

즉, $\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\ \leq\ 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\ \leq\ 0$

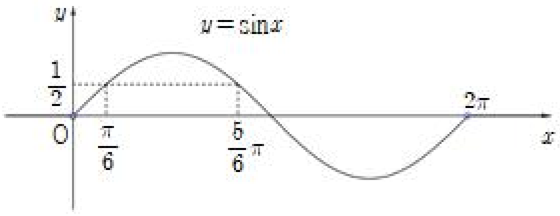
$\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1\ \geq\ 0$

$\sin\theta\ \geq\ \frac{1}{2}$

이때 $0\leq\theta<2\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\ \leq\ \theta\ \leq\ \frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\therefore\ 4\beta-2\alpha=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}=3\pi$

19. ②

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면

함수 $f(m)$의 주기가 k이므로

집합 A_k는 $A_k=\{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$이다.

ㄱ. $k=3$일 때, $f(1)=0$, $f(2)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\frac{2\times 2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$A_3=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=1$을 만족시키는 자연수 $m\,(m=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$가 존재해야 한다.

$\sin\dfrac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\dfrac{2(m-1)}{k}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

$m=1+\dfrac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로 k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며 그 개수는 22이다. (참)

ㄷ. 4 이상의 자연수 k에 대하여

ⅰ) $k=4l\,(l$은 자연수$)$인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l}\pi=\sin 0=0$

$m=l+1$일 때,

$f(l+1)=\sin\dfrac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$m=2l+1$일 때

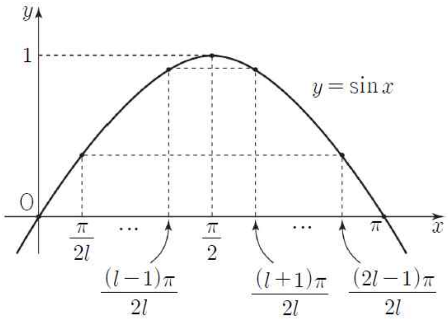
$f(2l+1)=\sin\dfrac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha\,(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l)$일 때,

$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l}\pi=\dfrac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$

이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면

$f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $l+l+1=2l+1$

ⅱ) $k=4l+1\,(l$은 자연수$)$인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로

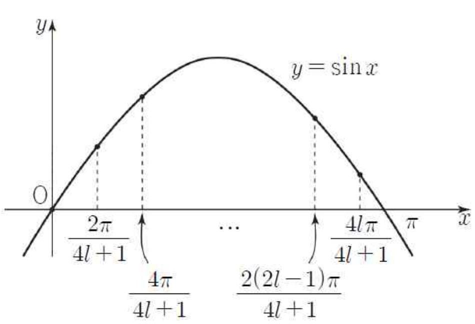
$m=1$일 때, $f(1)=\sin\dfrac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin 0=0$

$4l+1$ 이하의 서로 다른 두 자연수 $r,\ s$에 대하여

$\dfrac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\dfrac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$

에서 $4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는 짝수이므로

$\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi,\ \ \dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq 3\pi$이다.



따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$

ⅲ) $k=4l+2\,(l$은 자연수$)$인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l+1}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l+1}\pi=\sin 0=0$

$m=2l+2$일 때,

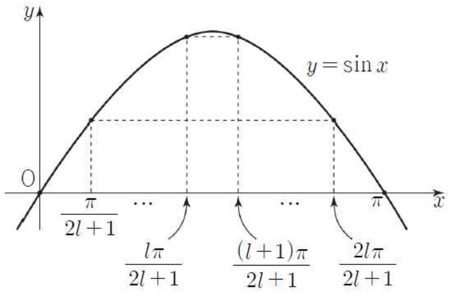
$f(2l+2)=\sin\dfrac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha\,(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l+1)$일 때,

$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\dfrac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$

이므로 $\beta=2l+3-\alpha$라 하면

$f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $l+l+1=2l+1$

ⅳ) $k=4l+3\,(l$은 자연수$)$인 경우

ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+3$이다.

$A_1=A_2=\{0\}$이고 ⅰ) ~ ⅳ)에 의하여 집합 A_k의 원소의 개수는

$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\ (l\text{은 자연수})$$

$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 6이므로 $k=22$

$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 3이므로 $k=11$

$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는 자연수 l은 5이므로 $k=20$

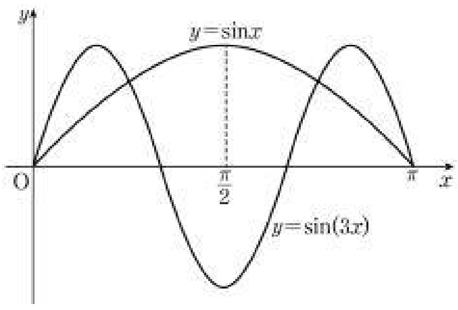
따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$22+11+20=53$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

20. 9

두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{3}$이므로 $0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$를 나타내면 〔그림 1〕과 같다.

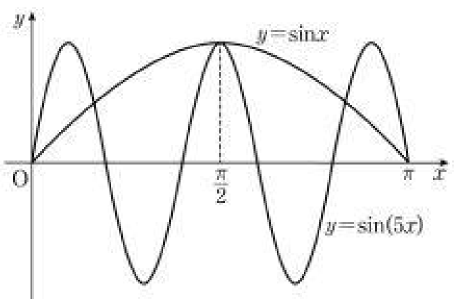


[그림 1]

〔그림 1〕에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 교점의 개수가 4이므로

$a_3=4$

두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 주기가 각각 2π, $\frac{2\pi}{5}$이므로 $0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$를 좌표평면에 나타내면 〔그림 2〕와 같다.



[그림 2]

〔그림 2〕에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 교점의 개수가 5이므로

$a_5=5$

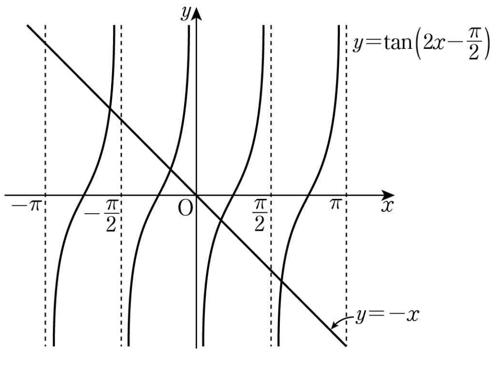
따라서 $a_3+a_5=4+5=9$

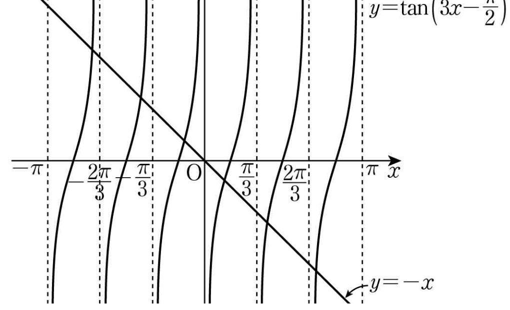
21. 10

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$일 때의 그래프이다.





그러므로 직선 $y=-x$와

$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_2=4$,

$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=4+6=10$

22. 169

$0\le x<2^{n+1}$일 때, $0\le\frac{\pi}{2^n}x<2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\le-\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le\frac{\pi}{2^n}x\le\frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3}\le x\le\frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3}\le x\le\frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로

$\sum_{n=1}^{7}a_n$은 $\frac{2^2}{3}\le x\le\frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.

$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots$, $\frac{2^9}{3}=170.666\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=170-1=169$

〔참고〕

$n=1$일 때, $\frac{2^2}{3}\le x\le\frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $\frac{2^3}{3}\le x\le\frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로 $a_2=3$

$n=3$일 때, $\frac{2^4}{3}\le x\le\frac{2^5}{3}$인 자연수 x는 6, 7, 8, 9, 10이므로 $a_3=5$

$n=4$일 때, $\frac{2^5}{3}\le x\le\frac{2^6}{3}$인 자연수 x는 11, 12, 13, $\cdots$, 21이므로 $a_4=11$

$n=5$일 때, $\frac{2^6}{3}\le x\le\frac{2^7}{3}$인 자연수 x는 22, 23, 24, $\cdots$, 42이므로 $a_5=21$

$n=6$일 때, $\frac{2^7}{3}\le x\le\frac{2^8}{3}$인 자연수 x는 43, 44, 45, $\cdots$, 85이므로 $a_6=43$

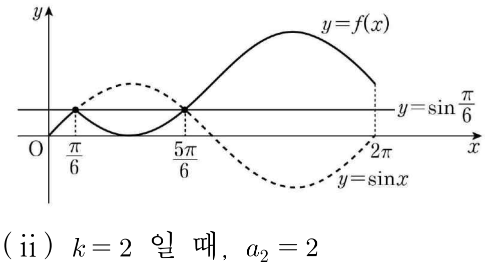
$n=7$일 때, $\frac{2^8}{3}\le x\le\frac{2^9}{3}$인 자연수 x는 86, 87, 88, $\cdots$, 170이므로 $a_7=85$

23. ④

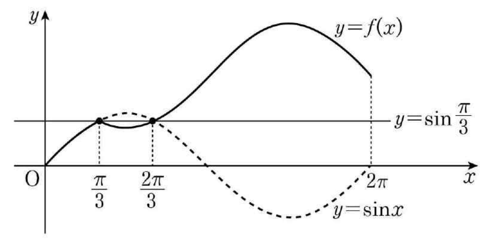
그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

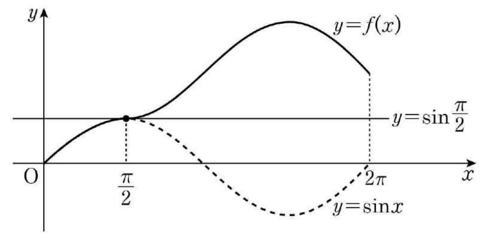
(ⅰ) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



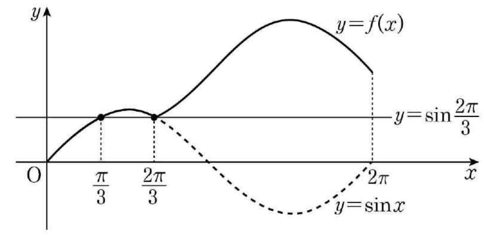
(ⅱ) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



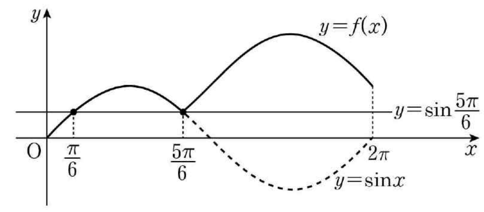
(ⅲ) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(ⅳ) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(ⅴ) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

〔다른 풀이〕

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식

$f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(ⅰ) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$일 때, $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ⅱ) $\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 방정식

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1,\ k=5$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2,\ k=4$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=1$이므로

$\sin x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

24. ④

원 O'에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′B의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면,

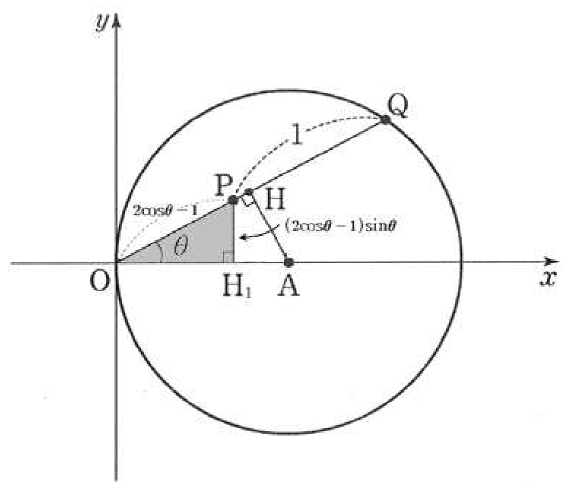
$S_1=T_1+S_2-T_2$

$=\left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{7}{6}\pi\right)+S_2-\left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$

$=\frac{3}{2}\pi+S_2$

따라서 $S_1-S_2=\frac{3}{2}\pi$

25. 34



A 에서 OQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta=\cos\theta$

$\overline{\mathrm{OQ}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2\cos\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}=2\cos\theta-1$

P 에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면

P 의 y좌표는 $f(\theta)=\overline{\mathrm{PH_1}}=(2\cos\theta-1)\sin\theta$ 이다.

$f'(\theta)=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$

따라서 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ 일 때 $f(\theta)$는 극댓값을 가지며 최댓값이 된다.

26. ③

(ⅰ) $2^x-8<0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}>0$인 경우

$0<x<3$이고 $0<x<\frac{\pi}{3}$이므로 $0<x<\frac{\pi}{3}$

(ⅱ) $2^x-8>0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}<0$인 경우

$3<x<\pi$이고 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$이므로 $3<x<\pi$

따라서 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $3<x<\pi$이므로

$(b-a)+(d-c)=\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+(\pi-3)=\frac{4\pi}{3}-3$

27. ③

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각

$x_1\,(0<x_1<1),\ x_2,\ x_3$이라 하면

삼각함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로

$x_2=2-x_1,\ x_3=x_1+4$

$x_1+x_2+x_3=x_1+(2-x_1)+(x_1+4)$

$$=x_1+6=\frac{25}{4}$$

$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2-x_1=\frac{7}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=x_2-x_1=\frac{3}{2}$

28. 80

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 이므로

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2\sqrt{2},1)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(1,2\sqrt{2})$

점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로

동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(-1,-2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의해

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{(-2\sqrt{2})}{(-1)}=2\sqrt{2}$

따라서 $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)=80$

29. ②

ㄱ. 방정식

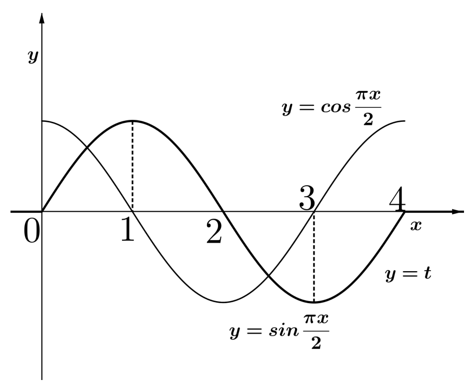
$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$ 에서

$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

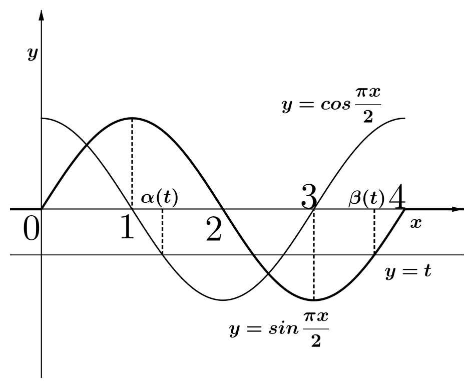
이 방정식의 실근은 두 함수

$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y=t$와의 교점의 x좌표이다.

한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1\le t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 (2, 0)에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\alpha(t)=1+k\ (0<k\le 1)$

로 놓으면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ 〈참〉

ㄴ. 실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$의 원소이므로

$\beta(0)=3,\ \alpha(0)=0$

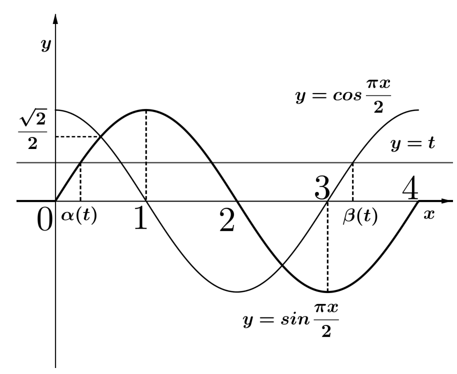
그러므로 주어진 식은

$\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(i) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$

$t\ne 0$이면 다음 그림과 같다.



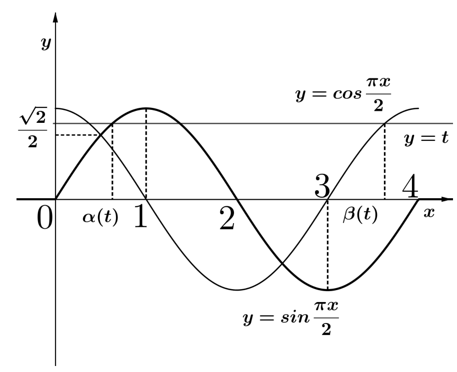
이때, $\alpha(t)=k\ \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=3+k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때, $\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

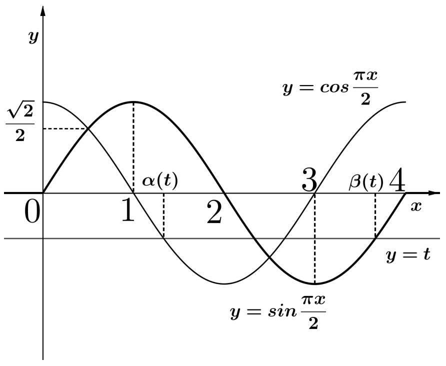
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ \ (0<2k<1)$

(iii) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0,\ \beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(iv) $-1\le t<0$일 때,



$1<\alpha(t)\le 2,\ 3\le\beta(t)<4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t)<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=3\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 〈참〉

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$0<t_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t_2$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha,\ t_2=\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\dfrac{1}{2}$이므로

$\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha=\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{4}=1$

$8\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+4\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1\times t_2=\dfrac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\dfrac{3}{8}$ 〈거짓〉

30. ③

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\tan 2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+a=7$

$(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})+a=7$

$\therefore a=4$

$f(b)=-\sqrt{3}\tan(2b)+4=3$

$\tan(2b)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$2b=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore b=\dfrac{\pi}{12}$

$a\times b=4\times\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$