P PPL

M MATH

L LAB

주간지

1주차

함수의 극한과 연속

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과

주간지 소개

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고

$\lim_{x\to 0-} g(x) - \lim_{x\to 0+} g(x) = 6$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

[2018학년도 9월 나형 17번]

2. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.
>
> (나) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 4$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[2019학년도 6월 나형 28번]

3. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -\frac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$에 대하여 함수

$f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. 〔4점〕

[2014학년도 대수능 A형 28번]

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2-x & (x>a) \end{cases},\ g(x)=x-(2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. 〔4점〕

[2016학년도 수능 A형 27번]

5. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[2020학년도 6월 나형 15번]

6. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[2022학년도 대수능 12번]

7. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2017학년도 대수능 18번]

8. 다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다.

다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은? [3점]

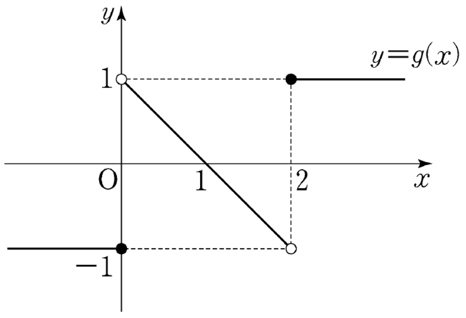
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2009학년도 6월 가형 4번]

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x \leqq 0) \\ -x+1 & (0<x<2) \\ 1 & (x \geqq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
$f(5)$ 의 값은? [3점]



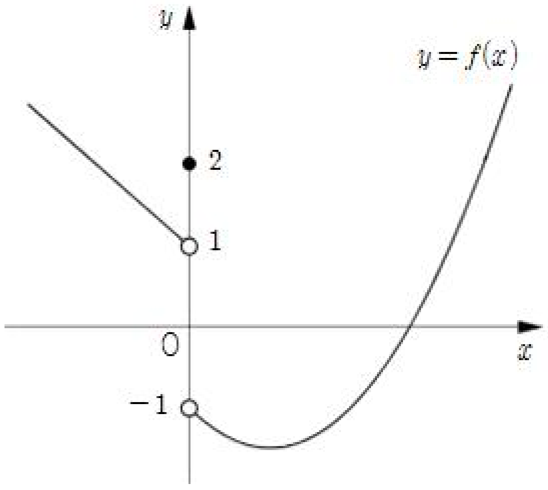
① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

[2013학년도 6월 가형 6번]

10. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}=1, \ \lim_{x\to 1-}f(x-1)g(x)=3$$

일 때, $g(2)$의 값은? [3점]



① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

[2019학년도 사관학교 나형 11번]

STEP 2

11. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[2010학년도 6월 가형 19번]

12. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$
(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[2020학년도 대수능 나형 14번]

13. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[2022학년도 3월 20번]

14. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

[4점]

[2019학년도 6월 나형 29번]

15. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x\ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[2022학년도 사관학교 10번]

16. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 2) \\ 2-x & (x>2) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[2015학년도 7월 A형 18번]

17. x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x \le 2f(x)) \end{cases}$ 라고 하자.

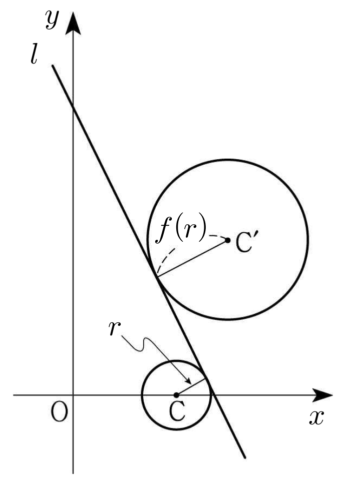
예를 들어, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=2$이고, $\dfrac{7}{2}<2f\left(\dfrac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

$\lim\limits_{x\to 8+0} g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 8-0} g(x)=\beta$라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

[2011학년도 6월 가형 24번]

18. 그림과 같이 중심이 C$(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 r $(r<\sqrt{5})$인 원 C가 있다. 기울기가 -2이고 원 C에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l에 접하고 중심이 C$'(3,\ 3)$인 원 C$'$의 반지름을 $f(r)$라 할 때, $\lim\limits_{r\to +0} f(r)$의 값은?

[4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

[2013학년도 10월 나형 20번]

19. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[2015학년도 6월 A형 29번]

20. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)$와 $\lim_{x\to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다

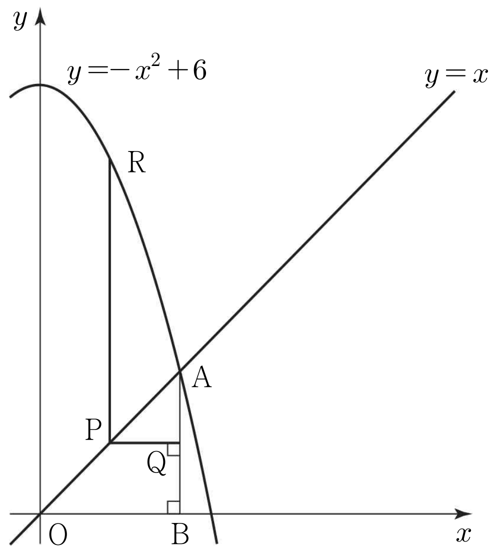
ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$ 도 $x=0$에서 연속이다

ㄷ. $y=|f(x)|$ 가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[2006학년도 6월 가형 15번]

21. 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, a)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+6$과 만나는 점을 R라 할 때, $\lim_{a\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$의 값은? (단, $0<a<2$) [4점]



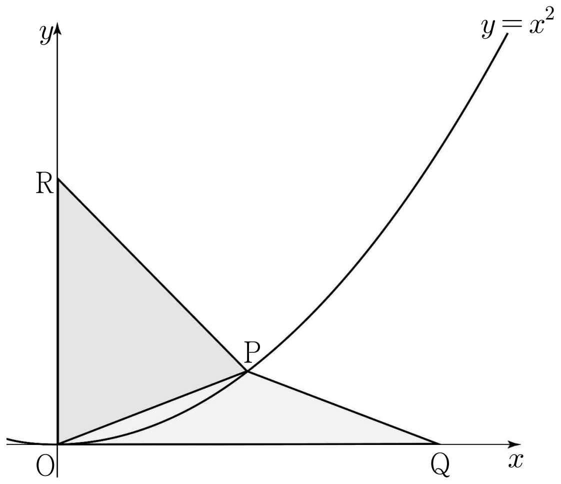
① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

[2016학년도 고3 4월 A형 18번]

22. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2)(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.
(나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[2018학년도 고3 4월 나형 21번]

23. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2011학년도 대수능 가형 8번]

24. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. 〔4점〕

[2022학년도 고3 3월 20번]

25. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2a & (x \geq 1) \\ 3x+a & (x<1) \end{cases}$$

$$g(x)=x^2+ax+3$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [4점]

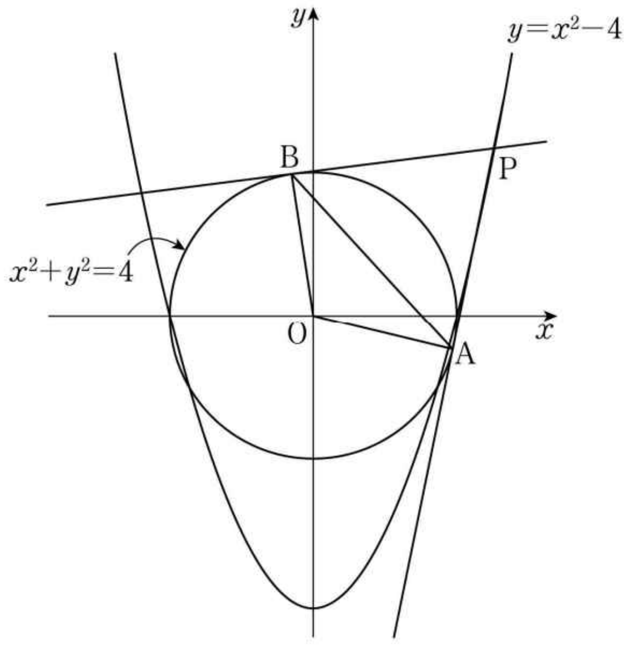
① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ 2 ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

[2015학년도 고3 3월 가형 16번]

26. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]

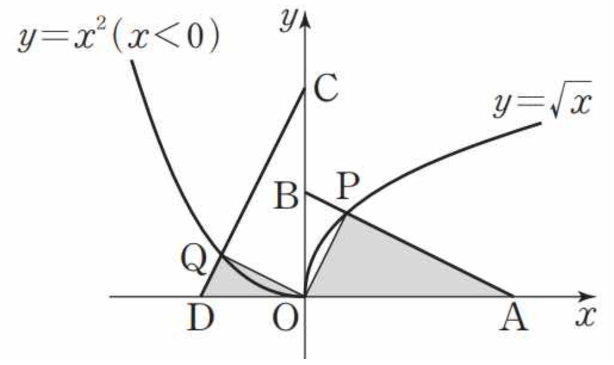


① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

[2021학년도 고3 10월 12번]

27. 양의 실수 t에 대하여 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(0,\ t)$, $\mathrm{D}(-2,\ 0)$이 있다. 그림과 같이 $y=\sqrt{x}$가 선분 AB와 만나는 점을 P, 곡선 $y=x^2(x<0)$이 선분 CD와 만나는 점을 Q라 하자. 원점 O에 대하여 삼각형 OAP의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 OQD의 넓이를 $T(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{tT(t)}{S(t)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



28. 다항함수 $f(x)$는 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-3} & (x \neq 3) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

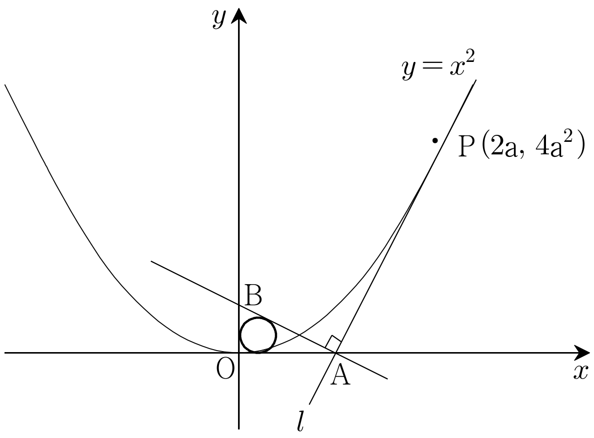
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[2021학년도 고3 7월 12번]

29. 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 함수 $f(x)$와 $\lim_{x\to 2+} g(x) > \lim_{x\to 2-} g(x)$인 함수 $g(x)$가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)\times\left\{\lim_{x\to 2+} g(x) - \lim_{x\to 2-} g(x)\right\}$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $|f(x)g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $x<2$일 때 $f(x)g(x)=x^2-2x-4$이고,
> $x>2$일 때 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=2x-3$이다.

30. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(2a, 4a^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

[2010학년도 사관학교 가형 18번]

정답 및 해설

빠른 정답					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	⑤	11번	10	21번	②
2번	24	12번	⑤	22번	②
3번	13	13번	8	23번	②
4번	12	14번	20	24번	8
5번	④	15번	①	25번	⑤
6번	③	16번	②	26번	②
7번	④	17번	16	27번	②
8번	①	18번	⑤	28번	①
9번	①	19번	10	29번	8
10번	4	20번	①	30번	③

1. ⑤

$x<0$일 때,
$g(x)=-f(x)+x^2+4$
$x>0$일 때,
$g(x)=f(x)-x^2-2x-8$
한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$
이다.
이때 $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}-f(x)+x^2+4$
$=-f(0)+4$
$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)-x^2-2x-8$
$=f(0)-8$
이므로
$\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)=6$에서
$-f(0)+4-f(0)-8=6$
따라서 $f(0)=3$

2. 24

조건 (가)에서
$f(x)$가 $x=1$, $x=2$에서 불연속이라는 것은,
분모인 $f(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 0이기 때문에
$f(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가진다.
즉, $f(x)=a(x-1)(x-2)$ $(a\neq0)$ 으로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서
$\lim_{x\to2}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}a(x-1)=a$
이므로 $a=4$
따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$이므로
$f(4)=4\times3\times2=24$

3. 13

(ⅰ) $a=0$일 때,
$f(x)f(x-a)=f(x)^2$이므로 $x=0$ 에서 함수 $f(x)f(x-a)$는 연속이 아니다.
(ⅱ) $a>0$일 때,
$f(x)$는 a에서 연속이므로, 불연속함수와 연속함수의 곱이 연속이 되기 위해서는, 연속함수가 0의 함숫값을 가져야하므로, $f(a)=0$이 되어야 한다.
즉, $-\frac{1}{2}a+7=0$이므로, $a=14$
(ⅲ) $a<0$ 일 때,
$a+1=0$이므로, $a=-1$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$14+(-1)=13$

4. 12

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면,
연속함수끼리의 곱은 실수 전체에서 연속이므로
$a+3=a^2-a$
$a^2-2a-3=0$
즉, $a=3$ 또는 $a=-1$이다.
(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면,
연속함수의 함숫값이 0이 되어야 하므로
$a-(2a+7)=0$
즉, $a=7$ 이다.

그러므로, 모든 실수 a의 값의 곱은 21이다.

5. ④

함수 $f(x)$는 $x=a$에서만, 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=a$에서만 연속이면 실수 전체 집합에서 연속이다.

(ⅰ) $a<0$ 이면

$f(a)=0$이 되어야 하므로,

$-2a+3=0$, 즉, $a=\dfrac{3}{2}$이므로

$a<0$이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a>0$ 이면

$-2a+2=0$, 즉 $a=1$이어야 한다.

6. ③

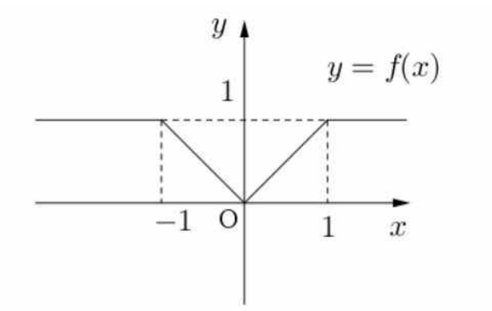
$f(x)^3-f(x)^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$f(x)-1f(x)+xf(x)-x=0$이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

최댓값이 1이고, 최솟값이 0

실수 전체의 집합에서 연속이므로



따라서

$f(-\dfrac{4}{3})=1$, $f(0)=0$, $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(-\dfrac{4}{3})+f(0)+f(\dfrac{1}{2})=1+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

7. ④

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$이면

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\dfrac{3}{5}$이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

따라서 $a=\alpha$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$

$=\lim\limits_{x-\alpha}\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$

$=\dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\dfrac{3}{5}$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$

$2(\alpha-\beta)=8$이므로

$|\alpha-\beta|=4$

8. ①

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to 1}\{g(x)-2x\}=0$

$\therefore\ g(1)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(g(x)-1)\cdot g(x)}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(g(x)-1)\cdot g(x)}{x+1}=\dfrac{(g(1)-1)\cdot g(1)}{2}=1$

9. ①

(ⅰ) $x=0$에서 연속이어야 하므로

$h(0)=f(0)g(0)=b\times(-1)=-b$

$\lim\limits_{x\to+0}h(x)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to+0}f(x)\lim\limits_{x\to+0}g(x)=b\times 1=b$

$\lim\limits_{x\to-0}h(x)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to-0}f(x)\lim\limits_{x\to-0}g(x)=b\times(-1)=-b$

따라서 $b=-b$ 이므로 $b=0$

(ⅱ) $x=2$에서 연속이어야 하므로

$h(2)=f(2)g(2)=(4+2a)\times 1=4+2a$

$\lim\limits_{x\to 2+0}h(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)\lim\limits_{x\to 2+0}g(x)=(4+2a)\times 1=4+2a$

$\lim\limits_{x\to 2-0}h(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)\lim\limits_{x\to 2-0}g(x)=(4+2a)\times(-1)=-4-2a$

따라서 $4+2a=-4-2a$ 이므로 $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 $f(x)=x^2-2x$ 이므로

$f(5)=15$

10. ④

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-g(0)=1$, $g(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x-1)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x-1)g(x)=g(1)=3$

$g(x)=x^2+ax+b$ 라 놓으면 $b=-1$, $1+a+b=3$ 이므로

$a=3$, $g(x)=x^2+3x-1$,

$\therefore\ g(2)=4+6-1=9$

11. 10

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}$ ($\dfrac{1}{x}=t$ 라 놓으면)

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2+ax+b$

또 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$ 에서 $f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=6+a+b=0\qquad\therefore\ b=-a-6$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{3}$ 에서

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x+a+6}{x+2}=\dfrac{13+a}{3}=\dfrac{1}{3}\qquad\therefore\ a=-12,\ b=6$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

12. ⑤

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

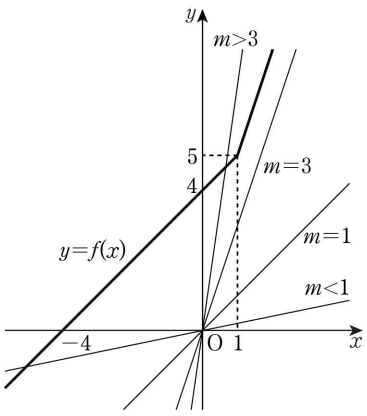
$f(x)=2x^2$이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=8$

13. 8

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases} 1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3) \\ 0 & (1 \leq m \leq 3) \end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+} g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=\lim_{x\to1+} g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ⅱ) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+} g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=\lim_{x\to3+} g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의

계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

14. 20

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하므로 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다.

(ⅰ) $f(x)$가 증가함수일 때

$f(x)$가 증가함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=x$ 위에만 존재한다.

따라서 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이 성립한다.

주어진 조건에 대입하면

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서 $c=-\frac{3}{2}$이고 $f(2)=4c+5=2$에서

$c=-\frac{3}{4}$이므로 모순이다.

(ⅱ) $f(x)$가 감소함수일 때

$f(x)$가 감소함수이므로 곡선 $y=f(x)$는 $y=x$와 한 점에서 만나고, $y=f^{-1}(x)$와 두 점에서 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점은 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=f(x)$는 $y=x$와 $x=1$에서 만나고, $y=f^{-1}(x)$와 $x=-1$, 2에서 만난다.

따라서 세 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$가 된다.

이를 주어진 조건에 대입하면

$f(-1)=-a+b=2$, $f(1)=a+b=c+\frac{5}{2}=1$, $f(2)=4c+5=-1$

이다.

위의 연립방정식을 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$을 얻을 수 있다.

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

15. ①

$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \geq a) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+} f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(-2a+4)$

$\lim_{x\to a-} f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(a^2-5a)$

따라서 $a^2-5a=0$이거나 $-2a+4=a^2-5a$이므로

$a=4$ 또는 $a=5$ ($\because\ a>0$)

따라서 모든 a의 값의 합은 9

16. ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$이므로 $f(x)=(x-1)(x-a)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1-a=k$

$h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$h(2)=\lim_{x\to2+0} h(x)=\lim_{x\to2-0} h(x)$

$h(2)=f(2)g(2)=3(2-a)$

$\lim_{x\to2+0} h(x)=\lim_{x\to2+0}(x-1)(x-a)(2-x)=0$

$\lim_{x\to2-0} h(x)=\lim_{x\to2-0}(x-1)(x-a)(x+1)=3(2-a)$

따라서 $a=2$이므로 $k=-1$

17. 16

$\lim_{x\to8+0} g(x)$이면 $x=8.1$을 생각하자

$f(8.1)=4$ 그러면 $x>2f(x)$이다.

따라서 $\alpha=4$

$\lim_{x\to8-0} g(x)$이면 $x=7.9$를 생각하자.

$f(7.9)=4$ 그러면 $x<2f(x)$이다.

따라서, $\beta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{4}{\dfrac{1}{4}}=16$

18. ⑤

기울기가 -2인 직선 l의 y절편을 b라 하면
직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$
점 C$(2,\ 0)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리
$r=\dfrac{|2\cdot2-b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|4-b|}{\sqrt{5}}$에서 $b=4\pm\sqrt{5}r$ ⋯ ㉠
점 C$'(3,\ 3)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리
$f(r)=\dfrac{|9-b|}{\sqrt{5}}$에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면

$$\lim_{r\to+0}f(r)=\lim_{r\to+0}\frac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

19. 10

$f(x)$가 다항함수이고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$이므로
$f(x)=x^3-11x^2+ax+b$이고
$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$이므로 $f(1)=0$, $f'(1)=-9$이다.
따라서 $f(1)=1-11+a+b=0$에서
$a+b=10$이고 $f'(x)=3x^2-22x+a$이므로
$f'(1)=3-22+a=-9$이다.
따라서 $a=10$, $b=0$이고 $f(x)=x^3-11x^2+10x$이다.
$t=\dfrac{1}{x}$이라하면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이고 다항함수이므로 모든 실수에서 미분가능하기 때문에 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$
$=f'(0)=10$

20. ①

ㄱ. (거짓) 【반례】 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$이지만

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}0=0$이다.

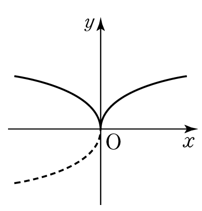
ㄴ. (참) $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

(i) $f(0)=0$인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to0+}|f(x)|=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=0$

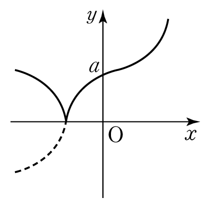
$\displaystyle\lim_{x\to0-}|f(x)|=\lim_{x\to0-}\{-f(x)\}=-f(0)=0$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|$



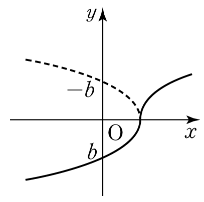
(ii) $f(0)=a(a>0)$인 경우

$\displaystyle\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}f(x)$
$=f(0)=a=|f(0)|$



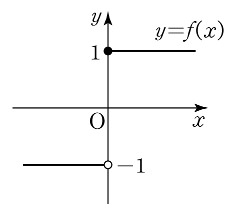
(iii) $f(0)=b$ $(b<0)$인 경우

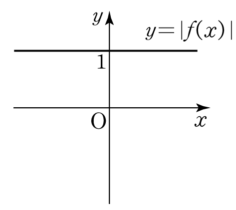
$\displaystyle\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}\{-f(x)\}$
$=-f(0)=-b=|f(0)|\ (\because\ b<0)$



(i), (ii), (iii)에서 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. (거짓) 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$





위의 그림에서 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만
$y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

21. ②

점 A는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 만나는
점이므로 $-x^2+6=x$
$x=2$ $(\because\ x>0)$
$\therefore$ A$(2,\ 2)$
$\overline{\mathrm{PQ}}=2-$a
$\overline{\mathrm{PR}}=-a^2+6-a$

$$\therefore\ \lim_{a\to2-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{a\to2-0}\frac{2-a}{-a^2-a+6}$$
$$=\lim_{a\to2-0}\frac{2-a}{(a+3)(2-a)}$$
$$=\lim_{a\to2-0}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

22. ②

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로
점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$
삼각형 POQ의 넓이는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의
수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 M$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

$y=-\frac{1}{t}x+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\times t=\frac{1}{4}(t^3+t)$

따라서 $\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$

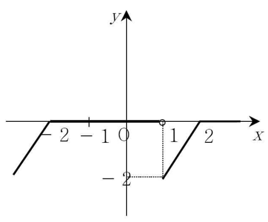
$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}$

23. ②

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$

$\therefore$ 참



ㄴ. $g(x)=f(x)-|f(x)|$라고 하면

$g(x)=\begin{cases}2x+4 & (x\le -2)\\ 0 & (-2<x<1)\\ 2x-4 & (1\le x<2)\\ 0 & (x\ge 2)\end{cases}$

따라서 $g(x)=f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서만 불연속이다.

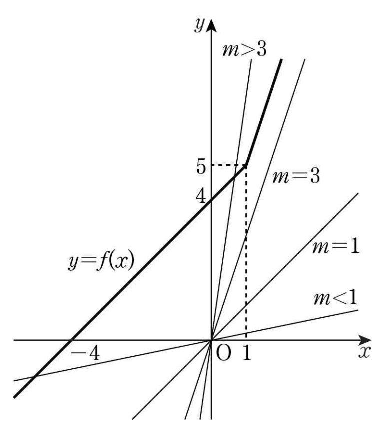
$\therefore$ 참

ㄷ. $a=-1$일 때, $f(x)f(x-a)=f(x)f(x+1)$은 실수 전체에서 연속이다. $\therefore$ 거짓

24. 8

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ 3x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=1$일 때

$\lim_{x\to 1-}g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to 1+}g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}g(x)h(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ⅱ) $x=3$일 때

$\lim_{x\to 3-}g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to 3+}g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to 3-}g(x)h(x)=\lim_{x\to 3+}g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times 2=8$

25. ⑤

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1+}f(x)=1^2-1+2a=2a$이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to 1+}(g\circ f)(x)=(2a)^2+a\times 2a+3=6a^2+3$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=3+a$이므로

$\lim_{x\to 1-}(g\circ f)(x)=(3+a)^2+a\times(3+a)+3=2a^2+9a+12$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2a)=6a^2+3$

따라서 $6a^2+3=2a^2+9a+12$이어야 하므로

$4a^2-9a-9=0$

$(a-3)(4a+3)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-\frac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 $\frac{9}{4}$이다.

〔다른 풀이〕

이차함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=-\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$ 또는

$\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-a$이어야 한다.

$1-1+2a=3+a$에서

$a=3$

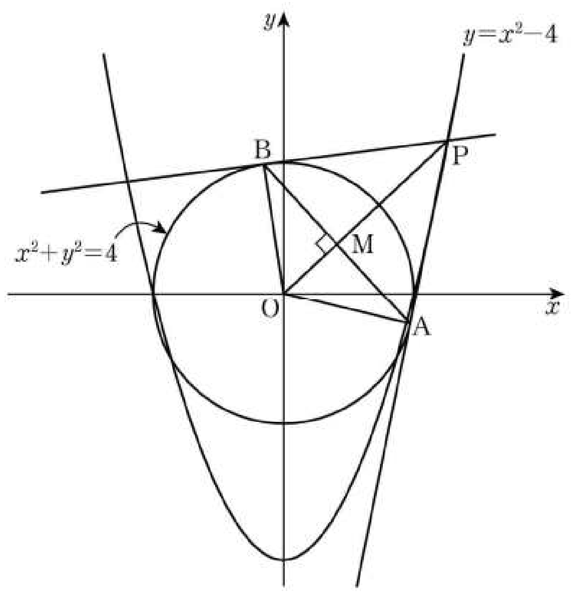
$(1-1+2a)+(3+a)=-a$에서

$a=-\frac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

26. ②



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OA}}$이므로 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\dfrac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\dfrac{S(t)}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=\frac{S(t)+T(t)}{2}:\frac{S(t)}{2}$$

$$\overline{\mathrm{OA}}^2\times\frac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{\mathrm{OP}}^2\times\frac{S(t)}{2}$$

$$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$이므로

$$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\frac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$$

따라서

$$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$$

$$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

27. ②

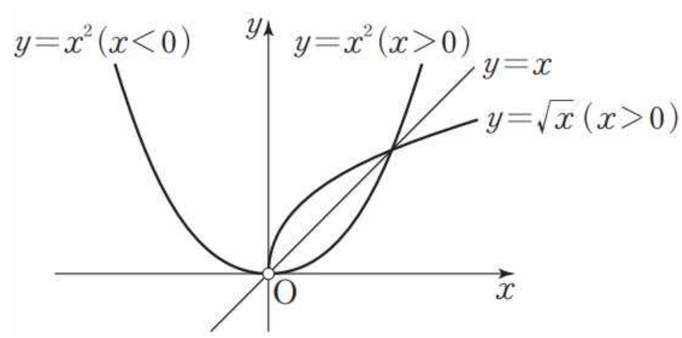
두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $y=tx+2t$이므로 점 Q의 x좌표는 x에 대한 이차방정식 $x^2=tx+2t$, 즉, $x^2-tx-2t=0$의 음의 실근이다.

이차방정식의 근의 공식에 의하여 $x=\dfrac{t^2-\sqrt{t^2+8t}}{2}$이므로

점 Q의 x좌표를 α라 하면

$$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2+8t}}{2}$$

이때 두 함수 $y=x^2\ (x<0)$, $y=x^2\ (x>0)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=x^2\ (x>0)$, $y=\sqrt{x}\ (x>0)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



선분 CD를 y축에 대하여 대칭이동하면 선분 AB가 되므로 두 삼각형 OAP, OCQ는 서로 합동이다.

따라서 삼각형 OAP의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times|\alpha|$$

$$=\frac{1}{2}\times t\times\frac{\sqrt{t^2+8t}-t}{2}$$

$$=\frac{t\left(\sqrt{t^2+8t}-t\right)}{4}$$

(삼각형 OQD의 넓이)=(삼각형 OCD의 넓이)−(삼각형 OCQ의 넓이)

이므로 삼각형 OQD의 넓이 $T(t)$는

$$T(t)=t-S(t)$$

$$=t-\frac{t\left(\sqrt{t^2+8t}-t\right)}{4}$$

$$=\frac{t\left(t+4-\sqrt{t^2+8t}\right)}{4}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{tT(t)}{S(t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t\times\dfrac{t\left(t+4-\sqrt{t^2+8t}\right)}{4}}{\dfrac{t\left(\sqrt{t^2+8t}-t\right)}{4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left\{(t+4)-\sqrt{t^2+8t}\right\}}{\sqrt{t^2+8t}-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left\{(t+4)^2-(t^2+8t)\right\}\left(\sqrt{t^2+8t}+t\right)}{\left\{(t^2+8t)-t^2\right\}\left\{(t+4)+\sqrt{t^2+8t}\right\}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{16t\left(\sqrt{t^2+8t}+t\right)}{8t\left\{(t+4)+\sqrt{t^2+8t}\right\}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{t^2+8t}+t\right)}{\left\{(t+4)+\sqrt{t^2+8t}\right\}}$$

$$=2$$

28. ①

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서

(분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0

$\displaystyle\lim_{x\to3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}=\lim_{x\to3}(2x+a+6)=0$$

이므로 $a=-12$, $b=18$

$f(x)=2x^2-12x+18$
따라서 $f(1)=8$

29. 8
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로
$|f(x)|=f(x)$조
건 (가)에서 함수 $|f(x)g(x)|=f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 연속함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이므로 함수 $\dfrac{f(x)|g(x)|}{f(x)}=|g(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to2+}g(x)=a$, $\lim_{x\to2-}g(x)=b$라 할 때,
$\lim_{x\to2+}|g(x)|=|a|$, $\lim_{x\to2-}|g(x)|=|b|$이고
$|a|=|b|=|g(1)|$이다.

이때 $\lim_{x\to2+}g(x)>\lim_{x\to2-}g(x)$에서 $a>b$이므로
$a>0>b$이고
$b=-a$ … ㉠
한편, 조건 (나)에서
$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-2x-4)=-4$
즉, $\lim_{x\to2-}|f(x)g(x)|=4$이고 함수 $|f(x)g(x)|$는 $x=2$에서 연속이므로
$|f(2)g(2)|=f(2)|g(2)|=4$ … ㉡
또한
$\lim_{x\to2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}(2x-3)=1$
즉, $\lim_{x\to2+}\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|=1$이고 함수 $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|=\dfrac{|g(x)|}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이므로
$\dfrac{|g(2)|}{f(2)}=1$ … ㉢
㉡, ㉢에서 $|g(2)|^2=4$이므로 $|g(2)|=2$
이것을 ㉡에 대입하면
$f(2)=2$
또한, $|a|=|b|=2$이므로 ㉠에서
$a=2,\ b=-2$
따라서
$f(2)\times\left\{\lim_{x\to2+}g(x)-\lim_{x\to2-}g(x)\right\}=2\times(2-(-2))=8$

30. ③
$y'=2x$이므로
점 $\mathrm{P}(2a, 4a^2)$에서의 접선은
$y=4a(x-2a)+4a^2=4ax-4a^2$
$y=0$ 대입하면 $x=a$ $\quad\therefore\ \mathrm{A}(a,0)$
점 A를 지나고 접선에 수직인 직선은
$y=-\dfrac{1}{4a}(x-a)=-\dfrac{1}{4a}x+\dfrac{1}{4}$
$x=0$ 대입하면 $y=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore\ \mathrm{B}\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$
$\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{4}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{16}}$
$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot a=\dfrac{1}{8}a$
원의 반지름 $r(a)=\dfrac{2\cdot\frac{1}{8}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+\frac{1}{16}}}$

$\therefore \lim_{a\to\infty}r(a)=\lim_{a\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+16}}=\dfrac{1}{8}$