P PL

M ATH

L AB

주간지

1주차

지수와 로그

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과

주간지 소개

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

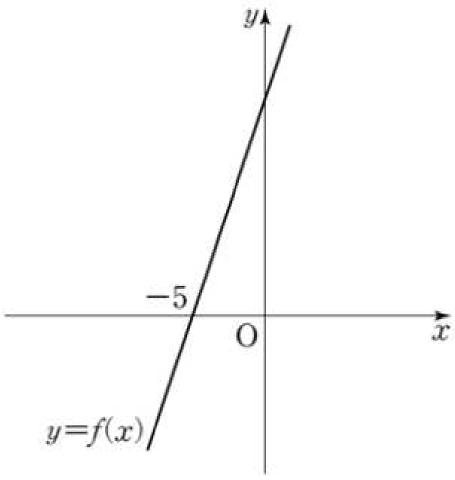
각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 방정식 $x^{\log_2 x} = 8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

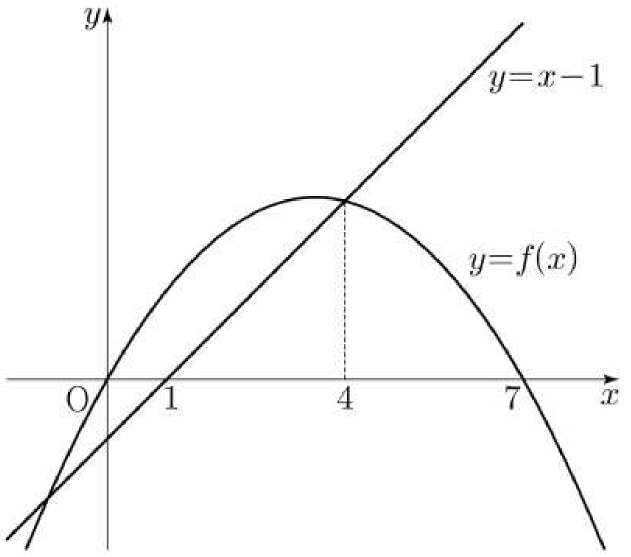
[2014학년도 6월 A형 27번]

2. 일차함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5) = 0$이다. 부등식 $2^{f(x)} \le 8$ 의 해가 $x \le -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]



[2016학년도 6월 A형 28번]

3. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식 $\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $f(0)=f(7)=0,\ f(4)=3$) 〔3점〕



[2020학년도 6월 가형 24번]

4. 자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? 〔3점〕

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

[2021학년도 6월 가형 12번]

5. 로그부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$일 때, 상수 a의 값은? 〔3점〕

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2011학년도 9월 나형 5번]

6. $80^x=2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$, $a^z=8$을 만족시키는 세 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, 양수 a의 값을 구하시오.

〔3점〕

[2013학년도 고3 3월 나형 10번]

7. 1보다 크고 10보다 작은 세 자연수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{\log_c b}{\log_a b}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\log_b c}{\log_a c}=\dfrac{1}{3}$일 때, $a+2b+3c$의 값을 구하시오.

〔4점〕

[2015학년도 고3 4월 A형 15번]

8. 2이상의 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이다.
(나) $\log_a bc+\log_b ac=4$

$a=\left(\dfrac{b}{c}\right)^k$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. 〔3점〕

[2011학년도 고3 3월 나형 10번]

9. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n\ (n=2k-1)\\ \log_2 n\ (n=2k)\end{cases}\quad (k\text{는 자연수})$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여, $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

[2019학년도 고3 4월 나형 19번]

10. 점 $A(0, \sqrt[9]{27})$을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. B를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C라 할 때, 사각형 OABC의 넓이를 S라 하자. $\log_3 S=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

STEP 2

11. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

[2020학년도 9월 나형 28번]

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt{3^n}\right)^{\frac{1}{2}}$과 $\sqrt[n]{3^{100}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2019학년도 고3 4월 나형 29번]

13. 어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} 10^{at}\left(1+10^{at}\right)$$

(단, $W_0 > 0$, $t \geq 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0 > 0$) [3점]

① 13 ② 12 ③ 11 ④ 10 ⑤ 9

[2016학년도 대수능 B형 10번]

14. 두 양수 a, b $(a > b)$에 대하여

$$9^a = 2^{\frac{1}{b}},\ (a+b)^2 = \log_3 64$$

일 때, $\frac{a-b}{a+b}$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{30}}{6}$

[2020학년도 사관학교 나형 15번]

15. $a>1$, $b>1$인 두 상수 a, b에 대하여 원 $(x-\log_3 a)^2+(y-\log_3 b)^2=8$와 직선 $x+y-2=0$이 접하고 $5\log_a 3=\log_b 3$일 때, $\frac{b^4}{\sqrt[5]{a}}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

16. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

[2022학년도 6월 21번]

17. 함수 $f(x) = -(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? 〔4점〕

$(\sqrt{3})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값은 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[2023학년도 9월 11번]

18. 다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $m>0$인 경우
> n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> (ⅱ) $m<0$인 경우
> n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
> $\boxed{\text{(가)}} + \boxed{\text{(나)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? 〔4점〕

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

[2020학년도 고3 3월 가형 18번]

19. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

[2021학년도 대수능 가형 17번]

20. 두 상수 a, $b\,(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

[2022학년도 대수능 13번]

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(n-5)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? 〔4점〕

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

[2021학년도 고3 4월 가형 14번]

22. 2이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? 〔4점〕

① 34　② 38　③ 42　④ 46　⑤ 50

[2019학년도 대수능 나형 B형 15번]

23. 2 이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(4)+f(27)$의 값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 170

[2021학년도 고3 7월 가형 9번]

24. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

[2023학년도 대수능 13번]

25. 2 이상의 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이다. (나) $\log_a bc+\log_b ac=4$

$a=\left(\dfrac{b}{c}\right)^k$이 되도록 하는 실수 k의 값은? [4점]

① 6 ② $\dfrac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\dfrac{15}{2}$ ⑤ 8

[2019학년도 고3 4월 나형 19번]

26. 1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [4점]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다. (나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다. (다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

[2021학년도 고3 4월 나형 16번]

27. 자연수 m에 대하여 집합

$A_m = \left\{(a,\ b)\ \middle|\ 2^a = \dfrac{n}{m},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $A_4 = \{(1,\ 2), (2,\ 1)\}$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다.
ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2018학년도 고3 3월 나형 21번]

28. 부등식 $|\log_2 a - \log_2 10| + \log_2 b \le 1$을 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

[2012학년도 고3 10월 나형 26번]

29. $2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

[2014학년도 대수능 나형 26번]

30. x에 대한 로그방정식

$(\log x + \log 2)(\log x + \log 4) = -(\log k)^2$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값을 범위가 $\alpha < k < \beta$일 때, $10(\alpha^2 + \beta^2)$의 값을 구하시오.

[1994학년도 대수능 13번]

정답 및 해설

빠른 정답					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	4	11번	75	21번	③
2번	15	12번	124	22번	①
3번	15	13번	10	23번	③
4번	①	14번	④	24번	①
5번	②	15번	27	25번	①
6번	64	16번	24	26번	23
7번	30	17번	②	27번	⑤
8번	6	18번	②	28번	②
9번	220	19번	13	29번	16
10번	16	20번	②	30번	25

1. 4

$x^{\log_2 x}=8x^2$ ⋯ ㉠에서

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$(\log_2 x)(\log_2 x)=\log_2 8+\log_2 x^2$

$(\log_2 x)^2=\log_2 2^3+2\log_2 x$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-3=0$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠의 두 실근이 α, β이므로 ㉡의 두 실근은

$\log_2\alpha, \log_2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore\ \alpha\beta=2^2=4$

2. 15

일차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-5)=0$이므로

$f(x)=a(x+5)\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

$2^{f(x)}\le 8$에서 $2^{f(x)}\le 2^3$

밑이 1보다 크므로

$f(x)\le 3$

즉, $a(x+5)\le 3$

$a>0$이므로 $x+5\le\frac{3}{a}$

$x\le\frac{3}{a}-5$

즉, 주어진 부등식의 해가 $x\le\frac{3}{a}-5$이므로

$\frac{3}{a}-5=-4$에서 $\frac{3}{a}=1$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3(x+5)$이므로

$f(0)=15$

3. 15

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$

따라서 $f(x)\le x-1$

$f(x)>0$, $x-1>0$이므로

자연수 x는 $4, 5, 6$이고 그 합은 $4+5+6=15$

4. ①

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$이므로 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$ 일 때,

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 $7, 9, 11$이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$ 일 때,

즉, $3<n<6$이고 n이 짝수이어야 하므로 n은 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

5. ②

$\frac{1}{3}<x<9$에서

$\log_3\frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$

$-1 < \log_3 x < 2$ ⋯ ㉠

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x) > 0$에서

$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a) < 0$이 부등식의 해가 ㉠이므로

$a=2$

6. 64

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이 성립하므로, 주어진 조건에서 2를 밑으로 하는 수를 만들면, $\frac{1}{x}, \frac{2}{y}, -\frac{1}{z}$꼴을 만들 수 있다.

$80^x=2$

$2^{\frac{1}{x}}=80$ ⋯ ㉠

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$

$4^{\frac{1}{y}}=\frac{1}{10}$ ⋯ ㉡

$a^z=8$

$8^{\frac{1}{z}}=a$, $2^{-\frac{1}{z}}=a^{-\frac{1}{3}}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢식을 모두 곱하면,

$2^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}$

$2=\frac{8}{\sqrt[3]{a}}$

∴ $a=64$

7. 30

로그의 밑 변환 공식을 이용하여, 밑을 통일하여 분수꼴로 나타내면

$\frac{\log_c b}{\log_a b}=\frac{1}{2}$,

$\frac{\frac{\log b}{\log c}}{\frac{\log b}{\log a}}=\log_c a$,

$\log_c a=\frac{1}{2}$

∴ $c=a^2$

$\frac{\log_b c}{\log_a c}=\frac{1}{3}$,

$\frac{\frac{\log c}{\log b}}{\frac{\log c}{\log a}}=\log_b a$,

$\log_b a=\frac{1}{3}$

∴ $b=a^3$

a, b, c는 1과 10사이의 자연수이므로,

$1 < a$이고, $b=a^3 < 10$이려면

$a=2$, $b=8$, $c=4$

∴$a+2b+3c=30$

8. 6

조건 (가)에 의하여,

$a^{\frac{1}{3}}=(ab)^{\frac{1}{4}}$

$a^4=(ab)^3$,

$a=b^3$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서, ㉠을 이용하여 정리하면,

$\log_{b^3}bc+\log_b b^3c=\frac{1}{3}\log_b bc+\log_b b^3c=4$

$\frac{10}{3}+\frac{4}{3}\log_b c=4$

$\log_b c=\frac{1}{2}$

이므로, $c=b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$

$a=\left(\frac{c}{b}\right)^k=\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^k=a^{\frac{k}{6}}$

∴ $k=6$

9. 220

(ⅰ) $m=2k_1+1$이고, $n=2k_2+1$일 때,

$mn=2(2k_1k_2+k_1+k_2)+1$

$(k=1, 2, 3, \cdots)$

$f(mn)=\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n=f(m)+f(n)$은 항상 성립

(m,n)의 개수는, m,n이 20이하의 자연수 중 홀수이므로 $10\times10=100$

(ⅱ) $m=2k_1$이고, $n=2k_2$일 때, $mn=4k_1k_2$

$(k=1, 2, 3, \cdots)$

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n=f(m)+f(n)$은 항상 성립

(m,n)의 개수는, m,n이 20이하의 자연수 중 짝수이므로 $10\times10=100$

(ⅲ) $m=2k_1+1$이고, $n=2k_2$일 때, $mn=2(2k_1k_2+k_2)$

$(k=1, 2, 3, \cdots)$

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n=\log_2 m+f(n)$

$\log_2 m+f(n)=f(m)+f(n)$이 성립하려면,

$\log_2 m=\log_3 m$,

$m=1$

n은 20이하의 자연수 중 짝수이므로

$1\times10=10$

(ⅳ) $m=2k_1$이고, $n=2k_2+1$일 때, $mn=2(2k_1k_2+k_1)$

$(k=1, 2, 3, \cdots)$

$f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n=f(m)+\log_2 n$

$f(m)+\log_2 n += f(m)+f(n)$이 성립하려면,

$\log_2 n=\log_3 n$

$n=1$

m은 20이하의 자연수 중 짝수이므로 $10\times1=10$

10. 16

$\mathrm{A}(0,\ \sqrt[9]{27})=\mathrm{A}(0,\ 3^{\frac{1}{3}})$

(점 A를 지나고 x축에 평행한 직선) : $y=3^{\frac{1}{3}}$

$y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$와의 교점 $\mathrm{B}(3^4,\ 3^{\frac{1}{3}})$

(점 B를 지나고 y축에 평행한 직선) : $x=3^4$

$\mathrm{C}(3^4,\ 0)$

사각형 OABC에서, $S=3^{\frac{1}{3}}\times3^4=3^{\frac{13}{3}}$

$\log_3 S=\log_3 3^{\frac{13}{3}}=\frac{13}{3}$

∴$p+q=16$

11. 75

조건 (가)에서

$3^a=5^b=k^c=d(d>1)$이라 놓을 수 있다.

$3^a=d$에서 $a=\log_3 d \cdots$ ㉠

$5^b=d$에서 $b=\log_5 d \cdots$ ㉡

$k^c=d$에서 $c=\log_k d \cdots$ ㉢

조건 (나)에서 $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

$\log c=\log\dfrac{2ab}{2a+b}$

$c=\dfrac{2ab}{2a+b}$

$c(2a+b)=2ab \cdots\cdots$ ㉣

㉠,㉡,㉢을 ㉣에 대입하면

$\log_k d(2\log_3 d+\log_5 d)=2\log_3 d\log_5 d$

$\dfrac{1}{\log_d k}\times\dfrac{2}{\log_d 3}+\dfrac{1}{\log_d k}\times\dfrac{1}{\log_d 5}$

$=\dfrac{3}{\log_d 3}\times\dfrac{1}{\log_d 5}$

$2\log_d 5+\log_d 3=2\log_d k$

$\log_d 75=\log_d k^2$

따라서 $k^2=75$

〔다른풀이〕

조건 (나)에서

$\log c=\log\dfrac{2ab}{2a+b}$이므로

$c=\dfrac{2ab}{2a+b}$, $\dfrac{1}{c}=\dfrac{2a+b}{2ab}$

따라서 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}$이므로

$\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{2a}=1 \cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$3=k^{\frac{c}{a}}$, $5=k^{\frac{c}{b}}$이므로

$k^{\frac{c}{b}+\frac{c}{2a}}$

$=k^{\frac{c}{b}}\times k^{\frac{c}{2a}}$

$=k^{\frac{c}{b}}\times\left(k^{\frac{c}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=k^{\frac{c}{b}}\times\sqrt{k^{\frac{c}{a}}}$

따라서 ㉠에서

$k=5\sqrt{3}$

이므로 $k^2=5^2\times(\sqrt{3})^2=75$

12. 124

$\left(\sqrt{3^n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n}{4}}$, $\sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$

$3^{\frac{n}{4}}$, $3^{\frac{100}{n}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 $n(n\geq 2)$은 4의 배수이고 100의 양의 약수이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $4+20+100=124$

13. 10

$\dfrac{W}{W_0}=\dfrac{1}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$

$3=\dfrac{1}{2}\times 10^{15a}(1+10^{15a})$에서

$(10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$

$(10^{15a}+3)(10^{15a}-2)=0$

$10^{15a}>0$이므로 $10^{15a}=2$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times(1+4)=10$

$\dfrac{1}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})$

14. ④

$9^a=2^{\frac{1}{b}}$에서 $3^{2a}=2$,

$(a+b)^2=\log_3 64$에서 $3^{(a+b)^2}=64=2^6$,

즉 $3^{\frac{(a+b)^2}{6}}=2$

$2a=\dfrac{(a+b)^2}{6}$, $a^2-10ab+b^2=0$,

$t=\dfrac{a}{b}$라 하면 $a>b>0$에서 $t>1$이고

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-10\left(\dfrac{a}{b}\right)+1=0$,

$t^2-10t+1=0$, $t=5+2\sqrt{6}$

$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{4+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

15. 27

원 $(x-\log_3 a)^2+(y-\log_3 b)^2=8$와 직선 $x+y-2=0$이 접하므로 원의 중심 $(\log_3 a,\ \log_3 b)$와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{|\log_3 a+\log_3 b-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$에서

$|\log_3 a+\log_3 b-2|=4$

$\log_3 a+\log_3 b-2=4$ 또는 $\log_3 a+\log_3 b-2=-4\log_3 ab=6$

또는 $\log_3 ab=-2$

$ab=729$ 또는 $ab=\dfrac{1}{9}$

이때 $a>1$, $b>1$이므로 $ab>1$이다.

즉, $ab=729 \cdots\cdots$ ㉠

또 $5\log_a 3=\log_b 3$에서

$\dfrac{5}{\log_3 a}=\dfrac{1}{\log_3 b}$

$\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}=5$

$\log_b a=5$

$a=b^5 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b^5\times b=729$

$b^6=3^6$

$b>1$이므로 $b=3$

$b=3$을 ㉡에 대입하면

$\therefore\ a=3^5$

따라서 $\dfrac{b^4}{\sqrt[5]{a}}=\dfrac{3^4}{\sqrt[5]{3^5}}=\dfrac{3^4}{3}=3^3=27$

16. 24

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅰ) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다. 그러므로 방정식$(x^n-64)f(n)=0$의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ⅱ) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은 $x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$이다.

즉, $x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$

한편, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은 $-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다. 이 값이 음의 정수이기 위해서는

가능한 n은 2, 4, 6, 12뿐이다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)에서 n의 모든 값의 합은 $2+4+6+12=24$이다.

17. ②

$\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{\sqrt{3^{f(n)}}}$, $-\sqrt[4]{\sqrt{3^{f(n)}}}$이므로

$\sqrt[4]{\sqrt{3^{f(n)}}}\times\left(-\sqrt[4]{\sqrt{3^{f(n)}}}\right)$

$=-\sqrt{3^{\frac{1}{4}f(n)}}\times\sqrt{3^{\frac{1}{4}f(n)}}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)}\times 3^{\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)+\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{4}f(n)}$

$=-9$

따라서 $3^{\frac{1}{4}f(n)}=3^2$이므로

$\frac{1}{4}f(n)=2$, $f(n)=8$ …… ㉠

이때, 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이기 위해서는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,8)$을 지나야 한다.

$f(1)=-1+k=8$

$\therefore k=9$

18. ②

(ⅰ) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m,n)의 개수는 $\boxed{{}_{10}C_2=45}$이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 실수인 m의 n제곱근은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m,n)의 개수는 $\boxed{2+4+6+8=20}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m,n)의 개수는

$\boxed{45}+\boxed{20}$이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 45, 20이고 $p+q=65$

19. 13

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log_2 n\le 40$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}log_2 n=\log_2\sqrt{2}n^{\frac{3}{4}}=m$ (m은 40이하의 자연수)

$\sqrt{2}n^{\frac{3}{4}}=2^m$

$n^{\frac{3}{4}}=2^{m-\frac{1}{2}}$

$n=2^{\frac{4}{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)}=2^{\frac{4m}{3}-\frac{2}{3}}$

에서 m이 3으로 나누어 2가 남는 자연수이면 n도 자연수가 된다. 40이하의 자연수 중 조건을 만족하는 m은 $2,5,8,\cdots,38$로 자연수 m의 개수는 13개이다.

20. ②

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$ …… ㉠

두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$

이 식을 정리하면

$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$,

$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$

$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$

$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$

$a^b=b^a$ …… ㉢

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로 $a^b+b^a=40$

㉢을 대입하면

$a^b+a^b=40$

$a^b=20$

따라서 $b^a=20$이므로

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}$
$=(a^b)^2+(b^a)^2$
$=20^2+20^2$
$=800$

21. ③
$2 \le n \le 4$일 때,
$n-5<0$이므로
$f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$ $n=5$일 때, $n-5=0$이므로
$f(5)=1$
$6 \le n \le 10$일 때, $n-5>0$이므로
$f(6)=2$, $f(7)=1$, $f(8)=2$, $f(9)=1$, $f(10)=2$
따라서
$\sum_{n=2}^{10} f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$

22. ①
$5\log_n 2$의 값이 자연수가 되려면
$\log_n 2=1$ 또는 $\log_n 2=\frac{1}{5}$이어야 한다.
$\log_n 2=1$에서 $n=2$
$\log_n 2=\frac{1}{5}$에서 $n=2^5=32$
따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $2+32=34$

23. ③
$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$
(i) $a=4$일 때 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$
$n(n \ge 2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로
$n=2,\ 3,\ 6$
그러므로 $f(4)=6$
(ii) $a=27$일 때 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$
$n(n \ge 2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로
$n=3,\ 9$
그러므로 $f(27)=9$
따라서 $f(4)+f(27)=6+9=15$

24. ③
m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식
$x^n=m^{12}$ ⋯ ㉠의 근이다.
이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.
(i) $m=2$일 때,㉠의 방정식은
$x^n=2^{12}$이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 12$ 이므로 $f(2)=5$
(ii) $m=3$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=3^{12}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 12$ 이므로 $f(3)=5$
(iii) $m=4$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=4^{12}$
즉, $x^n=2^{24}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$이므로 $f(4)=7$
(iv) $m=5$ 일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=5^{12}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 12$ 이므로 $f(5)=5$
(v) $m=6$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=6^{12}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 12$이므로 $f(6)=5$
(vi) $m=7$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=7^{12}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 12$이므로 $f(7)=5$
(vii) $m=8$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=8^{12}$
즉, $x^n=2^{36}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$ 이므로 $f(8)=8$
(vii) $m=9$일 때,
㉠의 방정식은 $x^n=9^{12}$
즉, $x^n=3^{24}$
이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은
$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$이므로$f(9)=7$
따라서,
$\sum_{m=2}^{9} f(m)=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$
$=5+5+7+5+5+5+8+7=5\times5+7\times2+8=47$

25. ①
(가)에서 $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이므로 $a^{\frac{4}{3}}=ab$, $b=a^{\frac{1}{3}}$
(나)에서 $\log_a bc+\log_b ac=\log_a a^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}} ac$
$=\frac{1}{3}\log_a a+\log_a c+3(\log_a a+\log_a c)$
$=\frac{10}{3}+4\log_a c=4$
$\log_a c=\frac{1}{6}$, $c=a^{\frac{1}{6}}$
따라서 $a=\left(\frac{b}{c}\right)^k=\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^k=\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로
$k=6$

26. ①
조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m=a^{\frac{m}{3}}=b$
조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n=b^{\frac{n}{2}}=c$
조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$
$c^4=(b^{\frac{n}{4}})^4=(a^{\frac{m}{3}})^{2n}=a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$
$\frac{2mn}{3}=12$, $mn=18$
조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은
$(2, 9)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$이므로 모든 순서쌍 (m, n)의 개

수는 4이다.

27. ⑤

ㄱ. A_4는 $2^a=\frac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^1\times2,\ 4=2^2\times1$

$A_4=\{(1,2),\ (2,1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$ A_m은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서 $2^k=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$A_{m=}\{(1,2^{k-1}),(2,2^{k-2}),(3,2^{k-3}),\cdots,(k,2^0)\}$이다. 따라서

$n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m 은 $2^a=\frac{m}{b}$에서 $m=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재하므로 $k=1$이어야 한다. 따라서 $m=2^1\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1\times$(홀수)인 자연수는

$2\times5, 2\times7, 2\times9, \cdots, 2\times49$이다.

따라서 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 $5, 7, 9, \cdots, 49$의 개수와 같다.

$5, 7, 9, \cdots, 49$는 첫째항이 5이고 공차가 2인

등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

28. ②

$|\log_2 a-\log_2 10|+\log_2 b\le1$

$\left|\log_2\frac{a}{10}\right|\le1-\log_2 b\le\log_2\frac{2}{b}$

$-\log_2\frac{2}{b}\le\log_2\frac{a}{10}\le\log_2\frac{2}{b}$

$\log_2\frac{b}{2}\le\log_2\frac{a}{10}\le\log_2\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{b}{2}\le\frac{a}{10}\le\frac{2}{b}$

$\therefore 5b\le a,\ ab\le20$

$5b^2\le ab$, 즉, $5b^2\le20\Rightarrow b^2\le4$

b는 자연수이므로 $b=1$ 또는 $b=2$

$b=1$이면 $5\le a\le20$ $\therefore a$는 16개

$b=2$이면 $10\le a\le10$ $\therefore a$는 1개

따라서 순서쌍 (a,b)는 17개

29. 16

$(\sqrt[3]{5^2})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

따라서 $3^{\frac{5}{6}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되므로

$(3^{\frac{5}{6}})^n=3^{\frac{5n}{6}}$은 자연수가 되어야 한다.

이때, $2\le n\le100$ 이므로 n은 6의 배수이어야 하므로

$n=6,\ 12,\ \cdots,\ 96$

즉, n의 개수는 16이다.

30.25

$\log x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+(\log2+\log4)X+(\log2)(\log4)+(\log k)^2=0$ 주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

$D=(\log2+\log4)^2-4(\log2)(\log4)-4(\log k)^2>0$

$-\frac{1}{2}log2<\log k<\frac{1}{2}log2$

$\therefore\frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$

$\therefore 10(\alpha^2+\beta^2)=10(\frac{1}{2}+2)=25$