Ⅰ. 지수

01 거듭제곱의 뜻

상 중 하

1. -3^{10}의 다섯제곱근 중에서 실수인 것을 a라 할 때, $-a$의 네제곱근 중에서 음수인 것은?

[인터넷수능]

① $-\sqrt[5]{3}$ ② $-\sqrt[5]{-3}$ ③ $-\sqrt[4]{3}$
④ $-\sqrt{3}$ ⑤ -3

상 중 하

2. 2의 네제곱근 중 양수인 것을 x라 할 때, x^n이 세 자리의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

[인터넷수능]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

상 중 하

3. 1이 아닌 두 자연수 m, n에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. n이 홀수이면 실수 a의 n제곱근은 한 개이다.
ㄴ. $a<0$, $b<0$이고 n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이다.
ㄷ. $a<0$이고 m은 짝수, n은 홀수이면 $\sqrt[m]{-\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{-a}}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 거듭제곱근의 개수

상 중 하

4. -6의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 m, 10의 네제곱근중 실수인 것의 개수를 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

[수능특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

5. $\sqrt{2}$의 네제곱근 중 음의 실수인 것을 a, $-\sqrt{2}$의 세제곱근 중 실수인 것을 b라고 할 때, ab의 값은?

[수능특강]

① $\sqrt[12]{2^5}$ ② $\sqrt[12]{2^7}$ ③ $\sqrt[24]{2^5}$
④ $\sqrt[24]{2^7}$ ⑤ $\sqrt[32]{2^9}$

상 중 하

6. 임의의 실수 x에 대하여 x의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(x)$라 할 때, 집합 $A=\{f(a)f(b) \mid a,\ b\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는?

[수능특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주관식

상 중 하

7. 실수 x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x,n)$이라 하자.

$$2f(\sqrt{2},4)+3f(\sqrt[5]{-2},5)+4f(-\sqrt[6]{2},6)$$

의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

03 거듭제곱의 계산(1)

상 중 하

8. $\sqrt{(-2)^2}\times\sqrt[3]{(-2)^3}\div\sqrt[3]{(-2)^6}$ 의 값은?

[수능특강]

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

9. $\left(\sqrt{2\sqrt{6}}\right)^4$ 의 값은?

[인터넷수능]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

상 중 하

10. $9^{-\frac{1}{4}}$의 값은?

[수능특강]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

상 중 하

11. $\sqrt[3]{a}=4$, $\sqrt[4]{b}=8$ 일 때, $\sqrt[6]{ab}$ 의 값은?

[수능특강]

① 2　② 4　③ $4\sqrt{2}$
④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

상 중 하

12. $9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{3}$　② 1　③ $\sqrt{3}$
④ 3　⑤ $3\sqrt{3}$

상 중 하

13. $\left(8^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{4}\div\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2^4}}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

상 중 하

14. $8^{\frac{2}{3}}\div 12^{\frac{1}{3}}\times 18^{\frac{2}{3}}$의 값은?

[인터넷수능]

① 3　② 4　③ 6
④ 12　⑤ 18

상 중 하

15. $9^{-\frac{3}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{81^{-3}}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\frac{1}{27}$　② $\frac{1}{6}$　③ 6
④ 18　⑤ 54

상 중 하

16. 임의의 두 양수 a, b에 대하여 두 연산 $\circ$, $*$을 다음과 같이 정의한다.

$$a\circ b=a^{\frac{1}{2}b},\ a*b=a^{\sqrt{b}}$$

이때, $(\sqrt{2}\circ 2\sqrt[4]{2})*4\sqrt{2}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$　② 2　③ $2^{\sqrt{2}}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ $2^{2\sqrt{2}}$

04 거듭제곱의 계산(2)

상 중 하

17. $\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}}}$ 를 간단히 하면? (단, $a>0$, $b>0$)

[수능특강]

① $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{8}}$　② $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{8}}$　③ $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{8}}$
④ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{8}}$　⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{5}{8}}$

상 중 하

18. 1이 아닌 양수 a에 대하여 $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}=a^k$을 만족하는 실수$k$의 값은?

[인터넷수능]

① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{1}{12}$　③ 0
④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{4}$

상 중 하

19. 등식 $\sqrt[6]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\frac{a}{\sqrt[3]{a}}}$ 를 만족시키는 자연수 n의 값은?

[고득점N제]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

05 거듭제곱의 대소비교

상 중 하

20. 세 수 $A=\sqrt{2}$, $B=\sqrt[3]{3}$, $C=\sqrt[6]{6}$의 대소 관계로 옳은 것은?

[인터넷수능]

① $A<B<C$　② $A<C<B$　③ $B<A<C$
④ $C<A<B$　⑤ $C<B<A$

상 중 하

21. 세 수 $A=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $B=\sqrt[4]{\frac{8}{27}}$, $C=\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$의 대소 관계로 옳은 것은?

[고득점N제]

① $A<B<C$　② $A<C<B$　③ $B<A<C$
④ $C<A<B$　⑤ $C<B<A$

상 중 하

22. 두 집합 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-\sqrt[3]{4})>0\}$,
$B=\{x\,|\,(x-2\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{27})<0\}$에 대하여 $A\cup B$ 는?

[인터넷수능]

① $\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>\sqrt[3]{4}\}$　② $\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>2\sqrt{2}\}$
③ $\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>\sqrt[4]{27}\}$　④ $\{x\,|\,1<x<\sqrt[4]{27}\}$
⑤ $\{x\,|\,x$는 실수$\}$

06 미지수가 포함된 식의 계산(1)

상 중 하

23. 실수 a에 대하여 $2^a = 3$일 때, $4^a + 9 \cdot 8^{-a}$의 값은?

[수능특강]

① 4 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$
④ 8 ⑤ $\frac{28}{3}$

상 중 하

24. 실수 x에 대하여 $5^{x+1} - 5^x = 12$, $2^{x+1} + 2^x = 15$일 때, 20^x의 값은?

[수능특강]

① 35 ② 45 ③ 55
④ 65 ⑤ 75

상 중 하

25. 실수 x, y에 대하여 $x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt{3^y}$이 성립할 때, 다음 중 27^y과 같은 것은?

[인터넷수능]

① $\frac{x^3}{2}$ ② $\frac{x^6}{2}$ ③ $\frac{x^3}{4}$
④ $\frac{x^6}{4}$ ⑤ $\frac{x^6}{6}$

상 중 하

26. 실수 a에 대하여 $\frac{2^a + 2^{-a}}{2^a - 2^{-a}} = -2$를 만족시킬 때, $4^a + 4^{-a}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

07 미지수가 포함된 식의 계산(곱셈공식)

상 중 하

27. 실수 x 에 대하여 $2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$ 일 때, $\dfrac{2^{3x}+3+2^{-3x}}{2^{2x}+2^{-2x}}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ 3
④ $\frac{24}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

상 중 하

28. $2^x+2^{-x}=52$ 일 때, $2^{\frac{2}{3}x}-2^{-\frac{2}{3}x}$ 의 값은?

[고득점N제]

① $-8\sqrt{3}$ 또는 $8\sqrt{3}$ ② $-6\sqrt{3}$ 또는 $6\sqrt{3}$
③ $-4\sqrt{3}$ 또는 $4\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ 또는 $2\sqrt{3}$
⑤ $-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}$

상 중 하

29. $3^x-3^{-x}=2$ 일 때, $3^{2x}-3^{-2x}$ 의 값은?

[인터넷수능]

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}+1$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

상 중 하

30. $\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=p$, $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=q$ 라 할 때, $p^2(1-q^2)$ 의 값은? (단, $a>0$, $a\neq 1$)

[고득점N제]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

31. $x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})$ 일 때, $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^6$ 의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{5}$ ② 1 ③ 5
④ 10 ⑤ 25

주관식

상 중 하

32. 등식 $3^a+3^{-a}=5$, $3^b+3^{-b}=7$ 을 만족시키는 a, b 에 대하여 다음 식의 값을 구하시오.

[고득점N제]

$$\{3^{a+b}+3^{-(a+b)}\}\{3^{a-b}+3^{-(a-b)}\}$$

08 미지수가 포함된 식의 계산(2)

상 중 하

33. $3^x = 6^y = 8^z = a$ 이고, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$ 일 때, 양수 a 의 값은?

[수능특강]

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

상 중 하

34. 세 실수 x, y, z 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $xyz \neq 0$
(나) $4^x = 6^y = 9^z$
(다) $x+z=xz$

이 때, y의 값을 구하면?

[고득점N제]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

35. 양의 실수 전체의 집합에서 연산 $*$를

$$a * b = a^b b^{-\frac{a}{2}}$$

으로 정의하자. $(2*4)*x = 8x^{-2}$일 때, x의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

상 중 하

36. $6^x = 2$, $36^{x+y} = 16$ 일 때, $2^{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ 2 ⑤ 6

주관식

상 중 하

37. 세 실수 x, y, z가 $5^x = 7^y = a^z$이고 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$을 만족시킬 때, 양수 a의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

38. 실수 x, y, z 는 다음 등식을 만족시킨다.

$$2^x = 27,\ 18^y = 81,\ 54^z = 243$$

서로소인 자연수 p, q, r 에 대하여 $\frac{p}{x}-\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=0$ 이 성립할 때, $p+q+r$ 의 값을 구하시오.

[고득점N제]

09 거듭제곱의 표현과 자연수

상 중 하

39. $A=\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}\times\sqrt[6]{\sqrt{4}}$ 에 대하여 A^n 이 정수가 되도록 하는 자연 수 n 의 최솟값은?

[수능특강]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

상 중 하

40. 집합 $A=\left\{x \middle| x=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}},\ n\text{은 0이 아닌 정수}\right\}$의 원소 중 자연수인 것의 개수는?

[인터넷수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

41. 자연수 a, b 에 대하여 두 수 $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$ 과 $\sqrt[5]{\frac{3^{b+1}}{2^a}}$ 이 모두 유리수일 때, $a+b$ 의 최솟값은?

[수능특강]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

상 중 하

42. $(\sqrt[3]{2})^{m-1}\cdot(\sqrt[3]{3})^{2n}$이 자연수가 되도록 하는 10 이하의 자연수 m,n의 순서쌍(m,n)의 개수는?

[인터넷수능]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

주관식

상 중 하

43. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ 가 1보다 큰 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 a의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

010 복잡한 식의 계산

상 중 하

44. $a=\sqrt[40]{5}$ 일 때, $\dfrac{a+a^2+a^3+a^4+a^5}{a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$ 의 값은?

[고득점N제]

① $\sqrt[25]{5}$ ② $\sqrt[20]{5}$ ③ $\sqrt[15]{5}$
④ $\sqrt[10]{5}$ ⑤ $\sqrt[5]{5}$

상 중 하

45. $A=\dfrac{a^2+b^2-(a^{-2}+b^{-2})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$, $B=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$ 에 대하여 $A+B$를 간단히 하면?(단, $ab\neq 0$)

[고득점N제]

① -1 ② 1 ③ $a+b$
④ $a-b$ ⑤ $a^{-1}+b^{-1}$

상 중 하

46. $a=\dfrac{2^{\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}+2^{-\sqrt{2}}}$, $b=\dfrac{2^{\sqrt{3}}-2^{-\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}+2^{-\sqrt{3}}}$ 일 때, $\dfrac{4^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-1}{4^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+1}$ 의 값을 a, b로 나타낸 것은?

[고득점N제]

① $\dfrac{a+b}{1+ab}$ ② $\dfrac{a-b}{1+ab}$ ③ $\dfrac{a+b}{1-ab}$
④ $\dfrac{a+b}{a-b}$ ⑤ $\dfrac{a-b}{a+b}$

상 중 하

47. $x=\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}+\sqrt[3]{x^3+3x}$ 의 값은?

[고득점N제]

① $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ $\sqrt[3]{3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$
④ $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ⑤ $2\sqrt[3]{3}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$

상 중 하

48. $2^x = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\frac{1}{1006}}$일 때, $\dfrac{2^x + 2^{2011x}}{2^{-x}+2^{-2011x}}$의 값은 $a+2\sqrt{b}$이다. 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[고득점N제]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

상 중 하

49. 등식 $2^x = \left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$, $2^y = \left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $3x+4y$의 값은?

[고득점N제]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

주관식

상 중 하

50. 방정식 $x^4-3x^2+1=0$의 한 실근을 α라 할 때, 등식

$$(\sqrt[3]{\alpha})^k+(\sqrt[3]{\alpha})^{-k}=3$$

을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

[고득점N제]

로그 / 상용로그

01 로그의 정의

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$일 때, $a^x=b \iff x=\log_a b$

상 중 하

1. $\log_a 2=\log_b 8=\log_c 16=6$ 일 때, $a,\ b,\ c$ 를 각각 한 모서리의 길이로 하는 세 정육면체의 부피의 비는?

[수능 특강]

① $1:\sqrt{2}:2$　② $1:2:2\sqrt{2}$　③ $1:3:4$
④ $4:3:1$　⑤ $2:\sqrt{2}:1$

상 중 하

2. 1이 아닌 두 양수 a,b에 대하여 $a^x=b^y$이 성립할 때, 다음 중 $\frac{y}{x}$의 값과 항상 같은 것은? (단, $xy\neq 0$이다.)

[수능 특강]

① $a-b$　② $b-a$　③ a^b
④ $\log_a b$　⑤ $\log_b a$

상 중 하

3. 양의 실수 a에 대하여 a^m은 양의 실수 b의 n제곱근일 때, 다음 중 두 수 m,n의 곱 mn을 나타낸 것은? (단, $a\neq 1,\ b\neq 1$이고 m은 실수, n은 2 이상의 자연수이다.)

[고득점 N제]

① $\log_a b$　② $\log_a \frac{1}{b}$　③ $\log_b a$
④ $\log_b \frac{1}{a}$　⑤ $\log_{ab} \frac{a}{b}$

상 중 하

4. $\log_2(a+b)=3$, $\log_{ab}4=1$일 때, a^2+b^2의 값은?

[고득점 N제]

① 48　② 52　③ 56
④ 60　⑤ 64

상 중 하

5. 1 보다 큰 서로 다른 양의 실수 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 실수 x 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$a^x=b,\quad x=\log_c d$$

이 때, x 의 값과 항상 같은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $\log_{ac} bd$
ㄴ. $\log_{\frac{a}{c}} \frac{b}{d}$
ㄷ. $\log_{a^2c} bd^2$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 로그의 밑과 진수의 조건

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$일 때, $a^x=b \iff x=\log_a b$ 라 하고
a를 로그의 밑, b를 진수라 한다.

상 중 하

6. $\log_{(x-4)}(-x^2+12x-20)$이 정의되기 위한 모든 정수 x의 값의 합은?

[수능 특강]

① 25 ② 30 ③ 35
④ 40 ⑤ 45

상 중 하

7. $\log_{[x]}(3-|x|-|y|)$가 정의되기 위한 실수 $x,\ y$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내었을 때, 점 P의 영역의 넓이는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

03 로그의 성질 – (1)

$a>0,\ a\neq 1$ 이고 $x>0,\ y>0$ 일 때,
(1) $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$
(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

상 중 하

8. $2\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{2}{3}-\log_2 12$의 값은?

[수능 특강]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

상 중 하

9. $(\log_4 32)\times\sqrt[3]{64}$의 값은?

[수능 특강]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

상 중 하

10. $4^{a-2}=3$일 때, a의 값과 같은 것은?

[인터넷 수능]

① $\log_2\sqrt{3}$ ② $\log_2 2\sqrt{3}$ ③ $\log_2 4\sqrt{3}$
④ $\log_2 6$ ⑤ $\log_2 6\sqrt{3}$

상 중 하

11. $x=(\log_2 12)^2-(\log_2 12)\times(\log_2 9)+(\log_2 3)^2$ 일 때, $\log_2 x$ 의 값은?

[인터넷 수능]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

상 중 하

12. $\log_2 \sin\frac{\pi}{3}+\log_2 \cos\frac{\pi}{4}+\log_2 \tan\frac{\pi}{6}$ 의 값은?

[고득점 N제]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

상 중 하

13. 1 이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 연산 $\#$ 을 $a\#b=\log_{a^2} b$ 로 정의하자. $\log_a b=3$ 일 때, $a\#b=m$, $b^2\#a^2=n$ 이다. mn 의 값은?

[수능 특강]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ 4 ⑤ 9

상 중 하

14. $(\log_6 4)^2+(\log_6 9)^2+\log_6 16\cdot\log_6 9$ 의 값은?

[수능 특강]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 12

상 중 하

15. $\sqrt{(\log_2 6)^2-\log_2 81}$ 의 값은?

[고득점 N제]

① $\log_2\frac{4}{3}$ ② $\log_2\frac{3}{2}$ ③ $\log_2\frac{9}{2}$
④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

상 중 하

16. 세 자연수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a\log_{500}2+b\log_{500}5=c$ (나) a, b, c의 최대공약수는 2이다.

이때, $a+b+c$의 값은?

[인터넷 수능]

① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

04 로그의 성질 – (2) 밑변환 공식

$a>0,\ a\neq1$ 이고 $x>0,\ y>0$ 일 때,

(1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b>0,\ c>0,\ c\neq1$)

(2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (단, $b>0,\ b\neq1,\ c>0$)

상 중 하

17. $\log_{\sqrt{3}} 16^{3\log_2 9}$ 의 값은?

[수능 특강]

① 12 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 48

상 중 하

18. $a=\log_2 10,\ b=2\sqrt{2}$ 일 때, $a\log b$의 값은?

[인터넷 수능]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

상 중 하

19. 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a,b에 대하여 $\log_a b=\log_b a$가 성립할 때, 다음 중 a,b의 관계식으로 옳은 것은?

[인터넷 수능]

① $a+b=1$ ② $ab=1$ ③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$
④ $a^2+b^2=1$ ⑤ $a^3+b^3=1$

상 중 하

20. 1보다 큰 양의 실수 전체의 집합에서 연산 $*$을 다음과 같이 정의하자.

$x * y = x^{\log y}$

이때, $(\sqrt{10} * 4) * 100$의 값은?

[인터넷 수능]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

상 중 하

21. $\log_a x=4,\ \log_b x=6,\ \log_c x=8$ 일 때, $\log_{abc} x$ 의 값은?

[수능 특강]

① $\dfrac{12}{11}$ ② $\dfrac{18}{13}$ ③ $\dfrac{18}{11}$
④ $\dfrac{24}{11}$ ⑤ $\dfrac{24}{13}$

상 중 하

22. $\log_2(\log_3 4)+\log_2(\log_4 5)+\cdots+\log_2(\log_{80}81)$ 의 값은?

[고득점 N제]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

상 중 하

23. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\log_a b=2$
(나) $\log_b abc-\log_b a=3$

이때, $\log_a c$의 값은?

[고득점 N제]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

05 조건을 이용한 식의 값 구하기

(1) $a>0,\ b>0$일 때,

$a^m=b^n \iff a=b^{\frac{n}{m}} \iff b=a^{\frac{m}{n}}$

($m,\ n$은 0이 아닌 실수)

(2) $a>b>0$ 일 때, $\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

(복부호 동순)

(3) 켤레 꼴의 수는 합과 곱을 이용하여 간단히 한다.

상 중 하

24. 1이 아닌 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2=b^3=c^5$이 성립할 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$ 의 값은?

[수능 특강]

① $\frac{91}{30}$　② $\frac{97}{30}$　③ $\frac{107}{30}$
④ $\frac{113}{30}$　⑤ $\frac{119}{30}$

상 중 하

25. $a=\log_4(7+4\sqrt{3})$일 때, 2^a+2^{-a}의 값은?

[수능 특강]

① $2\sqrt{3}$　② 4　③ $2+2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{3}$　⑤ $7+4\sqrt{3}$

상 중 하

26. $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ 일 때, $\log_{243}(2x^2-xy+2y^2)$의 값은?

[수능 특강]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

상 중 하

27. $\log_2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 의 소수 부분을 α라 할 때, $2^{-\alpha}+2^{\alpha}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{-3+4\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{-3+5\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{-2+4\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{-2+5\sqrt{2}}{2}$

06 로그의 성질의 증명

(1) 기본 로그의 성질은 $\log_a x = X$, $\log_a y = Y$ 라 치환한 후 $a^X = x$, $a^Y = y$ 로 바꾼 후 지수법칙을 이용하여 증명한다.
(2) 로그의 밑변환 공식은 양변에 로그를 잡아 증명한다.

상 중 하

28. 다음은 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$이고, m, n은 임의의 실수일 때, $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}log_a b$ $(m\neq0,\ n\neq0)$ 임을 증명한 것이다.

[증 명]

$\log_{a^m}b^n = x$ 라 하면 $b^n=$ (가)

$b=a^{\frac{m}{n}x}$ 이므로

로그의 정의에 의해 (나) $=\log_a b$

$\therefore\ x=\frac{n}{m}log_a b$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

[수능 특강]

① a^{mx}, mnx ② a^{m+x}, $\frac{m+n}{n}x$
③ a^{mx}, $\frac{m}{n}x$ ④ a^{m+x}, $\frac{m+n}{m}x$
⑤ a^{mx}, $\frac{n}{m}x$

상 중 하

29. 다음은 $a>0$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$일 때, $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ 임을 증명하는 과정이다.

[증 명]

$a^{\log_b c}=k$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$\log_b c=$ (가) …… ㉠

(가) $=\frac{\log_c k}{\log_c a}$ 이므로 ㉠에서 $\log_c k=$ (나)

$\therefore\ k=c^{(나)}$

$\therefore\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

[수능 특강]

① $\log_a k$, $\log_a b$ ② $\log_k a$, $\log_b a$ ③ $\log_k a$, $\log_a k$
④ $\log_a k$, $\log_b a$ ⑤ $\log_a k$, $\log_b c$

07 로그의 성질과 도형에의 응용

로그 성질을 이용하여 주어진 식을 정리한 후 주어진 도형의 특징을 이용한다.

상 중 하

30. $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 넓이가 2 이고, $\overline{BA} = a$, $\overline{CA} = b$ 라 할 때, $\log_2(a+b) + \log_2(a-b) = 1 + \log_2(5-b^2)$ 인 관계가 성립한다. 이때, $a+b$ 의 값은?

[수능 특강]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

08 로그의 성질 - 종합

로그의 정의와 기본 성질, 밑변환 공식, 반례 등을 적절히 이용한다.

상 중 하

31. 다음 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능 특강]

[보 기]

ㄱ. $5^a = 3$ 이면 $\frac{1}{a} = \log_3 5$ 이다.
ㄴ. 임의의 두 양수 a, b 에 대하여 $4^{\log_2 a} \times 9^{\log_3 b} = 4ab$ 이다.
ㄷ. $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ 이고, $\log_{a^3} b^2 = 4$ 이면 $\log_{a^2} b^3 = 9$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

32. 1 이 아닌 두 양수 x, y 에 대하여 $L(x, y)$ 를 $L(x, y) = \log_x y$ 로 정의하자. 1 이 아닌 서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능 특강]

[보 기]

ㄱ. $L(a, b) = L(a^2, b^2)$
ㄴ. $L(a, b) \cdot L(b, c) = L(a, c)$
ㄷ. $a^{L(b, c)} = c^{L(a, b)}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 로그의 정수 부분과 소수 부분

(1) $\log_a x$ 의 정수 부분이 n 이면 $n \leq \log_a x < n+1$
(2) $\log_a x$ 의 정수 부분이 n 이면 $\log_a n = [\log_a n]$
(3) $\log_a x$ 의 정수 부분이 n 이면 (소수 부분) $= \log_a x - n$
$\Leftrightarrow \log_a n - [\log_a n]$

상 중 하

33. $\log_3 n$ 의 정수 부분이 4 이고, $\log_5 n$ 의 정수 부분이 2 가 되는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값의 합은?

[인터넷 수능]

① 190 ② 195 ③ 200
④ 205 ⑤ 210

상 중 하

34. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)$는 정수이고, $g(x)$는 0보다 크거나 같고 1보다 작은 실수이다. 두 함수 $f(x), g(x)$가 등식 $5^{f(x)+g(x)} = x$를 만족시킬 때, $f(2011)+f\left(\frac{1}{2011}\right)$의 값은?

[인터넷 수능]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

35. 양수 x 에 대하여 $n \leq \log_4 x < n+1$ (n 은 정수)일 때, $f(x) = n$ 으로 정의한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능 특강]

[보 기]

ㄱ. $f(20) = 2$
ㄴ. $f(a) = 3$ 이면 $f\left(\frac{1}{a}\right) = -3$ 이다.
ㄷ. $f(a) = n$ 이면 $f(a^2) = 2n$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

36. 양수 x에 대하여 $f(x) = \log_2 x - [\log_2 x]$로 정의하자. $100 < n < 200$인 자연수 n 중에서 $f(n) = f(500)$을 만족시키는 n의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

010 이차방정식과 로그

근과 계수와의 관계와 로그의 성질 및 밑변환 공식을 이용한다.

상 중 하

37. 이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 두 근이 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$일 때,
이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 두 근은 $\log_\alpha 4$, $\log_\beta 4$이다. 이 때,
a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수)

[수능 특강]

① 5 ② 9 ③ 13
④ 17 ⑤ 20

상 중 하

38. 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 할 때,
$\dfrac{1}{\log_\alpha(\alpha-\beta)}+\dfrac{1}{\log_\beta(\alpha-\beta)}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\log 5$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

011 로그 기타

상 중 하

39. $1<a<2^{10}$일 때, $\dfrac{1}{\log_a\sqrt[4]{2}}$이 자연수가 되도록 하는 a의 개수는?

[인터넷 수능]

① 35 ② 37 ③ 39
④ 41 ⑤ 43

상 중 하

40. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{A}(\log_3 4)$에 대하여 선분 OA를 $\log_2 3:\log_2\dfrac{5}{3}$로 내분하는 점의 좌표는?

[고득점 N제]

① $\log_4 5$ ② $\log_4 7$ ③ $\log_5 4$
④ $\log_5 6$ ⑤ $\log_6 4$

상 중 하

41. 두 양의 실수 x, y가 $x^2-2xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\log_3(x-y)-\log_3 y$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

상 중 하

42. 다음은 $\log_2 6$이 유리수가 아님을 증명한 것이다.

[증 명]

$\log_2 6$이 유리수라고 가정하고

$\log_2 6=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 양의 정수, $p<q$)로 나타내자.

$6=2^{\frac{q}{p}}$에서 $3^p=\boxed{(가)}$

이때, 3^p은 $\boxed{(나)}$ 이지만 $\boxed{(가)}$ 은 $\boxed{(다)}$ 이므로 모순이다.

따라서 $\log_2 6$은 유리수가 아니다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

[인터넷 수능]

① 2^{p-q}, 홀수, 짝수 ② 2^{q-p}, 짝수, 홀수
③ 2^{q-p}, 홀수, 짝수 ④ 2^{q-p}, 3의 배수, 2의 배수
⑤ 2^{p-q}, 3의 배수, 2의 배수

상 중 하

43. $\log_{128} n^2$이 유리수가 되도록 하는 128 이하의 자연수 n의 개수는?

[인터넷 수능]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

상 중 하

44. $1<a<1000$일 때, $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{a}$의 값이 자연수가 되는 실수 a의 개수는?

[고득점 N제]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

상 중 하

45. 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\log_{2^n}\sqrt[n+1]{243}$ 이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(9)$ 의 값은?

[고득점 N제]

① $\log_2 3$ ② 2 ③ $\log_2 5$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\log_2 9$

상 중 하

46. a 는 $1<a<10$ 인 자연수이고 b 는 $\frac{1}{10}<b<100$ 인 실수일 때, $[\log_a b]$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $\mathrm{M}+m$의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

47. 임의의 자연수 n에 대하여 a_n의 값은 0, 1, 2, 3, 4중의 하나이다.

$$\log_5 3=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots$$

이 성립할 때, a_2의 값은?(단, $\frac{3^{25}}{5^{15}}=27.8$로 계산한다.)

[인터넷 수능]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

상 중 하

48. 서로 다른 두 소수 p, q에 대하여 자연수 $N=p^m\times q^n$ $(m, n$은 자연수$)$의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$라 하자. $\log_N a_1$, $\log_N a_2$, $\cdots$, $\log_N a_k$의 평균은?

[고득점 N제]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

49. 1 보다 큰 자연수 n 에 대하여 등식

$$\log_n a = \log_a b$$

를 만족시키는 $1 < a < b < 1000$ 인 자연수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 이때, $\sum_{n=2}^{5} f(n)$ 의 값은?

[고득점 N제]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

주관식

상 중 하

50. $1 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

012 **상용 로그의 계산**

상용로그의 정의와 로그의 성질을 이용하여 식을 변형 후 계산한다.
이 때, 가수는 반드시 양의 소수인 것에 주의한다.
(1) $10^{n+\alpha} = x \Leftrightarrow \log x = n + \alpha$ (단, n은 정수 $0 \le \alpha < 1$)
(2) $\log x = \overline{n}.\times\times\times \Leftrightarrow \log x = (-n-1) + (1 - 0.\times\times\times)$

상 중 하

51. $10^{1.3711} = 23.5$, $10^{-0.4413} = 0.362$ 일 때, $\log(235 \times 362)$ 의 값은?

[수능 특강]

① 3.8124 ② 3.9298 ③ 4.8124
④ 4.9298 ⑤ 5.8124

상 중 하

52. $\log x^2 = \overline{4}.2468$ 일 때, $\log x^3 + \log\sqrt{x}$ 의 값은? (단, $x > 0$)

[수능 특강]

① $\overline{6}.2468$ ② $\overline{6}.4936$ ③ $\overline{6}.9872$
④ $\overline{7}.4319$ ⑤ $\overline{7}.4936$

상 중 하

53. $\log 2 = 0.30$ 일 때, $\log\sqrt{5\cdot\sqrt[7]{5}}$ 의 값은?

[수능 특강]

① 0.35 ② 0.40 ③ 0.45
④ 0.50 ⑤ 0.55

상 중 하

54. $\log_3 x = 6.5$ 일 때, $\log x^2$ 의 가수는? (단, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

[수능 특강]

① 0 ② 0.12 ③ 0.24
④ 0.36 ⑤ 0.48

상 중 하

55. 정수 n과 실수 $\alpha(0<\alpha<1)$에 대하여 $\log(2^4\times5^2)=n+\alpha$가 성립할 때, 10^n+10^α의 값은?

[인터넷 수능]

① 100 ② 104 ③ 108
④ 116 ⑤ 125

상 중 하

56. $\log x = 2.3$, $\log y = 3.7$ 을 만족하는 두 실수 x, y 를

$x = a\times10^m$, $y = b\times10^n$

(m, n 은 정수, $1\leqq a<10$, $1\leqq b<10$)

으로 나타낼 때, $ab+mn$ 의 값은?

[수능 특강]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

상 중 하

57. $\log\frac{1}{4}$의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, $\log_5 10^\alpha - \log_5 10^n$의 값은?

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

013 조건식이 주어지고 식의 값 구하기

조건에 $a^x = b^y = c^z$ 이 주어지면 $a^x = b^y = c^z = k$라 하고 로그를 취해 주어진 식의 값을 구한다.

주관식

상 중 하

58. 세 실수 x, y, z가 $5^x = 7^y = a^z$이고 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$을 만족시킬 때, 양수 a의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

014 상용로그 지표의 성질 – (1)

(1) $\log A$ 의 지표가 $n(n \geq 0)$이면 정수 A는 $n+1$자릿수이다. $\Leftrightarrow$ $n \leq \log A \leq n+1$
(2) n진법으로 k자리인 정수의 로그 값을 찾을 때에는 밑이 n인 로그를 취한다.

상 중 하

59. 두 자연수 a, b에 대하여 a^2이 7자리의 수이고, ab^3이 20자리의 수이다. 이때, b는 몇 자리의 수인가?

[수능 특강]

① 5자리 ② 6자리 ③ 7자리
④ 8자리 ⑤ 9자리

상 중 하

60. 자연수 n에 대하여 n^n의 자릿수를 $f(n)$이라고 할 때, $f(20) + f(25)$의 값은? (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)

[수능 특강]

① 61 ② 62 ③ 63
④ 64 ⑤ 65

상 중 하

61. 자연수 N에 대하여 N^5이 아홉 자리의 수일 때, $\log N^2$의 지표는?

[고득점 N제]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

상 중 하

62. 양수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$이라 할 때, $f(2n)+f(50n)=6$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

[인터넷 수능]

① 200 ② 300 ③ 400
④ 500 ⑤ 600

상 중 하

63. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(n)$, $g(n)$을 다음과 같이 정의하자.
$f(n)=$(상용로그의 지표가 n인 자연수 중 가장 큰 수)
$g(n)=$(역수의 상용로그의 지표가 $-n$인 자연수 중 가장 작은 수)
자연수 x, y에 대하여 $\log\{f(x)+1\}\log\{g(y)-1\}$을 x, y로 나타내면?

[고득점 N제]

① xy ② $x+y$ ③ $xy-1$
④ $(x-1)(y+1)$ ⑤ $(x+1)(y-1)$

주관식

상 중 하

64. 자연수 a, b는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a^5b^5은 39자리의 수이다.
(나) $\dfrac{a^5}{b^5}$은 정수부분이 21자리인 수이다.

이 때, a는 n자리의 자연수이고, b는 m자리의 자연수이다. $m+n$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

015 상용로그 지표의 성질 − (2)

(1) $\log A$ 의 지표가 $-n(n \geq 0)$이면 A 는 소수점 이하 제 n 번째 자리에서 처음으로 0 아닌 수가 나온다.
(2) n 진법으로 소수점 이하 제 k 번째 자리에서 0 아닌 수가 나오는 수의 로그 값을 찾을 때에는 밑이 n 인 로그를 취한다.

상 중 하

65. $\log 2 = 0.301$ 일 때, $\dfrac{1}{2^{30}}$ 은 소수 n 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나타난다. 이때, n 의 값은?

[수능 특강]

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

상 중 하

66. 10보다 작은 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 때, n의 값은?
(단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$로 계산한다.)

[인터넷 수능]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

상 중 하

67. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{40}$ 은 소수 m 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나타나고, 30^m 은 n 자리의 정수이다. 이때, $m+n$ 의 값은?
(단, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

[수능 특강]

① 21　② 22　③ 23
④ 24　⑤ 25

상 중 하

68. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$ 을 십진법으로 나타낸 수는 소수점 아래 a번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자b가 나타난다. 이때, $a+b$의 값은?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

[인터넷 수능]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

016 상용로그 가수의 성질

가수가 같은 두 상용로그는 진수의 배열이 동일하다.

상 중 하

69. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 가수를 $f(n)$이라 할 때, 집합

$A=\{f(n)|1 \le n \le 150,\ n\text{은자연수}\}$

의 원소의 개수는?

[인터넷 수능]

① 131 ② 133 ③ 135
④ 137 ⑤ 139

상 중 하

70. 두 자연수 A, B 에 대하여 $\log A - \log B$가 자연수일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. A는 B로 나누어 떨어진다.

ㄴ. $\dfrac{A^4}{B^3}$의 숫자의 배열은 A의 숫자의 배열과 같다.

ㄷ. $\dfrac{A^3}{B^4}$의 숫자의 배열은 B의 숫자의 배열과 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

017 상용로그 가수의 조건 - (1) 가수가 같을 때

(1) $\log x$의 지표가 n이면 $n \le \log x < n+1$이다.
(2) $\log x$의 가수와 $\log y$의 가수가 서로 같으면
$\log x - \log y = (\text{정수})$이다.
(3) $\log x$의 가수와 $\log y$의 가수가 서로 같다
$\Leftrightarrow \log x - [\log x] = \log y - [\log y]$

상 중 하

71. 다음 두 조건을 만족하는 모든 실수 x 의 곱은?

[수능 특강]

(가) $\log x$ 의 지표는 2 이다.
(나) $\log x^2$ 의 가수와 $\log\sqrt{x}$ 의 가수가 서로 같다.

① $10^{\frac{8}{3}}$ ② $10^{\frac{10}{3}}$ ③ $10^{\frac{14}{3}}$
④ $10^{\frac{16}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{20}{3}}$

상 중 하

72. 다음 두 조건을 만족하는 모든 실수 x 의 곱은?

[수능 특강]

(가) $\log x$ 의 지표는 1 이다.
(나) $\log x^2$ 의 가수와 $\log\dfrac{1}{x}$ 의 가수가 서로 같다.

① 10^3 ② $10^{\frac{10}{3}}$ ③ $10^{\frac{11}{3}}$
④ 10^4 ⑤ $10^{\frac{13}{3}}$

상 중 하

73. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0, b>0$이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\frac{a^2}{b^2}=100$이면 $f(a)=f(b)$이다.

ㄴ. $f(a^3)=f(a)$이면 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $f(a^2)=3f(a)$를 만족하는 무리수 a는 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

018 상용로그 가수의 조건 – (2) 가수의 합이 1일

(1) $\log x$의 지표가 n이면 $n \le \log x < n+1$이다.
(2) $\log x$의 가수와 $\log y$의 가수의 합이 1이면
$\log x + \log y = $(정수)이다.

상 중 하

74. $1<x<10$인 실수 x에 대하여 $\log x$의 가수와 $\log x^3$의 가수의 합이 1일 때, 모든 x의 값의 곱은?

[수능 특강]

① $10^{\frac{3}{4}}$ ② $10^{\frac{5}{4}}$ ③ $10^{\frac{3}{2}}$
④ $10^{\frac{7}{4}}$ ⑤ 10^2

019 상용로그 가수의 조건 - (3) 최고자리 수 구하기

구하는 식의 상용로그 값을 구한 후 이 값의 가수와 주어진 상용로그 값의 소수 부분을 비교하여 최고자리 수를 결정한다.

주관식

상 중 하

75. 자연수 n과 $1 \le m < 10$인 자연수 m에 대하여 부등식 $m \le \frac{3^{20}}{10^n} < m+1$이 성립할 때, $m+n$의 값을 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.)

[고득점 N제]

상 중 하

76. 자연수n에 대하여 2^{10n}의 최고 자리의 숫자를 a_n이라 하자. 예를 들어, $2^{10 \cdot 1} = 2^{10} = 1024$, $2^{10 \cdot 2} = 2^{20} = 1048576$이므로 $a_1 = a_2 = 1$이다. 이때, $a_n > 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.30103$임을 이용한다.)

[인터넷 수능]

020 상용로그 지표와 가수의 성질 - 종합

상 중 하

77. $\log x$ 의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능 특강]

[보 기]

ㄱ. $\alpha = 0.5$이면 $\log x$ 의 가수와 $\log\frac{1}{x}$의 가수는 서로 같다.

ㄴ. $\log x$ 의 가수와 $\log\frac{1}{x}$의 가수의 합은 1이다.

ㄷ. $\log x$ 의 지표와 $\log x^2$의 지표의 합이 10이면 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

78. 다음 두 조건을 만족하는 모든 실수 x 의 곱은?

[수능 특강]

(가) $\log 2x$ 의 지표는 2이다.
(나) $\log x^2$ 의 가수는 0이다.

① 10^3 ② $10^{\frac{7}{2}}$ ③ 10^4
④ $10^{\frac{9}{2}}$ ⑤ 10^5

021 상용로그 지표와 가수 조건의 성질 활용

상 중 하

79. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. a, b가 두 자리 자연수 일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(ab)=f(b)$이면 $f(a)=0$이다.

ㄴ. $f(a^2)=f(a)$를 만족시키는 a는 1개다.

ㄷ. $f(ab)=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 4개다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

80. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를$g(x)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $a>0$, n은 자연수이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(a^n)+g(a^n)=n\{f(a)+g(a)\}$

ㄴ. $f(a^2)=2f(a)$이면 $f(a^3)=3f(a)$이다.

ㄷ. $g(a^2)=g(a)$이면 $g(a^n)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

상 중 하

81. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $g(x)$라 하자. 다음 두 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

[수능 특강]

(가) $\log a=2+g(b)$, $\log b=1+g(a)$
(나) $g(ab)=g(a)+g(b)$

상 중 하

82. 세 집합

$X=\{x \mid x>0\}$, $Y=\{y \mid y$는 정수$\}$, $Z=\{z \mid 0\leq z<1\}$
에 대하여 두 함수 $f: X\to Y$, $g: X\to Z$가 다음을 만족한다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $10^{f(x)+g(x)}=x$이다.

$f(ab)=5$를 만족하는 두 양수 a, b에 대하여 $g(a)+g(b)=1.3$이면 $f(a)+f(b)$의 값은?

[수능 특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

83. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 두 자리의 자연수 p, q에 대하여 $f(pq) \neq f(p)+f(q)$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(pq)=3$

ㄴ. $p<10\sqrt{10}$이면 $q>10\sqrt{10}$이다.

ㄷ. $p>10\sqrt{10}$이면 $q<10\sqrt{10}$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

상 중 하

84. 두 자연수 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, $\log A^3B^2$의 지표는?

[고득점 N제]

(가) A는 두 자리의 자연수이고 B는 세 자리의 자연수이다.
(나) A는 10보다 큰 수이다.
(다) A와 $\frac{1}{B}$의 상용로그의 가수는 같다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

상 중 하

85. 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

(가) $[\log x]=5$

(나) $\log x = \frac{1}{4}[\log x^2] - \frac{1}{4}\left[\log \frac{1}{x^2}\right]$

① 5 ② 15 ③ 16
④ $\frac{33}{2}$ ⑤ $\frac{43}{2}$

상 중 하

86. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 정의하자. 100 이하의 자연수 x_1, x_2에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$이면 $f(x_1x_2)=0$이다.

ㄴ. $f({x_1}^2)=f(x_1)$을 만족시키는 x_1의 개수는 3이다.

ㄷ. $x_1<x_2$이고 $f(x_1)=f(x_2)$를 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 10이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

022 상용로그와 가우스 기호

$\log A$ 의 지표가 $n(n \geq 0)$이면 정수 A는 $n+1$자릿수이다.
$\Leftrightarrow$ $n \leqq \log A \leqq n+1$
$\Leftrightarrow$ $[\log A]=n$

상 중 하

87. x 보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라 하자.
$[\log N]=2$, $[\log 2N]=2$, $[\log 3N]=3$을 동시에 만족하는 자연수 N의 개수는?

[수능 특강]

① 166 ② 186 ③ 208
④ 226 ⑤ 242

023 상용로그의 지표와 가수 + 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\log A$의 지표와 가수이다.
$\Rightarrow$ $\log A=n+\alpha$(단, n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)에서
$n+\alpha=-\dfrac{b}{a}$, $n \cdot \alpha=\dfrac{c}{a}$

상 중 하

88. $\log x$ 의 지표와 가수가 이차방정식 $4x^2-7x+k=0$의 두 근 일 때, 상수 k의 값은?

[수능 특강]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

상 중 하

89. 다음 두 조건을 만족하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+b$의 값은?

[인터넷 수능]

(가) 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근은 $\log c$의 지표와 가수이다.
(나) 이차방정식 $x^2+ax+b-\dfrac{3}{2}=0$의 두 근은 $\log\dfrac{1}{c}$의 지표와 가수이다.

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

주관식

상 중 하

90. 양의 실수 p에 대하여 이차방정식 $2x^2+5x+a=0$의 두 근이 $\log p$의 지표와 가수이고, 이차방정식 $2x^2+bx+c=0$의 두 근이 $\log \frac{1}{p}$의 지표와 가수일 때, 상수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

024 상용로그 실생활에의 응용

(1) '몇 배?' 라는 꼴의 문제는 주어진 조건에 맞추어 두 개의 식을 세운 후 변변 뺀다.
(2) 로그식이 주어질 경우는 로그의 성질을 이용하여 정확히 계산한다.

상 중 하

91. 세기 a 인 음파가 어떤 물체를 통과한 후 세기 b 가 되었을 때, 그 물체의 음파감쇄율 p 를 $p=k\log\frac{b}{a}$ (k 는 상수) 로 나타낸다.
$p=-3$ 인 물체를 통과한 음파의 세기가 통과하기 전 음파의 세기의
$\frac{1}{\sqrt{10}}$ 배가 되었다고 할 때, $p=-9$ 인 물체를 통과한 음파의 세기는
통과하기 전 음파의 세기의 몇 배가 되는가?

[수능 특강]

① $\frac{1}{10}$ 배 ② $\frac{1}{30}$ 배 ③ $\frac{\sqrt{10}}{100}$ 배
④ $\frac{1}{100}$ 배 ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{1000}$ 배

상 중 하

92. 광원에서 단위시간에 나오는 빛의 양을 '광도'(단위는 cd)라 하고, 그 빛이 관측지점에서 측정되는 밝기를 '조도'(단위는 lx)라고 한다. 광도 I 인 등대로부터 xm 떨어진 곳에서 측정되는 조도 L 은 다음과 같이 계산한다.

$$L=\frac{I\cdot 10^{-kx}}{x^2} \text{ (}k\text{ 는 기상상태에 따른 상수)}$$

광도 $I=4\times10^5$ 인 어떤 등대에서 2000m 떨어진 곳에서 측정된 조도가 $L=4\times10^{-7}$ 일 때, 기상상태에 따른 상수 k 의 값은?
(단, $\log2=0.3$ 으로 계산한다.)

[수능 특강]

① 1.3×10^{-2} ② 1.7×10^{-2} ③ 2.3×10^{-3}
④ 2.7×10^{-3} ⑤ 2.3×10^{-4}

상 중 하

93. 소리의 세기가 $I(W/cm^2)$인 음원으로 $r(cm)$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기(데시벨)를 $P(I,\ r)$라 하면

$$P(I,\ r)=10\left(12+\log\frac{I}{r^2}\right)$$

가 성립한다고 한다. 음원으로부터 측정 지점의 거리를 10배로 늘이면 소리의 상대적 세기는 몇 데시벨 감소하는가?

[인터넷 수능]

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

상 중 하

94. 사람의 귀로 들리는 소리의 세기는 소리 에너지의 크기에 의하여 정해지는데, 귀로 들을 수 있는 가장 작은 소리를 0(dB)이라 하고 그 때의 소리 에너지의 크기를 P_0, 소리 에너지의 크기가 P인 소리가 사람의 귀로 들릴 때의 소리의 세기를 D(dB)라 하면 $D=10\log\frac{P}{P_0}$가 성립한다고 한다. 소리의 세기 110(dB)인 공사장 소음의 소리 에너지의 크기를 A, 소리의 세기 117(dB)인 제트기 소음의 소리 에너지의 크기를 B라 할 때, $\frac{B}{A}$의 값은? (단, $\log2=0.3$으로 계산한다.)

[고득점 N제]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

상 중 하

95. 컴퓨터 스크린에서 마우스를 이용하여 아이콘을 클릭할 때의 어려운 정도 P는 아이콘의 너비 $W(mm)$와 마우스의 포인터에서 아이콘까지의 거리 $D(mm)$에 대하여

$$P=\frac{1}{\log2}\times\log\frac{2D}{W}$$

인 관계가 있다고 한다. 마우스 포인터에서 $100mm$ 떨어진 두 아이콘 A, B를 클릭할 때의 어려운 정도를 각각 P_A, P_B라 하고, 두 아이콘 A, B의 너비를 각각 W_A, W_B라 하자, $P_A=5, P_B=3.5$일 때, $\frac{W_B}{W_A}$의 값은? [인터넷 수능]

① $\sqrt{2}$ ② 1.5 ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 2.25

주관식

상 중 하

96. 대기 중의 기압은 해수면으로부터의 고도가 $4.5km$씩 상승할 때마다 절반으로 감소한다고 한다. 기압이 각각 $50kPa$, $10kPa$인 두 지점의 고도차는 akm이다. $10a$의 값을 구하시오. (단, $\log2=0.3$으로 계산한다.)

[인터넷 수능]

025 상용 로그 기타

상 중 하

97. $0<a<1$인 a에 대하여 10^a을 3으로 나눌 때, 몫이 정수이고 나머지가 2가 되는 모든 a의 값의 합은?

[인터넷 수능]

① $3\log 2$　② $6\log 2$　③ $1+3\log 2$
④ $1+6\log 2$　⑤ $2+3\log 2$

상 중 하

98. $0<x<1$인 실수 x에 대하여 상용로그 $\log x$의 가수를 α라 하자. 이때, 등식 $(\log x)^2+\alpha^2=8$이 성립하도록 하는 $\log x$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$　② $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$　③ $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$
④ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

상 중 하

99. 자연수 N의 상용로그의 지표와 가수를 각각 n, α라 할 때, 자연수 N에 좌표평면 위의 점 (n, α)를 대응시키자. 자연수 x, y, z에 대하여 $1 \le x < 10$, $10 \le y < 10^2$, $10^3 \le z < 10^4$일 때, 세 수 x, y, z에 대응하는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이 세 점이 한 직선 위에 있을 때, 세 수 x, y, z사이의 관계로 항상 옳은 것은?

[고득점 N제]

① $y^2 = xz$ ② $y^3 = x^2 z$ ③ $y^3 = xz^2$
④ $z = xy^2$ ⑤ $z = (xy)^2$

행렬과 그 연산

01 행렬의 성분

상 중 하

1. 정의역이 $X=\{1,\ 2\}$인 두 함수 $f,\ g$가

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=3-x$$

로 정의된다. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=f(i)+g(j)$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

[수능특강]

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

상 중 하

2. 정의역이 $X=\{1,\ 2\}$인 두 함수 $f,\ g$가

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=3-x$$

로 정의된다. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=f(i)+g(j)$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

[수능특강]

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

상 중 하

3. 그림과 같이 정의된 함수 $f:X\to X$에 대하여 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를

$$a_{ij}=\begin{cases}(f\circ f)(i) & (i=j \text{ 일 때})\\ f(i+j)-f(i) & (i\neq j \text{ 일 때})\end{cases}$$

로 정의한다. 이때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

[수능특강]

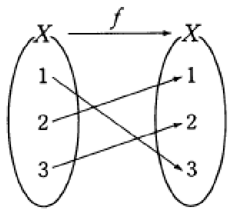
① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

상 중 하

4. 오른쪽 그림과 같이 정의된 함수 $f:X\to X$에 대하여 3×3행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}를

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (f(f(i))\geq j)\\ 0 & (f(f(i))<j)\end{cases}$$

이라 하자.
이 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?



[인터넷 수능]

① 2　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 8

상 중 하

5. 이차정사각행렬 A의 (i, j)성분 $a_{ij}(i=1,2,\ j=1,2)$가

$$a_{ij}=\cos\left(\frac{i}{2}\pi-\frac{j}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

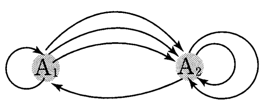
일 때, 행렬 $A^2+A^4+A^6+A^8+\cdots+A^{100}$의 모든 성분의 합은?

[고득점 N제]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

상 중 하

6. 오른쪽 그림은 두 지점 A_1, A_2 사이에 정보를 주고 받는 통신망을 나타낸 것이다. 이차정사각행렬 P의 $(i,\ j)$성분을 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$라 할 때,



$a_{ij}=$(1개의 회선을 따라 A_i에서 A_j로 가는 방법의 수)

로 정의하자. 예를 들어, $a_{11}=1$, $a_{12}=3$이다.

다음 중 A_1에서 두 개의 회선을 거쳐 A_2로 가는 방법의 수와 같은 것은?

[인터넷 수능]

① $2P$의 (1, 2) 성분　② $2P$의 (2, 1) 성분
③ P^2의 (1, 2) 성분　④ P^2의 (2, 1) 성분
⑤ P^2의 (1, 2) 성분과 (2, 1) 성분의 합

상 중 하

7. 다음과 같이 $(i, i)(i=1, 2, 3, 4)$성분이 모두 0인 4차정사각행렬 A가 있다.

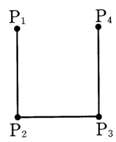
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

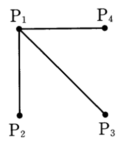
행렬 A의 $(i, j)(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4)$성분을 a_{ij}라 할 때, 평면 위에 4개의 점 P_1, P_2, P_3, P_4가 다음 규칙에 의해 선분으로 연결되어 있다.

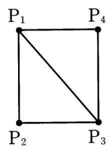
(가) $a_{ij}=1$이면 점P_i와 점P_j는 하나의 선분으로 직접 연결되어 있다. (나) $a_{ij}=0(i\neq j)$이면 P_i와 점P_j는 직접 연결되어 있지 않다.

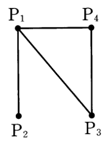
이때, 다음 중 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4의 연결 상태를 바르게 나타낸 것은?

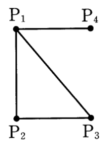
[인터넷 수능]

①


②


③


④


⑤


02 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

상 중 하

8. 두 행렬 A, B가

$3A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $2A-B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

을 만족할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

[인터넷 수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

9. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & k \end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, 상수 k의 값은?

[수능특강]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

10. 행렬 A, B, X, Y에 대하여

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

이고 $\begin{cases} 2X+Y=A+3B \\ X-Y=2A \end{cases}$ 를 만족할 때, 행렬 $X+Y$의 $(2,\ 2)$성분은?

[수능특강]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

03 행렬의 곱셈

상 중 하

11. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x\\ y & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)(A+B)=A^2-BA-B^2$이 성립할 때, xy의 값은?

[인터넷 수능]

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

상 중 하

12. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^3(A+B)$의 $(2,\ 1)$성분은?

[수능특강]

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

상 중 하

13. 임의의 이차정사각행렬 A, B에 대하여 연산 $\circ$을 $A\circ B=2AB$로 정의하자. 세 행렬 A, B, C에 대하여

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ B+C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 $(A\circ B)+(A\circ C)$의 $(1,\ 1)$성분과 $(2,\ 2)$성분의 곱은?

[수능특강]

① -24　② -12　③ 12
④ 24　⑤ 36

상 중 하

14. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 행렬 A, B를

$$A=\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ \beta & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\beta & 2\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}$$

라 하자. 행렬 AB의 모든 성분의 합이 36일 때, 상수 k의 값은?

[수능특강]

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

상 중 하

15. 실수 x, y에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$를 $x◎y$로 나타내기로 하자.

즉, $x◎y=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$이다. 이때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, a, b, c, d는 실수이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $(ac)◎(bc)=c(a◎b)$

ㄴ. $(a◎b)+(c◎d)=(a+c)◎(b+d)$

ㄷ. $(a◎b)(c◎d)=(ac+bd)◎(ad+bc)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

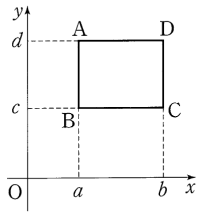
16. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$과 두 행렬 B, C에 대하여 행렬 $(A+B)+AC$가 정의될 때, 행렬 B는 $p\times q$행렬이고, 행렬 C는 $r\times s$ 행렬이다.

$p+q+r+s$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

17. 그림과 같이 제1사분면에 있는 직사각형 ABCD를 행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대응시킬 때, 이 직사각형의 넓이를 S_M 이라 하자. 두 행렬 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여



$R=PQ$라 할 때, S_R의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

18. 자연수 n에 대하여 행렬 A_n을

$$A_n=\begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$$

로 정의할 때, 등식 $A_{10}A_k=A_{100}$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

19. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 행렬 X의 개수를 구하시오.

(가) $AX=XA$ (나) 행렬 X의 성분은 집합 $\{0, 1, 2, 3\}$의 원소이다.

[고득점 N제]

04 행렬의 거듭제곱

상 중 하

20. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=2^{16}E$를 만족하는 자연수 n의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[수능특강]

① 8 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 40

상 중 하

21. 행렬A $=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $A^k=A^{2011}$을 만족시키는 세 자리의 자연수 k의 최댓값은?

[인터넷 수능]

① 991 ② 993 ③ 995
④ 997 ⑤ 999

상 중 하

22. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^{15}=E$, $A^{24}=E$가 성립한다. 이때, $A^3+A^6+A^9+A^{12}=kE$를 만족하는 실수 k의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[수능특강]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

상 중 하

23. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^3=\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ g(x) & 1 \end{pmatrix}$이라 하자.
x에 대한 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

[인터넷 수능]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

상 중 하

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$와 단위행렬 E에 대하여 등식

$$A+A^2+A^3+A^4=6A+pE$$

가 성립할 때, 두 상수 a, p의 합 $a+p$의 값은? (단, $a>0$)

[인터넷 수능]

① 24　② 28　③ 32
④ 36　⑤ 40

상 중 하

25. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^3의 모든 성분의 합은?

[수능특강]

① 16　② 17　③ 18
④ 19　⑤ 20

상 중 하

26. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 임의의 자연수 n에 대하여 $A^{n+3}+A^n=O$를 만족시킬 때, 다음 중 A^{2010}과 같은 행렬은? (단, O는 영행렬이다.)

[고득점 N제]

① A　② A^2　③ A^4
④ A^5　⑤ A^6

상 중 하

27. $A^2=A-E$를 만족시키는 이차정사각행렬 A와 실수 m, n에 대하여 등식

$$(A+E)^{10}=mA+nE$$

가 성립할 때, mn의 값은?(단, E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

① -3^{10}　② -3^5　③ 1
④ 3^5　⑤ 3^{10}

주관식

상 중 하

28. 행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$와 실수 $a_i(i=0,1,2,3,\cdots,20)$에 대하여

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+a_3A^3+\cdots+a_{20}A^{20}=\begin{pmatrix}11&10\\10&11\end{pmatrix}$$

일 때, $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$의 값을 구하시오. (단, E는 단위 행렬이다.)

[고득점 N제]

상 중 하

29. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{10}의 모든 성분의 합을 $3^9\times k$라 할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

30. 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$에 대하여 A^n의 모든 성분의 합이 2^{33}이다. $10\leq a\leq 20$이고 a는 자연수일 때, 두 자연수 a, n의 합 $a+n$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

31. 이차정사각행렬 A, B가

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}5&0\\\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix}-4&0\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$을 만족시킨다. 행렬 $(A+B)^{2n}$의 모든 성분의 합이 100이 될 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

32. 자연수 n과 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^n의 모든 성분의 합을 S_n이라 할 때, $[\log_3 S_{100}]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

05 행렬의 곱셈의 활용

상 중 하

33. 다음은 세 학생 A, B, C가 3회에 걸쳐 치른 수학 시험 성적을 나타낸 표이다.

학생＼회차	1회	2회	3회
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

이 때, 세 행렬 $P=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $Q=\frac{1}{3}(0 \quad 0 \quad 1)$, $R=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 QPR의 계산 결과로 얻을 수 있는 것은?

[인터넷 수능]

① 1회에서의 세 학생의 수학 성적의 평균
② 2회에서의 세 학생의 수학 성적의 평균
③ 3회에서의 세 학생의 수학 성적의 평균
④ A의 1, 2, 3회의 수학 성적의 평균
⑤ C의 1, 2, 3회의 수학 성적의 평균

상 중 하

34. 어느 회사에서 두 부서 A, B에 근무하는 직원들을 다음과 같이 매년 일정한 비율씩 부서간 이동을 시키고 있다.

> (가) A 부서 인원의 20%를 B부서로 이동한다.
> (나) B 부서 인원의 30%를 A부서로 이동한다.
> (다) 이동하지 않는 나머지 인원은 원래의 부서에 남는다.

작년도의 A, B 부서의 인원이 각각 a명, b명이고, 내년도의 A, B 부서의 인원을 각각 x명, y명이라 할 때, 등식

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 & \alpha \\ 0.3 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

를 만족시키는 α, β에 대하여 $\alpha-\beta$의 값은? (단, 두 부서의 인원의 합은 매년 일정하다.)

[인터넷 수능]

① -0.25 ② -0.2 ③ -0.15
④ -0.1 ⑤ -0.05

상 중 하

35. 회사원 K씨는 승용차로 출퇴근하는데 월요일과 토요일에 출근할 때와 퇴근할 때의 자동차의 속력과 걸린 시간은 각각 [표1], [표2]와 같다.

[표 1] (단위 : km/시)

	출근할 때	퇴근할 때
월요일	30	40
토요일	60	60

[표 2] (단위 : 시간)

	월요일	토요일
출근할 때	0.8	0.4
퇴근할 때	0.6	0.4

행렬 $A=\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 60 & 60 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이라 하고, 행렬 X의 $(a,\ b)$성분을 간단히 $X(a,\ b)$와 같이 나타낼 때, 다음 중 회사원 K씨가 월요일에 출근할 때와 퇴근할 때의 자동차의 평균 속력을 나타내는 것은? (단, 출근할 때와 퇴근할 때의 자동차는 각각 일정한 속력으로 달린다.)

[고득점 N제]

① $\dfrac{AB(1,\ 1)}{CB(1,\ 1)}$ ② $\dfrac{AB(1,\ 1)}{BC(1,\ 1)}$ ③ $\dfrac{BA(1,\ 2)}{CB(1,\ 2)}$
④ $\dfrac{BA(1,\ 2)}{BC(1,\ 2)}$ ⑤ $\dfrac{AB(2,\ 1)}{CB(2,\ 1)}$

주관식

상 중 하

36. 어느 지역에 조류 A바이러스가 유행하고 있다. 이 바이러스에 감염된 오리와 닭이 각각 x마리, y마리일 때, 오리와 닭을 격리하지 않으면 1일 후에는 이 바이러스에 감염된 오리와 닭은 각각 $(3x+y)$마리, $(x+2y)$마리가 된다고 한다. 현재 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수가 각각 a, b이고 오리와 닭을 격리하지 않은 채 4일이 지났을 때 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수를 각각 p, q라 하면 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=X\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다. 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오.

[고득점 N제]

06 행렬의 곱셈의 성질

상 중 하

37. 행렬$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $A+B=E$를 만족시킬 때, 행렬A^2B+AB^2은? (단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

① $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

상 중 하

38. 두 행렬 A, B가

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ AB+BA=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

을 만족할 때, 행렬A^2+B^2의 모든 성분의 합은?

[인터넷 수능]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

상 중 하

39. 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ AB+BA=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 A^2+B^2은?

[수능특강]

① $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 5\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 7\end{pmatrix}$

상 중 하

40. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $2A+X=ABA$를 만족하는 행렬 X는?

[수능특강]

① $\begin{pmatrix}9 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}10 & 2\\ -6 & -1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}11 & 1\\ -2 & -4\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}12 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}13 & -2\\ 6 & 2\end{pmatrix}$

07 $AB=BA$가 성립하는 경우

상 중 하

41. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립할 때, $a+b$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$
④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{19}{3}$

08 행렬을 원소로 갖는 집합

상 중 하

42. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합

$$S=\left\{X \;\middle|\; X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{pmatrix},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]
ㄱ. 집합 S는 덧셈에 대하여 닫혀 있다.
ㄴ. 집합 S는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.
ㄷ. $A\in S$이고 모든 성분의 합이 7인 행렬 A는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

43. 집합 $S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a\text{는 자연수}\right\}$의 임의의 두 원소 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $A^n\in S$ (n은 자연수)
ㄷ. AB의 모든 성분의 합이 6인 두 행렬 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 4이다.

[수능특강]

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 행렬의 변형

상 중 하

44. 이차정사각행렬 A가 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2a-3c \\ 2b-3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은?

[수능특강]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

상 중 하

45. 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ A^2=2A-E$$

일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$은? (단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

① $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

010 단위행렬 E의 성질

상 중 하

46. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A^2+A=2E,\ AB=3E$$

가 성립할 때, $B^2=pA+qE$ (p, q는 상수)로 나타내어진다. 이때, $p+q$의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[수능특강]

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$
④ 9 ⑤ $\frac{39}{4}$

주관식

상 중 하

47. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=AB=5E$가 성립할 때, $A^3+B^3=kE$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오.
(단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

011 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질

상 중 하

48. 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $AB=O$이면 $BA=O$이다.
ㄴ. $A+B=O$이면 $A^3+B^3=O$이다.
ㄷ. $A\neq O$이고 $AB=AC$이면 $B=C$이다.

[수능특강]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

49. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $\mathrm{AB}\neq\mathrm{O}$이면 $\mathrm{BA}\neq\mathrm{O}$이다.
ㄴ. $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$이고 $\mathrm{BA}\neq\mathrm{O}$이면 $\mathrm{A}\neq\mathrm{O}$이다.
ㄷ. $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$이고 $\mathrm{BA}=\mathrm{O}$이면 $\mathrm{A}=\mathrm{O}$ 또는 $\mathrm{B}=\mathrm{O}$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

50. 이차정사각행렬 A에 대하여 등식 $(X-A)^2=O$를 만족하는 행렬 X가 있다. 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $X-A=O$
ㄴ. $X(X-A)=A(X-A)$
ㄷ. $(A-X)^3=O$

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

51. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $AB=O$이면 $BA=O$이다.
ㄴ. $AB=O$이면 $A^2B^2=O$이다.
ㄷ. $A+B=E$이면 $AB=BA$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

52. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$AB=-BA$$

가 성립할 때, 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $(AB)^2=(BA)^2$
ㄴ. $A^2B^2=(AB)^2$
ㄷ. $A^2B^2=B^2A^2$

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

53. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 등식 $AB=-BA$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+B^2$
ㄴ. $A^2B^2=B^2A^2$
ㄷ. $A^{2n}B^{2n}=B^{2n}A^{2n}$ (n은 자연수)

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

012 케일리-해밀턴의 정리

상 중 하

54. 이차정사각행렬 A와 영행렬 O에 대하여 다음이 성립한다.

$A\neq O$, $A^6=O$이면 $n\geq k$인 모든 자연수 n에 대하여 $A^n=O$이다.

이때, 자연수 k의 최솟값은?

[고득점 N제]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

주관식

상 중 하

55. 행렬 $A=$에 대하여 집합

$$X=\{(x,\ y)\mid A^3=xA+yA^2,\ x, y\text{는 음이 아닌 정수}\}$$

일 때, 집합 X의 원소의 개수를 구하시오.

[고득점 N제]

013 행렬과 유리함수

상 중 하

56. 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$에 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$를 대응시키기로 하자.

분수함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원점을 지난다.
(나) 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대응하는 행렬의 $(1,1)$성분과 $(2,2)$성분의 합은?

[인터넷 수능]

① 3 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -3

014 통합 유형

상 중 하

57. 행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 각 행의 성분을 좌표로 하는 두 점 (a,b) , (c,d)사이의 거리를 $d(X)$라 하자.

두 행렬$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $d(\mathrm{A}-2\mathrm{B})$의 값은?

[인터넷 수능]

① $3\sqrt{2}$ ② 6 ③ $6\sqrt{2}$
④ 12 ⑤ $12\sqrt{2}$

상 중 하

58. 두 행렬 $A_1=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A_n을 다음과 같이 정의한다.(단, n은 자연수이다.)

(i) n이 홀수이면 $A_{n+1}=A_nP$
(ii) n이 짝수이면 $A_{n+1}=PA_n$

이때, 행렬 $A_{2011}+A_{2012}$의 $(2,\ 1)$성분은?

[수능특강]

① -4 ② -2 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

상 중 하

59. 두 이차정사각행렬 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$과 자연수 n에 대 하여

$$A_{2n}=BA_{2n-1},\ A_{2n+1}=A_{2n}B$$

로 정의하자. 또, 이차정사각행렬 X의 제1행의 모든 성분의 합을 $S(X)$라 하자. 예를 들면, $S(A_1)=3$이다. 이때, $\sum_{k=1}^{2011}S(A_k)$의 값은?

[인터넷 수능]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

상 중 하

60. 좌표평면 위를 움직이는 점 P(x, y)에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\end{pmatrix}$은 $A^2=E$를 만족한다. 이때, 점 P(x, y)와 점 B(1, 3)사이의 거리의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[수능특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

61. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여

$$A_{n+1}=A_nB^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A_2=A_3$
ㄴ. $A_{2n+2}=A_{2n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
ㄷ. $A_{4n+1}=A_1(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

62. 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ (단, $a\neq c$)에 두 점 (a, b), (c, d)를 지나는 직선을 대응시킨다. 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$에 대응하는 직선이 l이고, 행렬 X에 대응하는 직선이 m일 때, 두 직선 l, m이 공유점을 갖지 않는 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $X=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
ㄴ. $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
ㄷ. $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

63. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17 & 4\\4 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 집합 X를

$X=\{(x,\ y)\,|\,(x^2+y^2)A-(x-y)E=B,\ x,\ y$는 실수 $\}$

라 하자. 집합 X의 두 원소를 좌표평면에 나타낸 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분PQ의 길이는?(단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{14}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

주관식

상 중 하

64. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}a_n & a_{n+1}\\a_{n+1} & a_{n+2}\end{pmatrix}$이다. 행렬 $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A_1P^{10}=A_k$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

65. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^2-A+E=O$가 성립할 때, 세 집합 $X,\ Y,\ Z$를 다음과 같이 정의하자.

$X=\{A^n|n=3k\ ,\ k$는 자연수$\}$
$Y=\{A^n|n=4k\ ,\ k$는 자연수$\}$
$Z=\{A^n|n=5k\ ,\ k$는 자연수$\}$

이때, $n(X)+n(Y)+n(Z)$의 값을 구하시오. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이고, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)

[인터넷 수능]

015 미 분류 문제들

상 중 하

66. 다음은 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

'$A^2+B^2=E$, $AB=O$이면 $BA=O$이다.'

가 참임을 증명한 것이다. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

[증 명]

$A^2+B^2=E$에서 $A(A^2+B^2)=A^3+AB^2=A$

이 때, $AB^2=$ $\boxed{(가)}$이므로 $A^3=$ $\boxed{(나)}$

마찬가지 방법으로 $B^3=$ $\boxed{(다)}$

이 때, $A^3=(E-B^2)A=A-B^2A=$ $\boxed{(나)}$이므로

$B^2A=$ $\boxed{(라)}$

$\therefore BA=B^3A=O$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 행렬 중 영행렬의 개수는?

[인터넷 수능]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

상 중 하

67. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A^2-3A+2E=O$가 성립한다. 다음은 이를 이용하여 행렬 A^{100}을 A와 E로 나타내는 과정이다.

$A^2-3A+2E=O$에서 $A^2-A=2(A-E)$이므로

$A^{101}-A^{100}=$ $\boxed{(가)}$$(A-E)$ ⋯㉠

또, $A^2-3A+2E=O$에서 $A^2-2A=A-2E$이므로

$A^{101}-2A^{100}=$ $\boxed{(나)}$$(A-2E)$ ⋯㉡

㉠−㉡에서 $A^{100}=$ $\boxed{(다)}$ $A+$ $\boxed{(라)}$ E이다.

위의 과정에서 (다), (라)에 알맞은 수를 모두 더하면? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ $2^{100}+1$
④ $2^{100}+2$ ⑤ 2^{101}

Ⅲ－2 역행렬과 연립일차방정식

016 역행렬의 정의

상 중 하

68. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^2 - A - 4E = O$가 성립할 때, 행렬 $A+E$의 역행렬은?(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[수능특강]

① $A-2E$ ② $A-E$ ③ $\frac{1}{2}A-E$

④ $\frac{1}{2}A+E$ ⑤ $\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$

상 중 하

69. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^2-2A=-E$일 때, 다음 중 행렬 $A+E$의 역행렬을 나타내는 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{4}(A+3E)$ ② $-\frac{1}{4}(A-3E)$ ③ $\frac{1}{4}(A-3E)$

④ $-4(A-3E)$ ⑤ $4(A+3E)$

상 중 하

70. 이차정사각행렬 A, B, C와 단위행렬 E에 대하여 $ABC=E$가 성립할 때, 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A^{-1}=BC$

ㄴ. $B^{-1}=CA$

ㄷ. $CBA=E$

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

71. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^2+2A=3E$가 성립할 때, 보기에서 역행렬이 항상 존재하는 행렬만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. A ㄴ. $A-E$ ㄷ. $A+E$

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

72. 이차정사각행렬 A가 $A^2+E=O$을 만족시킬 때, 다음 중 A의 역행렬이 아닌 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[고득점 N제]

① $-A^5$ ② $-A$ ③ A^3
④ A^5 ⑤ A^7

상 중 하

73. 이차정사각행렬 A가 $A^2+A=6E$를 만족시킬 때, 항상 역행렬을 갖는 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $A+E$ ㄴ. $A-E$ ㄷ. $A+3E$

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

017 역행렬이 존재하지 않을 조건

상 중 하

74. 행렬 $\begin{pmatrix} t-6 & t+1 \\ t-10 & t^2+t \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 자연수 t의 값의 합은?

[인터넷 수능]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

상 중 하

75. 서로 다른 한 자리의 자연수 a, b, c에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 8 & a \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? (단, $1 \leq c \leq 5$)

[수능특강]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

주관식

상 중 하

76. 행렬$A=\begin{pmatrix} a-2 & a \\ a+4 & a+2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않을 때, 등식 $A+A^2+A^3+A^4+A^5=kA$ 를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

77. 이차정사각행렬 A가 다음을 만족시킨다.

(가) 행렬 A와 $A-E$가 모두 역행렬을 갖지 않는다. (나) 행렬 A의 모든 성분의 합이 4이다.

행렬 $A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{10}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

(단, E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

018 역행렬이 존재할 조건

주관식

상 중 하

78. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b-6 & a+2b \end{pmatrix}$가 있다. 임의의 실수 a에 대하여 $AB=E$를 만족시키는 행렬 B가 항상 존재할 때, 정수 b의 개수를 구하시오. (단 E단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

019 역행렬의성질 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

상 중 하

79. 이차정사각행렬 A, B, C 에 대하여 $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C^{-1}A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이 성립할 때, 행렬 $(B^{-1}+C^{-1})A$ 의 $(1,\ 2)$성분은?

[인터넷 수능]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

주관식

상 중 하

80. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}B$가 성립할 때, 행렬 $AB^{-1}+BA^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

[고득점 N제]

020 역행렬의성질 $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

상 중 하

81. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A-A^{-1}=E$ 일 때, 다음 중 $A^3+(A^3)^{-1}$ 와 항상 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

① E ② $3E$ ③ $A+A^{-1}$
④ $2A+2A^{-1}$ ⑤ $3A+3A^{-1}$

상 중 하

82. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $XB=AB^{-1}$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

[고득점 N제]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

주관식

상 중 하

83. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A \neq -E$ 이고 $A^3+E=O$ 일 때, 등식 $(A^n)^{-1}=A$ 를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[인터넷 수능]

상 중 하

84. 등식 $A^{-1}=E-A$를 만족시키는 이차정사각행렬 A에 대하여 집합 $S=\{(A^n)^{-1} \mid n=1,2,3,\ldots,20\}$의 원소의 개수를 구하시오.
(단, A^{-1}은 A의 역행렬이고 E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

021 역행렬의 성질 $A=A^{-1}$이면 $A^2=E$

주관식

상 중 하

85. $A^2+3A-2E=O, A \neq kE$(k는 실수)를 만족시키는 이차정사각행렬 A에 대하여

$$(A+aE)^{-1}=A+bE$$

가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[고득점 N제]

022 역행렬의 성질

상 중 하

86. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}(A+E)A^{-1}$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

[수능특강]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

87. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여

$A+A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & a\\0 & 4\end{pmatrix}$, $A-A^{-1}=\begin{pmatrix}b & 4\\2 & -2\end{pmatrix}$

가 성립할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[인터넷 수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

88. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $A^2=A$가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $B^2=B$
ㄷ. B의 역행렬이 존재하면 $A=O$이다.

[수능특강]

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

89. 이차정사각행렬 A, B가 모두 역행렬을 가질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$
ㄴ. $A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$
ㄷ. $(A^{-1}BA)^2=A^{-1}B^2A$

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

90. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 S가

$$S=\{X \mid X^{-1}=X,\ X\text{는 이차정사각행렬}\}$$

로 정의된다. 집합 S의 임의의 두 원소 $A,\ B$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A^{-1}\in S$　　ㄴ. $A^3\in S$

ㄷ. $AB\in S$

[수능특강]

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

91. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A\neq O$일 때, 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $A^2\neq O$

ㄴ. $B\neq O$이고 $AB=O$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄷ. B의 역행렬이 존재하면 AB의 역행렬도 존재한다.

[인터넷 수능]

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ　⑤ ㄴ,ㄷ

상 중 하

92. 집합 M을 $M=\{A \mid A^2=-E, A\text{는 이차정사각행렬}\}$로 정의할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $A\in M$ 이면 $-A\in M$이다.

ㄴ. $A\in M$이면 $A^7\in M$ 이다.

ㄷ. $A\in M,\ B\in M$ 이면 $AB\in M$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

93. 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1},\ AB=3E$$

가 성립할 때, $(A+B)^2=kE$를 만족시키는 실수 k의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

상 중 하

94. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $\overline{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 $\overline{A}$의 역행렬도 존재한다.
ㄴ. $ad-bc=1$이면 $A^{-1}=\overline{A}$
ㄷ. $ad-bc=2$이면 $A^{-1}\overline{A^{-1}}=\frac{1}{2}E$

[수능특강]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

95. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때, 집합 T를
$T=\{X \mid AX=O,\ X\neq O,\ X$는 이차정사각행렬$\}$
로 정의하자. 이때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $X\in T$ 이면 $XA=O$이다.
ㄴ. 집합 T의 원소는 무수히 많다.
ㄷ. $X\in T$이면 X는 역행렬이 존재하지 않는다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

023 역행렬을 이용하여 등식을 만족하는 행렬 구하기

상 중 하

96. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BX$가 성립할 때, 행렬 X의 $(2,1)$성분은?

[인터넷 수능]

① -4 ② -1 ③ 3
④ 7 ⑤ 11

상 중 하

97. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, $C=ABA^{-1}$를 만족시키는 행렬 C에 대하여 연립방정식 $C^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 하자. 이때, $\alpha+\beta$의 값은?

[인터넷 수능]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

상 중 하

98. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A가 두 등식

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, A^{-1}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$을 만족시킬 때, 행렬 A의 $(2,1)$성분은?

[인터넷 수능]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

상 중 하

99. 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 A가 다음을 만족시킨다.

$$A+A^{-1}=E\ ,\quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

행렬 A의 모든 성분의 합은?(단, E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

① -14 ② -13 ③ -12
④ -11 ⑤ -10

주관식

상 중 하

100. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여 $BPA^{-1}=B^{-1}$을 만족하는 행렬 P의 모든 성분의 합을 구하여라.

[수능특강]

024 행렬을 이용한 연립일차방정식의 표현

상 중 하

101. 두 화학 용액 A, B 가 각각 비이커에 xmL, ymL 씩 담겨져 있다. 두 용액의 합은 100mL 이고, 1 시간 후 A 용액은 증발이 없고 20% 만큼을 더 보충하였으며, B 용액은 10% 만큼 증발하고 더 보충하지 않았다. 이때, 두 용액의 합이 1 시간 전의 합보다 5mL 증가하였다고 할 때,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 5 \end{pmatrix}$$

인 관계가 성립한다. 이때, $a+b$ 의 값은?

[수능특강]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

상 중 하

102. 같은 출발 지점에서 목적지까지 총 4km 의 등산로를 처음 $x$km 는 매시 2.5km 의 속력으로 올라가고, 나머지 $y$km 는 매시 2km 의 속력으로 올라간다. 목적지에 도착한 후 다시 출발지점까지 4km 를 내려올 때 처음 $y$km 는 매시 2.5km 의 속력으로 내려오고, 나머지 $x$km 는 매시 3km 의 속력으로 내려온다. 갑이 산을 오르는 시간이 내려오는 시간보다 21 분 더 소요된다고 한다. 이를 만족하는 x, y 에 대하여 등식

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 21 \end{pmatrix}$$

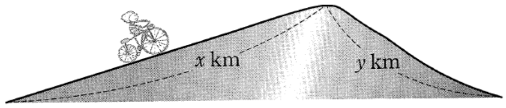
이 성립할 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

[수능특강]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

상 중 하

103. 그림과 같이 어느 언덕의 오르막길의 길이는 $x$km, 내리막길의 길이는 $y$km 이다.



한진이가 자전거를 타고 이 언덕을 넘을 때, 오르막길에서는 1km 당 30kcal, 내리막길에서는 1km 당 10kcal 의 열량이 소모된다고 한다. 이 언덕의 오르막길과 내리막길의 총 길이는 10km 이고, 한진이가 이 언덕을 넘을 때 소모된 열량이 총 240kcal 이었다. 이때, x, y의 값을 행렬을 이용하여 구했더니, 다음과 같은 등식이 성립하였다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

ab의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[인터넷 수능]

상 중 하

104. 어느 회사에서 선물세트로 오른쪽 표와 같이 비누와 치약을 섞은 두 종류의 상품 A와 B를 만들어 판매하기로 하였다.

	비누	치약
상품 A	2개	4개
상품 B	5개	3개

상품 A,B 한 세트당 각각 800원, 900원의 이익이 남는다고 한다. 비누 90개와 치약 110개를 모두 이용하여 상품 A,B를 만들어 모두 팔았을 때의 이익을 다음과 같은 두 가지 방법으로 나타낼 수 있다.

(ⅰ) $\begin{pmatrix} 800 & 900 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}$

(ⅱ) $\begin{pmatrix} 90 & 110 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & c \\ d & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$

이때, $a-c$의 값은?

[인터넷 수능]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

105. 다음은 어느 암호 체계에 대한 설명이다.

(가) 아래 표와 같이 각 알파벳에는 1부터 26까지의 번호를 대응시킨다.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

(나) 보내고자 하는 단어를 앞에서부터 순서대로 두 개의 알파벳씩 묶고 이에 부여된 번호로 2×1행렬을 만든다. 예를 들어, '$fire$'는 'fi', 're'로 묶고, 이에 대응하는 행렬을 만들면 차례로

$A=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18\\5\end{pmatrix}$가 된다.

(다) 비밀리에 정한 이차정사각행렬 M과 (나)에서 만든 2×1행렬의 곱 MA, MB를 차례로 전송하면 을은 A, B를 구하여 갑이 보낸 단어를 알 수 있다.

갑과 을은 행렬 M을 $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$로 정한 다음, 갑이 을에게 차례로 행렬 $\begin{pmatrix}17\\18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}28\\36\end{pmatrix}$을 전송하였다. 이때, 갑이 을에게 보낸 단어는?

[인터넷 수능]

① $math$ ② $make$ ③ $path$
④ $past$ ⑤ $teps$

상 중 하

106. 어떤 공장에서 두 종류의 제품 P, Q를 각각 한 개씩 만드는 데 필요한 원료, 전력량 및 그 제품으로 얻어지는 이익금은 다음 표와 같다.

제품 \ 구분	원료(kg)	전력량(kwh)	이익(만 원)
P	6	3	5
Q	9	4	6

원료 57kg과 전력 27kwh를 모두 사용하여 만든 제품을 판매하여 얻은 총 이익금을 S(만 원)이라 하고, 행렬 $A=\begin{pmatrix}6&9\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\5&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}57\\27\end{pmatrix}$라 할 때, 다음 중 S와 같은 것은?

① $BA^{-1}C$의 $(1,1)$성분 ② $BA^{-1}C$의 $(2,1)$성분
③ $A^{-1}BC$의 $(1,1)$성분 ④ $A^{-1}BC$의 $(2,1)$성분
⑤ $CA^{-1}B$의 $(2,1)$성분

[고득점 N제]

주관식

상 중 하

107. 어느 지역에 조류 A바이러스가 유행하고 있다. 이 바이러스에 감염된 오리와 닭이 각각 x마리, y마리일 때, 오리와 닭을 격리하지 않으면 1일 후에는 이 바이러스에 감염된 오리와 닭은 각각 $(3x+y)$마리, $(x+2y)$마리가 된다고 한다. 현재 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수가 각각 a, b이고 오리와 닭을 격리하지 않은 채 4일이 지났을 때 이 바이러스에 감염된 오리와 닭의 수를 각각 p, q라 하면 $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다. 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

108. 어느 공장에서는 두 종류의 기계 A, B를 사용하여 제품을 만들고 있다. 주문받은 72개의 제품을 만드는 데 기계 A를 3대, 기계 B를 2대 가동하면 4일이 걸리고, 기계 A를 4대, 기계 B를 3대 가동하면 3일이
걸린다고 한다. 기계 A와 기계B가 하루에 만드는 제품의 개수를 각각x, y라 하면

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&a\\b&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 한다. 위 등식을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

025 역행렬을 이용한 연립일차방정식의 풀이

상 중 하

109. 좌표평면 위의 두 직선 $ax+by=2$, $cx+dy=4$의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$라 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이 성립할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

[수능특강]

상 중 하

110. 실수 $a,\ b,\ c,\ d,\ p,\ q$에 대하여 $ad-bc\neq0$ 이고 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$일 때, $x,\ y$에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by+p=0 \\ cx+dy+q=0 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 하자. 이때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[인터넷 수능]

주관식

상 중 하

111. 좌표평면에서 두 직선 $ax+by=p,\ cx+dy=q$가 점 $(2,3)$에서만 만날 때, 등식

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

를 만족시키는 실수 α,β에 대하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

112. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 성립하고, $x,\ y$에 대한 연립방정식 $\begin{cases} a\log x+b\log y=-t+5 \\ c\log x+d\log y=t^2 \end{cases}$의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\log\alpha\beta$의 최솟값을 구하시오. (단, t는 실수이다.)

[고득점 N제]

026 연립방정식의 해가 부정 또는 불능일 조건

상 중 하

113. 연립일차방정식$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -b \end{pmatrix}$가 무수히 많은 해를 가질 때, 두 상수 a,b의 합 $a+b$의 값은?

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

[인터넷 수능]

상 중 하

114. 양수 a,b에 대하여 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 무수히 많은 해를 가질 때, $a+b$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[고득점 N제]

상 중 하

115. 이차정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 $x=1$, $y=2$가 연립방정식 $(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 근일 때, 연립방정식 $(A^4-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$의 근의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 무수히 많다.

[고득점 N제]

027 연립방정식이 해를 가질 조건

상 중 하

116. 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 a의 값은 합은?

[인터넷 수능]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

상 중 하

117. 연립방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖기 위한 모든 실수 k 의 값의 합은?

[수능특강]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

상 중 하

118. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ 가 $x=0$,
$y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

119. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 3 & a-1 \\ a & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$ 라 하자. $\alpha\beta\neq 0$ 일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합은?

[인터넷 수능]

① -2 ② -1 ③ $-\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

주관식

상 중 하

120. x,y에 관한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ (\text{단, } 0\le x\le 2)$$

가 $x=y=0$이외의 해를 가지도록 상수 k의 값을 정할 때, 이 연립방정식을 만족시키는 점 (x,y) 전체가 이루는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}+\sqrt{a}$이다. 상수 a의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

028 통합 유형

상 중 하

121. 실수 x, y가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $x^2+y^2=9$
(나) 행렬 $\begin{pmatrix} x+3 & y \\ 0 & x-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$(x,\ y)$를 좌표로 하는 모든 점을 좌표평면 위에 나타내고 이들 을 꼭짓점으로 하는 다각형을 S라 할 때, S의 넓이는?

① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $6\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 12

[수능특강]

상 중 하

122. 집합 $X=\left\{\begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ 0 & 3^b \end{pmatrix} \middle| a,b\text{는 정수} \right\}$에 대하여 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $P\in X, Q\in X$이면 $PQ\in X$이다.
ㄴ. $P\in X$이면 $P^n\in X$이다. (단 n은 자연수)
ㄷ. $P\in X$이면 $P^{-1}\in X$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

123. 임의의 두 자연수 a,b의 최대공약수를 d, 최소공배수를 m이라 하자 $M(a,b)$를 행렬 $\begin{pmatrix} a & d \\ m & b \end{pmatrix}$로 정의할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $M(a,a)M(b,b)=M(2ab,2ab)$
ㄴ. a와 b가 서로소이면 $M(a,b)=M(b,a)$이다.
ㄷ. $M(a,b)$는 역행렬을 갖지 않는다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

124. 기울기가 a이고 y절편이 b인 직선을 행렬 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$로 나타내자. x축에 대하여 대칭인 두 직선 l, l'을 나타내는 두 행렬을 각각 P, Q라 하면 $P^{-1}=-\frac{1}{4}Q$를 만족시키는 직선 l은 4개가 존재한다. 이 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[인터넷 수능]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

상 중 하

125. 다음은 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n(n=1,2,3,\ldots)$을 구하는 과정이다.

> $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$이다.
> 따라서 임의의 자연수 n에 대하여
> $A^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(-1)^n\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ … ㉠ , $A^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=p^n\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ … ㉡
> ㉠,㉡에서 $A^n\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n & 2p^n\\ -(-1)^n & p^n\end{pmatrix}$
> ∴ $A^n=\boxed{}$

위의 과정에서 행렬 A^n의 $(2,1)$성분이 $\frac{1}{q}\{(-1)^{n+1}+r^n\}$이다. 이때, $p+q+r$의 값은? (단, p, q, r는 상수이다.)

[인터넷 수능]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

상 중 하

126. 네 실수 a, b, p, q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$
> (나) 두 점 $(a,\ b)$, $(p,\ q)$ 는 모두 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이다.

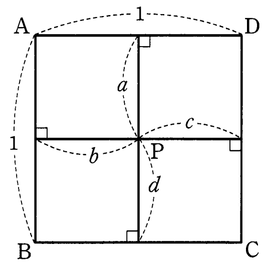
이때, a^2-b^2 의 값은?

[인터넷 수능]

① -120 ② -60 ③ -30
④ 30 ⑤ 60

상 중 하

127. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P에서 네 변에 이르는 거리를 각각 a, b, c, d라 한다. 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 점 P의 자취의 길이는?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ π

[고득점 N제]

상 중 하

128. x,y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}2\cos\theta+1 & 2\sin\theta+1\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}$가 $x=0, y=0$이외의 해를 갖도록 하는 모든 $\sin\theta$의 값의 합은?

① $-\frac{8}{5}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

[인터넷 수능]

상 중 하

129. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 행렬 A_n을

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix} (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같이 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 행렬 A_n은 역행렬을 갖는다.
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 행렬 A_n은 역행렬을 갖지 않는다.
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 행렬 $A_nA_{n+2}=(A_{n+1})^2$이 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

130. 집합 $C=\{x+yi \mid x^2+y^2=1,\ x,\ y\text{는 실수}\}$가 있다. 집합 C의 원소 $z=x+yi$에 대하여 행렬 $A(z)$를 다음과 같이 정의한다.

$$A(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

집합 C의 임의의 두 원소 $\alpha,\ \beta$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta)$(단, $\alpha+\beta\in C$)
ㄴ. $A(\alpha\beta)=A(\alpha)A(\beta)$
ㄷ. $A(\overline{\alpha})=\{A(\alpha)\}^{-1}$(단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

131. $A^k=E$인 자연수 k가 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여 집합 $\{A^n \mid n\text{은 자연수}\}$의 곱셈에 대한 항등원을 $\overline{A}$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면 $\overline{A}=A^2$이다.
ㄴ. $\overline{A}=A^k$(k는 자연수)이면 집합 $\{A^n \mid n\text{은 자연수}\}$의 원소의 개수는 k이하이다.
ㄷ. A의 역행렬이 존재하고 $\overline{A}=A^p$(p는 자연수)이면 $\overline{A^{-1}}=(A^{-1})^p$이다.

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

132. 좌표평면 위의 원점이 아닌 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$라 할 때, 행렬 A가 역행렬을 갖지 않기 위한 충분조건을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, O는 원점이다.)

[보 기]

ㄱ. 직선 AB가 원점을 지난다.
ㄴ. 직선 AB가 x축에 평행하다.
ㄷ. $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$이다.

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

133. 행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 함수 $f_M(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_M(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(\text{단, } ad-bc\neq 0)$$

이차정사각행렬 A에 대하여 A^2의 역행렬이 존재할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $f^{-1}{}_A(x)$는 $f_A(x)$의 역함수이고, E는 단위행렬이다.)

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $f_E(x)$는 항등함수이다.
ㄴ. $f^{-1}{}_A(x)=f_{A^{-1}}(x)$이다.
ㄷ. $(f_A\circ f_A)(x)=f_{A^2}(x)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

134. 임의의 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $abcd\neq 0$일 때, $f(A)$를 $f(A)=\frac{bc}{ad}$로 정의하자. 이차정사각행렬 A와 A^2의 모든 성분이 0이 아닐 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(A)=2$ 이면 $f(2A)=4$ 이다.
ㄴ. $f(A)=1$ 이면 $f(A^2)=1$ 이다.
ㄷ. $f(A)\neq 1$ 이면 $f(A^{-1})=f(A)$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

135. 전체집합 $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d\text{는 실수}\right\}$의 부분집합 $S=\left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid ps-qr=0\right\}$에 대하여 옳은 것만 을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $A\in S$이고 $(A+E)\in S$이면 $(A-E)\in S^C$이다.
ㄴ. $A\in S$이고 $(A+E)\in S^C$이면 $(A-E)\in S$이다.
ㄷ. $A\in S^C$이고 $(A+E)\in S^C$이면 $(A-E)\in S^C$이다.

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

136. 다음은 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 A^n(n은 자연수)을 구하는 과정이다.

> 이차방정식
> $$x^2-(1+4)x+\{1\times4-(-1)\times2\}=0$$
> 즉, $x^2-5x+6=0$의 두 근이 $x=2, x=3$이므로 등식
> $$\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$$
> 을 만족시키는 행렬 $P=\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$를 구하자.
>
> 이때, $p=1, q=2$로 놓으면 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ ㉮ & ㉯\end{pmatrix}$이다.
>
> 따라서 $A=P\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}$이므로 자연수 n에 대하여
>
> $A^n=P\begin{pmatrix}㉰ & 0\\0 & ㉱\end{pmatrix}P^{-1}$이다.

위의 과정에서 ㉮,㉯,㉰,㉱에 알맞은 수나 식에 대하여 ㉮×㉯×㉰×㉱를 간단히 하면?

[고득점 N제]

① 6^n ② 2×6^n ③ 3×6^n
④ 4×6^n ⑤ 6^{n+1}

주관식

상 중 하

137. 곡선 $y=-\frac{1}{x}$위의 한 점(p, q)에 대하여

$$\begin{pmatrix}a & 3\\5 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+q\\p-q\end{pmatrix}$$

를 만족시키도록 양수 a의 값을 정할 때, $a^2+p^2+q^2$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

138. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f_A(x)$ 를 $f_A(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$ 로 정의하자. 이차방정식 $f_A(x)=0$ 의 두 근의 합이 10, 곱이 2일 때, $AB=E$ 를 만족시키는 행렬 B 에 대하여 이차방정식 $f_B(x)=0$ 의 두 근의 합을 α, 두 근의 곱을 β 라 하자. $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

[인터넷 수능]

Ⅰ. 등차수열

01 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n = a+(n-1)d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
참고 $a_{n+1}-a_n = d$

상 중 하

1. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_8+a_{18}=9$일 때, a_7+a_{19}의 값은?

[수능특강]

① $\frac{9}{2}$ ② 9 ③ $\frac{27}{2}$
④ 18 ⑤ 26

상 중 하

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_6=24$, $a_{10}-a_4=6$이 성립할 때, a_7의 값은?

[수능특강]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

상 중 하

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4+a_5=18$, $a_6+a_7=27$일 때, a_{10}의 값은?

[인터넷수능]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

상 중 하

4. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2+a_4=8$, $a_7=52$를 만족시킬 때, 공차를 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1+a_2):(a_2+a_3)=1:2$가 성립할 때, $a_2:a_3$은? (단, $a_1\neq 0$)

[수능특강]

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3
④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

상 중 하

6. 첫째항이 같은 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서

$a_3 : b_3 = 1 : 2$, $b_5 : b_5 = 3 : 5$ 일 때, $a_9 : b_9$ 의 값은?

[인터넷수능]

① 7 : 8 ② 7 : 9 ③ 7 : 11
④ 9 : 10 ⑤ 9 : 11

상 중 하

7. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2$, $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 = 22$ 일 때, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$ 의 값은?

[수능특강]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

상 중 하

8. $a_{n+1} - a_n = 3$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\dfrac{2^{a_5} - 2^{a_2}}{2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3}}$ 의 값은?

[수능특강]

① 64 ② 56 ③ 48
④ 42 ⑤ 35

상 중 하

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_m = n+1$, $a_n = m+1\,(m \neq n)$

이 성립할 때, a_{m+n}의 값은?

[인터넷수능]

① 0 ② 1 ③ $m+n+1$
④ $2(m+n)-1$ ⑤ $2(m+n)+1$

상 중 하

10. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각

$\{a_n\}: 4, 2, 0, -2, \cdots$

$\{b_n\}: 7, 6, 5, 4, \cdots$ 일 때, $a_k = 3b_k$를 만족하는 자연수 k의 값은?

[인터넷수능]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

상 중 하

11. 두 수열$\{a_n\}$,$\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$b_{2k-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}}$, $b_{2k} = 2^{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}}$

을 만족시킨다. 수열$\{a_n\}$은 등차수열이고,

$b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_{10} = 8$

일 때, 수열$\{a_n\}$의 공차는?

[인터넷수능]

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{2}{15}$ ③ $\dfrac{1}{5}$
④ $\dfrac{4}{15}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

상 중 하

12. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=78$, $a_7=72$가 성립할 때, $2^{a_n}>1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

[고득점 N제]

① 52 ② 53 ③ 54
④ 55 ⑤ 56

주관식

상 중 하

13. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건이 성립할 때, a_{10}의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

(가) a_n은 정수이다.
(나) $a_2+a_6=28$
(다) $({a_1}^2+{a_4}^2):({a_2}^2+{a_6}^2)=1:2$

02 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 한다.

$$b-a=ac-b \iff 2b=a+c \iff b=\frac{a+c}{2}$$

상 중 하

14. x에 대한 다항식 x^2+px+p^2을 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나눈 나머지가 차례로 등차수열을 이룰 때, 상수 p의 값은?

[수능특강]

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

상 중 하

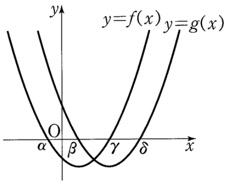
15. 세 양의 정수 a, b, c에 대하여 a, b, c와 a^2, b^2, $-c^2$이 각각 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, $c=2010$이면 a의 값은?

[수능특강]

① 2010 ② 3010 ③ 4020
④ 5020 ⑤ 6030

상 중 하

16. 두 이차함수 $f(x)=x^2+ax-3$, $g(x)=x^2-6x+b$의 그래프가 다음 그림과 같다.



두 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$)

[인터넷수능]

① -12　② -10　③ 6
④ 8　⑤ 14

상 중 하

17. 토론대회에 참석한 다섯 팀 A, B, C, D, E가 대회 결과 상금 450만 원을 다음과 같이 나누어 갖게 되었다. D가 받은 상금이 k만 원 일때, k의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

(가) A, B, C, D, E가 받은 상금은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) E가 받은 상금이 제일 많다.
(다) D와 E가 받은 상금의 합이 다른 세 팀이 받은 상금의 합의
2배와 같다.

상 중 하

18. 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 의 근에 대한 설명 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

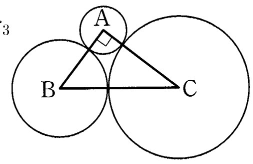
[보 기]

ㄱ. a^2, b^2, c^2이 이 순서대로 등차수열을 이루면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루면 중근을 갖는다.
ㄷ. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$이 이 순서대로 등차수열을 이루면 허근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

19. 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3인
세 원이 오른쪽 그림과 같이 서로 외접하고 다음 두 조건을 만족한다.
(단, $r_1 < r_2 < r_3$)



(가) $r_1 < r_2 < r_3$은 이 순서대로 등차수열을 이루고 있다.
(나) 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형ABC는 직각삼각형이다.

집합$N=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$에서 세 원소를 택하여 위의 조건을 만족하도록 r_1, r_2, r_3을 정하는 방법의 수는?

[인터넷수능]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

03 조화수열

(1) 조화수열의 뜻
각 항의 역수들이 등차수열을 이루는 수열
(2) 조화수열의 일반항
$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ 에서 a_n을 구한다.
(3) 조화중항 : a, b, c가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, b를 a, c의 조화중항이라 한다.
$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$

상 중 하

20. 다음 수열의 역수가 등차수열을 이룰 때, 제 95항은?

[수능특강]

$$12,\ 8,\ 6,\ \cdots$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04 등차수열의 합

첫째 항 a, 공차가 d, 끝항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은
(1) 첫째항과 끝항을 알 때 : $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$ (l은 끝항)
(2) 첫째항과 공차를 알 때 : $S_n = \frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$

상 중 하

21. 등차수열 $20,\ 20+\frac{1}{5},\ 20+\frac{2}{5},\ 20+\frac{3}{5},\ \cdots,\ 24$의 모든 항의 합은?

[수능특강]

① 462 ② 600 ③ 630
④ 650 ⑤ 680

상 중 하

22. 2와 40사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열의 합이 420일 때, 세 번째 항과 다섯 번째 항의 합은?

[인터넷수능]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

상 중 하

23. 두 수 8과 68사이에 69개의 수를 넣어 만든 수열

$8,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{69},\ 68$

이 등차수열을 이룰 때, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{69}$ 중 그 값이 자연수가 아닌 것의 합은?

[고득점 N제]

① 2268 ② 2272 ③ 2276
④ 2280 ⑤ 2284

상 중 하

24. 등차수열$\{a_n\}$에 대하여 $a_1=5$, $a_6=-5$일 때, $|a_1+a_2|+|a_2+a_3|+|a_3+a_4|+\cdots+|a_{10}+a_{11}|$의 값은?

[인터넷수능]

① 112 ② 116 ③ 120
④ 124 ⑤ 128

상 중 하

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=10$, $a_{10}=31$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 항 중 100보다 작은 짝수들의 합은?

[인터넷수능]

① 570 ② 604 ③ 654
④ 704 ⑤ 784

상 중 하

26. 공차가 한 자리의 소수 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$A_n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

$B_n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$

이라 한다. 2이상의 정수 m에 대하여 $A_m=385$, $B_m=330$일 때, a_m의 값은?

[인터넷수능]

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

상 중 하

27. 다음과 같이 자연수가 나열되어 있다.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots$

홍석, 강산, 동원이는 차례로 다음 (가), (나), (다)의 규칙을 따르면서 수를 지워나간다.

(가) 홍석이는 먼저 3의 배수를 지운다.
(나) 강산이는 홍석이가 지운 후 남아있는 수 중에서 짝수 번째에 놓인 수를 지운다.
(다) 동원이는 강산이가 지운 후 남아 있는 수 중에서 홀수 번째에 놓인 수를 지운다.

(가)에서 (다)까지 시행한 후에 남아 있는 수 중에서 첫 번째 놓인 수부터 열 번째 놓인 수까지의 합은?

[인터넷수능]

① 300 ② 310 ③ 320
④ 330 ⑤ 340

상 중 하

28. $a_1 < 0$인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 한다. $S_4 = S_{12}$일 때, 옳은 것만 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

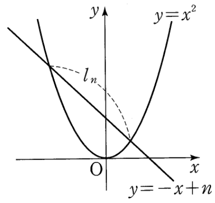
ㄱ. $a_5 + a_6 + \cdots + a_{12} = 0$
ㄴ. $a_8 + a_9 = 0$
ㄷ. $n = 9$일 때, S_n은 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

29. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = x^2$과 직선 $y = -x + n$이 만나서 생기는 선분의 길이를 l_n이라 할 때, $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \cdots + l_{10}^2$의 값은?

[인터넷수능]



① 320 ② 440 ③ 460
④ 500 ⑤ 520

상 중 하

30. 첫째항이 -45이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_m = S_n$을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수는 a개이고, S_m의 최솟값은 b이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, $m < n$)

[고득점 N제]

① -354 ② -351 ③ -348
④ -345 ⑤ -342

상 중 하

31. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 3a_4$, $a_5 - a_{10} = 15$가 성립한다. 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n + 135 < 0$이 되도록 하는 n의 최솟값은?

[인터넷수능]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

상 중 하

32. 모든 항이 자연수이고, 공차가 3인 등차수열$\{a_n\}$에 대하여

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+26} = m^4$$

이 성립한다. m^4의 값이 최소가 되도록 하는 a_i의 값은?(단, i, m은 자연수이다.)

[인터넷수능]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

상 중 하

33. 자연수 n 에 대하여 $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n \le 4n+1$ 인 n 개의 홀수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 의 합으로 나타내어지는 수 전체의 집합을 A_n 이라 할 때, 항상 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

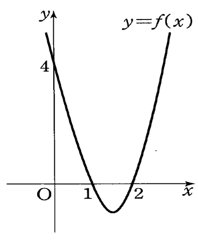
ㄱ. A_n 의 원소 중에서 최솟값은 n^2 이다.
ㄴ. A_n 의 원소 중에서 최댓값은 $2n^2 + 3n$ 이다.
ㄷ. A_n 의 원소의 개수는 $n^2 + n + 1$ 개이다.

[수능특강]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

34. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 32만큼 평행이동시킨 함수를 $y = g(x)$라 하고, 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n = f(n) - g(n) \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n의 최솟값은?

[고득점 N제]

① -152 ② -148 ③ -144
④ -140 ⑤ -136

상 중 하

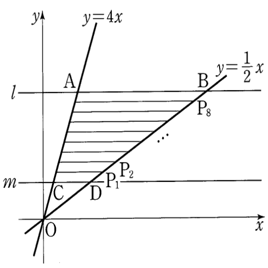
35. 좌표평면에서 x절편이 a이고 y절편이 -40인 직선 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 y좌표를 차례로 나열한 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열을 이룬다. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n의 최솟값을 b라 할 때, $3a-b$의 값은? (단, $a\neq 0$)

[고득점 N제]

① 284 ② 287 ③ 290
④ 293 ⑤ 296

상 중 하

36. 오른쪽 그림과 같이 x축과 평행한 두 직선 l, m이 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=4x$와 만나고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=21$, $\overline{\mathrm{CD}}=7$일 때, 선분AB와 선분CD 사이에 일정한 간격으로 x축과 평행한 8개의 선분을 긋는다.



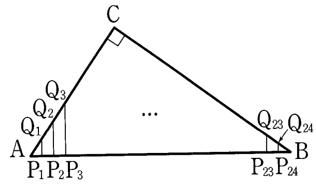
이 8개의 선분이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점의 좌표를 아래쪽부터 차례로 $\mathrm{P}_1(a_1, b_1)$, $\mathrm{P}_2(a_2, b_2), \cdots, \mathrm{P}_8(a_8, b_8)$이라할 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+b_k)$의 값은?

[인터넷수능]

① 180 ② 184 ③ 188
④ 192 ⑤ 196

상 중 하

37. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=15$, $\overline{\mathrm{BC}}=20$이고, $\angle \mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형ABC가 있다. 변AB를 25등분하는 점P_1, P_2, $\cdots$ P_{24}를 지나 변AB에 수직인 직선을 그어 변AC 또는 변CB와 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_{24}$라 하자.
$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{24}\mathrm{Q}_{24}}$의 값을 구하시오.



[인터넷수능]

상 중 하

38. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_1=a_1+a_2+\cdots+a_m$$
$$S_2=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}$$
$$S_3=a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}$$

이라 할 때, S_1, S_2, S_3 사이의 관계식으로 항상 옳은 것은?

[고득점 N제]

① $S_1+S_2=S_3$ ② $S_1+2S_2=S_3$
③ $2S_1+S_2=S_3$ ④ $S_1+S_3=2S_2$
⑤ $S_1+3S_2=2S_3$

주관식

상 중 하

39. 제 20항이 17이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 150인 등차수열에서 첫째항부터 제 30항까지의 합을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

40. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=16$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

41. n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음4개항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개의 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3\cdots a_n=260$

이때, n의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

42. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5=33$, $a_2+a_4+a_6=27$이다. 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 S_n은 $n=k$일 때, 최댓값 M을 갖는다. 이때, $M+k$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

43. 좌표평면의 x축 위에 일정한 간격으로 점 $\mathrm{A}_1(1,\ 0),\ \mathrm{A}_2(2,\ 0), \mathrm{A}_3(3,\ 0),\ \cdots,\ \mathrm{A}_n(n,\ 0)$을 잡는다.
점 $\mathrm{A}_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에서 x축에 수직인 직선을 그어 그림과 같이 두 직선 $l_1:\ y=x+1,\ l_2:\ y=-x+7$의 그래프와 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}_i,\ \mathrm{Q}_i$라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{20}\mathrm{Q}_{20}}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

05 등차수열의 일반항과 합과의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때
(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1 = S_1$
(ⅱ) $n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$

상 중 하

44. 수열 $\{na_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$일 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{2010}의 값은?

[수능특강]

① 2011 ② 2010 ③ 2009
④ 2008 ⑤ 2007

상 중 하

45. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + n + 1$을 만족할 때, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{24} + a_{25}$의 값은?

[수능특강]

① -28 ② -24 ③ 0
④ 24 ⑤ 27

상 중 하

46. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 할 때,

$$a_{20} + b_{20} = 55,\ A_{20} + B_{20} = 700$$

이 성립한다. $a_1 + b_1$의 값은?

[수능특강]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

상 중 하

47. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{S_{2n}}{S_n}$의 값은 n의 값에 관계없이 항상 일정하다. $a_4=56$일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

48. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때, $S_n=n^2+2pn$, $T_n=2n^2-qn$이라고 한다. $a_1=b_1$, $a_{10}+b_{10}=72$가 성립할 때, 상수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?

[고득점 N제]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

상 중 하

49. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 만족시킬 때, a_{20}의 값은?

[고득점 N제]

(가) $a_{10}=10$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k(a_k-a_{k+1})=90$

① -24 ② -20 ③ -16
④ -10 ⑤ -6

주관식

상 중 하

50. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-3n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

51. 수열$\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을S_n이라하자. 수열$\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열$\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$일 때, a_8의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

52. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 다항식 $2x^2+x+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지라 할 때, a_5의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

53. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_n = 2(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})\ (n \geq 2)$이 성립한다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.(단, $a_1 = 1$)

[수능특강]

상 중 하

54. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

이때, $a_1 + a_{10}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

. 등비수열

01 등비수열의 일반항

등비수열의 일반항
첫째항이 a, 공차가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

참고 $a_{n+1} \div a_n = r \iff a_{n+1} = ra_n$

상 중 하

1. 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 1000보다 크게 되는 항은?

[수능특강]

① a_9 ② a_{10} ③ a_{11}
④ a_{12} ⑤ a_{13}

상 중 하

2. 네 수 $1, a, b, c$는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비r의 값은?(단, $r>1$)

[인터넷수능]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

상 중 하

3. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\log_2 a_{12} - \log_2 a_3$의 값은?

[고득점 N제]

(가) $a_9 = 8a_6$
(나) $\log_2 \sqrt{a_n} + \log_4 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1}$

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

상 중 하

4. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{a_{10}}{a_1} + \frac{a_{11}}{a_2} + \frac{a_{12}}{a_3} + \frac{a_{13}}{a_4} = 36$ 일 때, $\frac{a_{30}}{a_{12}}$의 값은?

[수능특강]

① 27 ② 36 ③ 81
④ 216 ⑤ 243

주관식

상 중 하

5. 등비수열$\{a_n\}$에 대하여 $a_3=2$, $a_6=16$일 때, a_9의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

상 중 하

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_3=25$, $a_2a_4=100$ 일 때, a_5 의 값을 구하여라.

[수능특강]

02 등비중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 한다.

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \iff b^2=ac$$

참고 $a>0$, $b>0$일 때, (a와 b의 등차중항)$\geq$(a와 b의 등비중항)의 관계가 성립한다.

즉, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

상 중 하

7. 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루고 $a+b+c=-5$, $ab+bc+ca=10$ 을 만족할 때, abc 의 값은?

[수능특강]

① -8 ② -3 ③ 1
④ 4 ⑤ 9

상 중 하

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2-x+k=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하자. $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, k 의 값은? (단, $\alpha\beta\neq0$)

[수능특강]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 4

상 중 하

9. 양의 실수 x 에 대하여 $x-[x]$, $[x]$, x 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x-[x]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[수능특강]

① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

주관식

상 중 하

10. 세 수 2, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 세 수 a, b, 30이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

[수능특강]

상 중 하

11. 두 자연수 a와b에 대하여 세 수 a^n, $2^4\times3^6$, b^n이 순서대로 등비수열을 이룰 때, ab의 최솟값을 구하시오.(단,n은 자연수이다.)

[인터넷수능]

03 등비수열의 합

첫째 항 a, 공차가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(ⅰ) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ⅱ) $r=1$일 때, $S_n=na$

상 중 하

12. 첫째항이 a, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 6항까지의 합이 21일 때, a의 값은?

[수능특강]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

상 중 하

13. 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=86$을 만족하는 자연수 n의 값은?

[수능특강]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

상 중 하

14. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$에 대하여

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\dfrac{1}{4}(3^{10}-2)$　② $\dfrac{3}{2}(3^{10}-1)$　③ $\dfrac{1}{4}(3^{11}-1)$

④ $\dfrac{3}{4}(3^{10}-1)$　⑤ $\dfrac{3^{11}}{4}$

상 중 하

15. 함수 $f(x)=(x-2)^2+(x-2^2)+\cdots+(x-2^{10})$은 $x=a$에서 최솟값을 갖는다. 이때, a의 값은?

[인터넷수능]

① $\dfrac{2^{10}-1}{10}$　② $\dfrac{2^{10}-1}{5}$　③ $2^{10}-1$

④ $5(2^{10}-1)$　⑤ $10(2^9-1)$

상 중 하

16. 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 r이다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=20,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=5$$

를 만족시키는 n에 대하여 $\dfrac{a_2\times a_4\times\cdots\times a_{2n}}{a_1\times a_3\times\cdots\times a_{2n-1}}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\dfrac{1}{4}r$　② $\dfrac{1}{2}r$　③ r

④ $2r$　⑤ $4r$

상 중 하

17. 등비수열$\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을S_n이라 할 때, $S_n=p$, $S_{2n}=q$라 하자. 자연수 n에 대하여

$A=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$B=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$

$C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}$

이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $B=q-p$

ㄴ. $B^2=AC$

ㄷ. $S_{3n}=p+q+\dfrac{q^2}{p}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

18. 첫째항이 1, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_{20}=3S_{10}$ 이면 $S_{40}=kS_{10}$ 이다. 이때, 실수 k 의 값은? (단, $r \neq \pm 1$)

[수능특강]

① 6 ② 8 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

상 중 하

19. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{20}=4S_{10}$일 때, $S_{30}=aS_{10}$, $S_{40}=bS_{20}$이 성립한다. 이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

[인터넷수능]

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

상 중 하

20. $\log_2 a_2=1$, $\log_2 a_4=2$이고, 공비가 양수인 등비수열$\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $a_5=2\sqrt{2}$

ㄴ. $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{10}=\frac{55}{2}$

ㄷ. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(2+\sqrt{2})(2^{10}-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

21. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^{10} a_k=10\sqrt{10}$ 과 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sqrt{10}$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}\log a_k$ 의 값은?

[수능특강]

① 2 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 10

상 중 하

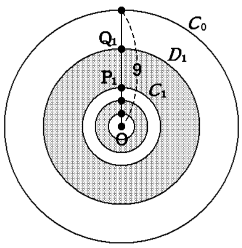
22. 2의 거듭제곱 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{10}$에서 서로 다른 3개를 택하여 그들은 곱한 값을 S라 하자. 이러한 S의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$이라 할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_n=p(2^q-1)$이다. 이 때, 정수 $p,\ q$의 합 $p+q$의 값은? (단, $p\leq 100$)

[고득점 N제]

① 82 ② 84 ③ 86
④ 88 ⑤ 90

상 중 하

23. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 9 인 원 C_0 이 있다. 원 C_0 의 반지름의 3 등분하여 원점 O 에서 가까운 점부터 차례로 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{Q}_1$ 이라 하고, 중심이 O 이고 $\overline{\mathrm{OP}_1},\ \overline{\mathrm{OQ}_1}$ 을 반지름으로 하는 원을 각각 $C_1,\ D_1$ 이라 하자. 같은 방법으로 원 C_1 의 반지름 $\overline{\mathrm{OP}_1}$ 을 3 등분하여 원점 O 에서 가까운 점부터 차례로 $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{Q}_2$ 라 하고, 중심이 O 이고 $\overline{\mathrm{OP}_2},\ \overline{\mathrm{OQ}_2}$ 를 반지름으로 하는 원을 각각 $C_2,\ D_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 $C_n,\ D_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만든다. 원 D_n 의 넓이에서 원 C_n 의 넓이를 뺀 값을 S_n 이라 할 때, S_5 의 값은?



[수능특강]

① $\dfrac{1}{3^3}\pi$ ② $\dfrac{1}{3^4}\pi$ ③ $\dfrac{1}{3^5}\pi$
④ $\dfrac{1}{3^6}\pi$ ⑤ $\dfrac{1}{3^7}\pi$

주관식

상 중 하

24. 등비수열 $\sqrt{6-4\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{12-8\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{24-16\sqrt{2}}\ ,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은 $p\sqrt{m}$ 이다. 이때, $p+m$의 값을 구하시오(단, p는 정수이고 m은 소수인 자연수이다.)

[고득점 N제]

상 중 하

25. 첫째항이 a, 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\dfrac{S_{2n}}{S_n}=5$ 가 성립할 때, $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

[수능특강]

04 등비수열의 합과 일반항

$s_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ 일 때, $a_n = s_n - s_{n-1} = ar^{n-1}$

상 중 하

26. 첫째항이 49이고, 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ 로 정의되는 수열 $\{b_n\}$도 등비수열일 때, b_2의 값은?

[수능특강]

① 49^2 ② 49×50 ③ 50^2
④ $1+49^2$ ⑤ $1+50^2$

상 중 하

27. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 12$, $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{10}} = 3$

일 때, $a_4 a_7$의 값은?

[인터넷수능]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 27 ⑤ 81

상 중 하

28. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$이 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열을 이룰 때, 첫째항 a_1부터 제 10항인 a_{10}까지의 곱 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$의 값은?

[인터넷수능]

① 3^{40} ② 3^{45} ③ 3^{55}
④ $2 \cdot 3^{45}$ ⑤ $2 \cdot 3^{55}$

주관식

상 중 하

29. 공비가 2, 끝항이 400, 총합이 750인 등비수열에서 첫째항과 항수를 각각 a, n이라 할 때, $a+n$의 값을 구하여라.

[수능특강]

05 원리합계

(1) 연이율 r, 1년마다 복리로 원금 a원을 예금했을 때, n년 후의 원리합계 P는

$$P=a(1+r)^n$$

(2) 연이율 r, 1년마다 복리로 a원씩 적립할 때, n년 후의 원리합계(적립총액) S는

(ⅰ) 매년 초에 적립하는 경우

$$S=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

(ⅱ) 매년 말에 적립하는 경우

$$S=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

상 중 하

30. 2010년 1월 초 판매 가격이 130만 원인 노트북컴퓨터의 판매 가격은 매월 초 직전 달보다 1%씩 계속 인하된다고 한다. 어느 은행에 2010년 1월 초부터 2010년 12월 초까지 매월 초마다 일정한 금액을 적립하여, 12개월 후인 2011년 1월 초에 원금과 이자를 모두 찾아 바로 노트북컴퓨터를 구입하기로 하였다. 이 은행은 월이율이 1%이고 매월마다 복리로 계산한다고 할 때, 매월 초에 적립해야 할 금액은?
(단, $0.99^{12}=0.89$, $1.01^{12}=1.13$으로 계산하고, 백 원 단위에서 반올림하며, 세금은 고려하지 않는다.)

[수능특강]

① 74000원 ② 76000원 ③ 78000원
④ 85000원 ⑤ 88000원

상 중 하

31. 가격이 100만 원인 TV를 이 달 초에 할부로 구입하여 이 달 말부터 매월 말에 일정한 금액으로 12회에 걸쳐 모두 갚으려고 한다. 이때, 매월 말에 갚아야 할 금액을 구하는 식으로 옳은 것은? (단, 월이율은 1%의 복리로 계산하고 단위는 만 원이다.)

[수능특강]

① $\dfrac{1.01^{11}}{1.01^{12}-1}$ ② $\dfrac{1.01^{12}-1}{1.01^{11}}$ ③ $\dfrac{1.01^{12}}{1.01^{11}-1}$
④ $\dfrac{1.01^{12}-1}{1.01^{12}}$ ⑤ $\dfrac{1.01^{12}}{1.01^{12}-1}$

상 중 하

32. 어떤 사람이 자동차를 구입하는데 자동차 대금의 일부는 구입할 때 현금으로 지불하고 나머지 1200만원은 할부로 지불하기로 하였다. 구입 후 1개월 후부터 매달 일정한 금액을 36회로 나누어 갚을 때, 매달 갚아야 할 금액은?(단, 월이율1%의 복리로 계산하며 $1.01^{36}=1.4$로 계산한다.)

[인터넷수능]

① 38만원 ② 39만원 ③ 40만원
④ 42만원 ⑤ 46만원

상 중 하

33. 지호는 여행 비용을 마련하기 위하여 다음 조건으로 저축을 시작하였다.

(가) 2009년 1월부터 2010년 12월까지 매달 초에 입금한다.
(나) 첫째 달은 10만원을, 두 번째 달부터는 바로 전 달보다 0.8% 증가한 금액을 입금한다.
(다) 매번 입금한 금액에 대하여 입금한 날로부터 24개월까지는 월이율1.1%의 복리로 매달 계산하고, 그 이후에는 월이율 0.8%의 복리로 매달 계산한다.

이와 같은 조건으로 저축하였을 때, 2012년 12월 말의 원리합계는?(단, $1.008^{24}=1.2$, $1.011^{24}=1.3$으로 계산한다.)

[인터넷수능]

① 368만 4천원 ② 370만 4천원 ③ 372만 4천원
④ 374만 4천원 ⑤ 376만 4천원

상 중 하

34. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

(가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
(나) 입사20년째 해부터의 연봉은 입사19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.)

[인터넷수능]

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

상 중 하

35. A씨는 내년 1월부터 연금을 받게 되는데 아래 두 조건 중에서 하나를 택하기로 되어 있다. 각각의 조건에 해당하는 연금을 내년 1월 1일에 일시불로 받는다고 가정했을 때, 더 유리한 조건과 그 때 일시불로 받게 되는 연금의 차를 바르게 짝지은 것은? (단, 월이율 0.4%의 복리로 계산하고 $1.004^{-60}=0.791$, $1.004^{-120}=0.6818$로 계산한다.)

[고득점 N제]

(가) 내년 1월 말부터 매월 말에 200만 원씩 5년 동안 지급한다.
(나) 내년 1월 말부터 매월 말에 100만 원씩 10년 동안 지급한다.

① (가), 900만원 ② (가), 800만원 ③ (가), 700만원
④ (나), 900만원 ⑤ (나), 800만원

상 중 하

36. 어떤 기업은 사업 확정을 위해 금융권에서 연초에 20억원을 빌리고 그 해 말부터 10년 동안 갚으려고 한다. 이 기업은 매년 말에 갚아야 할 금액을 전년도보다 5%씩 더 늘리기로 하였다. 이 기업이 첫해에 갚아야할 금액은 얼마인가?(단, 연이율은5%이고, 1년마다 복리로 계산한다.)

[인터넷수능]

① 1.9억 원 ② 1.95억 원 ③ 2.05억 원
④ 2.1억 원 ⑤ 2.2억 원

주관식

상 중 하

37. 2001년 12월 말부터 매년 말에 50만 원씩 연이율 10%의 복리로 10년간 적립할 때, 2010년 12월 말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.1^{10}=2.6$으로 계산한다.)

[수능특강]

상 중 하

38. 어느 회사원이 2010년 1월 초에 2000만 원인 전원주택을 2019년 12월 말에 구입하고자 2010년 1월 초에 은행에 A만 원을 적립하고 다음 해부터 매년 초에 전년도 적립금액의 5%를 증액하여 적립하기로 하였다. 해마다 전원주택의 가격은 전년에 비해 2%씩 증가하고, 이 은행은 연이율이 5%이고, 매년마다 복리로 계산하다고 할 때, 처음 적립해야 할 금액 A의 값을 구하여라.
(단, $1.05^{10}=1.6$, $1.02^{10}=1.2$로 계산하고, 단위는 만 원이다.)

[수능특강]

06 등차등비수열의 진위판정

상 중 하

39. 모든 항이 양수이고 서로 다른 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 할 때, 항상 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{b_n\}$도 등비수열이다.
ㄴ. 수열 $\{3^{b_n}\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{\log_3 a_n\}$이 공차가 0이 아닌 등차수열이면 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

40. 다섯 개의 실수 $4,\ a,\ b,\ c,\ 36$ 이 다음 세 조건을 만족한다.

(가) $4, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(다) $b, c, 36$이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, $a+b+c$의 값은? (단, $a<0$)

[인터넷수능]

① 8　② 12　③ 24
④ 36　⑤ 48

상 중 하

41. 수열$\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=-n^2+6n+7$일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{S_{n+1}-S_n\}$은 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄷ. $a_n<0$, $S_n>0$을 동시에 만족하는 자연수 n의 개수는 2개이다.

[수능특강]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

42. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a_n \cdot S_n \neq 0$)

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$도 등비수열이다.
ㄴ. 수열$\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$도 등비수열이다.
ㄷ. 수열$\{S_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$도 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

43. 공비가 r인 등비수열$\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, $r\neq 1$)

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{\log a_n^2\}$은 공차가 $2\log r$인 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{\log a_{2n}\}$은 공차가 $2\log r$인 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\left\{\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right\}$은 공차가 r^2인 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

44. a, b, c가 서로 다른 세 실수일 때, 이차함수 $f(x)=ax^2+2bx+c$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[난이도 중]

[보 기]

ㄱ. a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $f(1)=4b$이다.
ㄴ. a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 함수$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 함수$y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

45. 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$b_n = a_{2n-1} + a_{2n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$로 계산한다.)

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $b_2 = 72$

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. b_{10}은 9자리의 정수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

46. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 주어진 순서대로 등비수열을 이루는 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 3^a, 3^b, 3^c

ㄴ. $3^{(a-b)^2}$, $\sqrt{3^{(a+b)^2}}$, 3^{4ab}

ㄷ. $\dfrac{b}{3}$, $a+c$, $4(a+b+c)$

[고득점 N제]

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 통합유형

상 중 하

47. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = n^2 + 2n$일 때,

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{10}} = \frac{q}{p}(a^{10} - 1)$$

이 성립한다. 이때, p, q, a의 합 $p+q+a$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수)

[인터넷수능]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

상 중 하

48. 네 실수 a, x, y, b가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 네 실수 a, p, q, b가 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $x+y=5$, $pq=4$일 때, $|a-b|$의 값은?

[인터넷수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

49. 세 실수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음 세 조건을 만족한다.

(가) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) a, c, b는 이 순서대로 공비가 1이 아닌 등비수열을 이룬다.
(다) $f(1)=3$

이때, $f(2)$의 값은?

[인터넷수능]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

상 중 하

50. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항과 공차가 양수일 때,

$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{15}{a_1a_k}$를 만족하는 자연수 k의 값은?
(단, $k>1$)

[인터넷수능]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

상 중 하

51. 오른쪽 표는 행과 열이 각각 등차수열과 등비수열을 이루도록 나열된 것이다. i행 j열 의 수를 a_{ij}로 나타내기로 한다.
$a_{mn}=2020$을 만족할 때, $m+n$의 값은?

	1열	2열	3열	4열	5열	$\cdots$
1행	1	3	5	7	9	$\cdots$
2행	2	6	10	14	18	$\cdots$
3행	4	12	20	28	36	$\cdots$
4행	8	24	40	56	72	$\cdots$
5행	16	48	80	112	144	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[인터넷수능]

① 250 ② 252 ③ 254
④ 256 ⑤ 258

상 중 하

52. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합은 S_n이라 하자. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 r가 1이 아닌 양수일 때, S_n, S_{2n}, S_{4n}은 이 순서로 등차수열을 이룬다. 이 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$의 값은? (단, $a_n \neq 0$)

[고득점 N제]

① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

상 중 하

53. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\sqrt[4]{10}$인 등비수열이고, $\log a_1$의 지표는 1, 가수는 $\frac{1}{4}$이다. 자연수 n에 대하여 $\log a_n$의 가수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+g(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값은?

[인터넷수능]

① 25 ② $\frac{75}{2}$ ③ 50
④ $\frac{125}{2}$ ⑤ 75

주관식

상 중 하

54. 등비수열 $\{a_n\}$의 네 항 a_1, a_2, a_4, a_5가

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, $a_{10}+a_{11}$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

여러 가지 수열

01 $\sum$의 성질

$\sum$의 성질–쉽게 느껴지면서 활용도가 높은 공식이다.

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (복부호동순)

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (c는 상수)

③ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=2}^{n} a_k + a_1$

상 중 하

1. 다음 수열의 첫째항부터 제100항까지의 합은?

[수능특강]

$1,\ \sqrt{3-2\sqrt{2}},\ \sqrt{5-2\sqrt{6}},\ \sqrt{7-2\sqrt{12}},\ \cdots$

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

상 중 하

2. $\sum_{k=1}^{10}(k+4)(k-2) - \sum_{k=1}^{10}(k-4)(k+2)$의 값은?

[인터넷 수능]

① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

상 중 하

3. 첫째항이 $a_1 = 2$인 수열 $\{a_n\}$이

$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} = 10$을 만족할 때, a_n의 값은?

[수능특강]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

상 중 하

4. $\sum_{k=1}^{14} [\log_2 \{\log_{k+1}(k+2)\}]$의 값은?

[수능특강]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

주관식

상 중 하

5. $\sum_{n=1}^{15} a_n = 45$, $\sum_{n=1}^{15} b_n = 70$일 때, $\sum_{n=1}^{15}(2a_n - 3b_n + 5)$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

6. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 8$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k + 3)$의 값을 구하여라.

[인터넷 수능]

상 중 하

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^3 = 320,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^3 = 100$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

02 자연수의 거듭제곱의 합

자연수의 거듭제곱의 합을 쉽게 구할 수 있는 공식이다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$

주관식

상 중 하

8. $\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

상 중 하

9. 다음 수열의 합을 구하여라.

[수능특강]

$$1,\ \frac{1+2}{2},\ \frac{1+2+3}{3},\ \cdots,\ \frac{1+2+3+\cdots+16}{16}$$

상 중 하

10. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

03 분모가 무리수인 수열의 합

각 항의 분모가 무리수이면, 분모를 유리화하여 합을 구하자!

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$$

상 중 하

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$의 값은?

[수능특강]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

상 중 하

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_n>0,\ \log_{(n+1)}(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)=2$$

가 성립할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

04 부분분수를 활용한 수열의 합

각 항의 분모가 두 수의 곱이면 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$을 이용하여 합을 구한다.

상 중 하

13. $\displaystyle\sum_{k=2}^{15}\frac{\log_2(k+1)-\log_2 k}{\log_2 k\log_2(k+1)}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

상 중 하

14. 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 두 함수

$f(n)=(n-1)(n+1)$, $g(n)=2n+1$

이 있다. $h(n)=(f\circ g)(n)$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{h(n)}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{5}{21}$
④ $\frac{2}{21}$ ⑤ $\frac{5}{22}$

상 중 하

15. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{1^2+2^2}+\dfrac{a_3}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\dfrac{a_{20}}{1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\dfrac{20}{21}$ ② $\dfrac{40}{21}$ ③ $\dfrac{19}{7}$ ④ $\dfrac{20}{7}$ ⑤ $\dfrac{40}{7}$

상 중 하

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [3점]

[수능특강]

① $\dfrac{11}{21}$ ② $\dfrac{20}{21}$ ③ $\dfrac{31}{21}$ ④ $\dfrac{40}{21}$ ⑤ $\dfrac{50}{21}$

상 중 하

17. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_{n+1}=(f\circ f\circ f)(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{\log_2(a_k+1)\log_2(a_{k+1}+1)}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\dfrac{13}{40}$ ② $\dfrac{39}{40}$ ③ $\dfrac{41}{40}$ ④ $\dfrac{14}{43}$ ⑤ $\dfrac{42}{43}$

상 중 하

18. 자연수 n에 대하여 직선 $y=ax$와 원 $(x-4)^2+y^2=\dfrac{4}{n^2}$에 접하도록 하는 실수 a를 $f(n)$으로 나타낼 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\{f(n)\}^2$의 값은?

[수능특강]

① $\dfrac{8}{21}$ ② $\dfrac{10}{21}$ ③ $\dfrac{4}{7}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{16}{21}$

주관식

상 중 하

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{m}$ 을 만족시키는 자연수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소이다.)

[수능특강]

05 합과 일반항 과의 관계를 활용한 문제

$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ 를 활용하여 일반항을 구하여 수열의 합을 구하는 문제이다.

상 중 하

20. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{2n} a_{2k}$ 를 n 에 관한 식으로 나타내면?

[수능특강]

① $n(n+1)$ ② $2n(n+1)$ ③ $2n(n+2)$
④ $4n(2n+1)$ ⑤ $4n(2n+3)$

상 중 하

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

[인터넷 수능]

① 240 ② 300 ③ 360
④ 420 ⑤ 480

상 중 하

22. 수열 $\log_3\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$, $\log_3\left(1-\frac{1}{3^2}\right)$, $\log_3\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$, $\cdots$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n+S_{n+1}<-1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

[고득점 N제]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

06 계차수열

수열 $\{a_n\}$에서 이웃한 두 항의 차 $a_{n+1}-a_n=b_n$으로 이루어진 수열 $\{b_n\}$을 계차수열이라 한다. 이때,

$$a_n=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ (\text{단, } n\geq 2)$$

위의 성질을 이용하여 풀어보자!

상 중 하

23. 수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}-a_n=2n$을 만족시킨다. $a_{10}=94$일 때, a_1의 값은?

[인터넷 수능]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

상 중 하

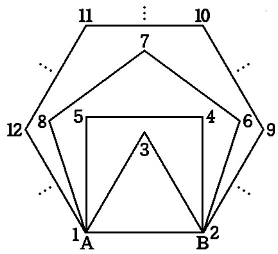
24. 매일 x원씩 20일간 저금할 때의 원금 총액을 a원, 1일에 1원, 2일에 2원, 3일에 4원, 4일에 7원, 5일에 11원, $\cdots$의 방법으로 20일간 저금할 때의 원금 총액을 b원이라 할 때, $a>b$이기 위한 자연수 x의 최솟값은?

[수능특강]

① 65 ② 66 ③ 67
④ 68 ⑤ 69

상 중 하

25. 선분AB를 한 변으로 공유하는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, … 을 차례로 그린다. 그림과 같이 선분 AB의 양 끝점에 각각 1, 2를 적고, 각 정다각형의 꼭짓점 중 두 점 A, B를 제외한 모든 꼭짓점에 정삼각형, 정사각형, 정오각형, … 의 순서로 자연수 3, 4, 5, … 를 차례로 대응시킨다. 정 20각형의 꼭짓점에 대응되는 자연수 중에서 가장 큰 수는?



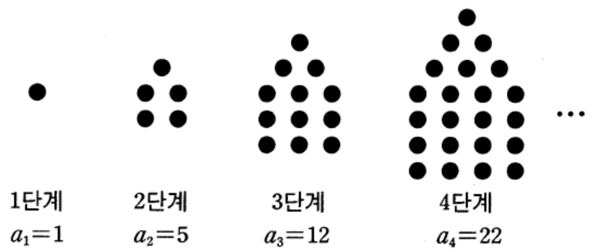
[수능특강]

① 122　② 173　③ 185
④ 202　⑤ 235

상 중 하

26. 다음 그림과 같이 일정한 규칙으로 바둑돌을 배열한다. n단계에 사용된 바둑돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

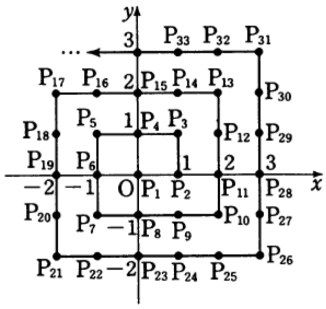
[인터넷 수능]



① 510　② 520　③ 530
④ 540　⑤ 550

상 중 하

27. 좌표평면에서 오른쪽 그림과 같은 규칙으로 원점에서부터 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 차례로 P_1, P_2, P_3, … 이라 하자. 예를 들어 점 P_3의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 점 P_{21}의 좌표는 $(-2,\ -2)$이다. 점 P_{1400}의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?



[인터넷 수능]

① 28　② 29　③ 30
④ 31　⑤ 32

상 중 하

28. 다음 규칙에 의하여 그림과 같이 각 행에 수를 나열한다.

(가) 제 1행은 1, 1, 1이다.
(나) 제 2행부터 모양의 아랫부분에 놓이는 수는 윗부분에 놓인 수들의 합이다.
(다) 모양의 윗부분에는 수가 1개, 2개, 3개까지 놓일 수 있다.

제1행					1	1	1				
제2행				1	2	3	2	1			
제3행			1	3	6	7	6	3	1		
제4행		1	4	10	16	19	16	10	4	1	
제5행	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
⋮						⋮					

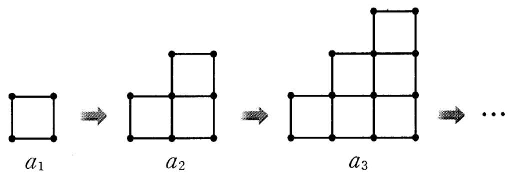
제 n행의 k번째 수를 $a_{(n,\ k)}$라 할 때,
$a_{(9,\ 1)}+a_{(9,\ 2)}+a_{(10,\ 1)}+a_{(10,\ 2)}+a_{(10,\ 3)}$의 값은?

[인터넷 수능]

① 75　② 76　③ 77
④ 78　⑤ 79

상 중 하

29. 그림과 같이 계단 모양으로 꼭짓점의 개수를 늘려갈 때, n번째 도형의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들면, $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$이다.



이 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $a_7 = 43$

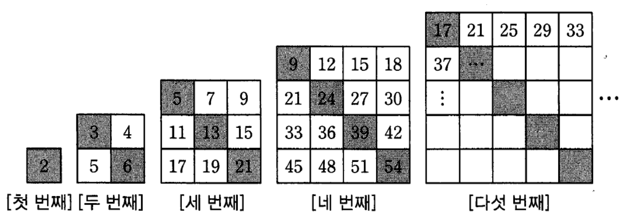
ㄴ. $a_{n+1} = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+5)$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+2)(n+7)}{6}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

30. 다음과 같이 정사각형 속에 자연수를 나열하였다.



정사각형의 대각선의 어두운 부분에 있는 수들의 합을 a_n이라 하자. 예를 들면, $a_1 = 2$, $a_2 = 3+6$, $a_3 = 5+13+21$, $a_4 = 9+24+39+54$이다. 이 때, a_8의 값은?

[고득점 N제]

① 2542　② 2636　③ 2684
④ 2752　⑤ 2796

주관식

상 중 하

31. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같다.

$2,\ 4,\ 8,\ 14,\ 22,\ \cdots$

이때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

32. 수열 $\{a_n\}$에서 각각의 자연수 n에 대하여 세 항 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 항 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서로 등비수열을 이룬다. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$일 때, a_{15}의 값을 구하여라.

[수능특강]

07 군수열

어떤 규칙에 의해 몇 개의 군으로 나누어 나열된 수열을 군수열이라 하며 다음과 같이 대략 3단계의 특성을 살펴본다.
1) n군의 초항을 찾는다.
2) n군의 항수와 n군까지의 총 항수를 찾는다.
3) 각 군 내부의 규칙성을 찾아본다.

상 중 하

33. 다음 수열에서 $\frac{7}{12}$은 제 몇 항에서 처음으로 나타나는가?

[수능특강]

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \cdots$$

① 제 70항 ② 제 71항 ③ 제 72항
④ 제 73항 ⑤ 제 74항

상 중 하

34. 다음과 같이 일정한 규칙으로 나열된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, ⋯
이때, $a_n = 31$인 n의 최솟값은?

[인터넷 수능]

① 100 ② 104 ③ 108
④ 112 ⑤ 116

상 중 하

35. 다음 수열에서 $\frac{10}{27}$은 제 몇 항에서 처음으로 나타나는가?

[수능특강]

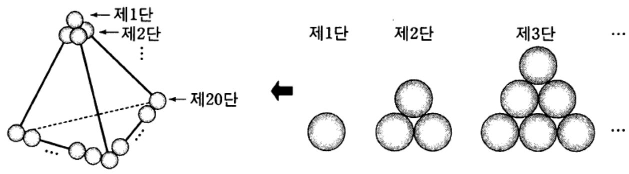
$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{7},\ \frac{6}{7},\ \cdots$$

① 제169항 ② 제173항 ③ 제187항
④ 제193항 ⑤ 제196항

상 중 하

36. 다음 그림과 같은 규칙으로 구슬을 정사면체 모양으로 쌓는다. 이와 같은 방법으로 구슬을 20단까지 쌓을 때, 필요한 구슬의 개수는?

[인터넷 수능]



① 1500 ② 1510 ③ 1520
④ 1530 ⑤ 1540

상 중 하

37. 각 행에 네 개씩 다음과 같은 규칙으로 수를 나열한다.

제1행	1, 2, 3, 4
제2행	11, 12, 13, 14
제3행	21, 22, 23, 24
제4행	31, 32, 33, 34
제5행	41, 42, 43, 44
제6행	111, 112, 113, 114
제7행	121, 122, 123, 124
제8행	131, 132, 133, 134
제9행	141, 142, 143, 144
제10행	211, 212, 213, 214
⋮	⋯
제22행	1111, 1112, 1113, 1114
제23행	1121, 1122, 1123, 1124
⋮	⋯

이와 같이 배열된 수를 크기순으로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 만들때, a_{400}의 값은?

[인터넷 수능]

① 11344 ② 11424 ③ 11434
④ 12114 ⑤ 12214

상 중 하

38. 유리수로 이루어진 순서쌍의 수열

$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}\right), \left(\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{4}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{8}{8}\right), \left(\frac{2}{8}, \frac{4}{8}\right),$
$\left(\frac{4}{8}, \frac{2}{8}\right), \left(\frac{8}{8}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{16}{16}\right), \cdots$

에서 제 200항을 (a, b)라 할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

주관식

상 중 하

39. 자연수를 다음과 같이 나열하였다.

제 1행	3
제 2행	5 5
제 3행	7 7 7
제 4행	9 9 9 9
제 5행	11 11 11 11 11
⋮	⋮

제 1행의 수를 a_1, 제 2행의 첫 번째 수를 a_2, 두 번째 수를 a_3, 제 3행의 첫 번째 수를 a_4, 두 번째 수를 a_5, $\cdots$으로 정의하는 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=70}^{100} a_k$의 값을 구하여라.

[인터넷 수능]

08 행과 열을 이용한 수열의 성질 찾기

행과 열을 이용하여 주어진 조건에 맞는 수열의 성질을 찾는 문제이다. 행과 열의 규칙 뿐 아니라, 대각선방향의 규칙 등 다양한 적용방법을 요구하는 문제이므로 다양한 문제의 해법을 정리 해 둬야 한다.

상 중 하

40. 오른쪽과 같이 짝수 $2, 4, 6, 8, \cdots$을 5열로 규칙적으로 나열할 때, 2008은 제 a행의 제 b열에 나타난다. 이 때, $a+b$의 값은?

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열
제1행		2	4	6	8
제2행	16	14	12	10	
제3행		18	20	22	24
제4행	32	30	28	26	
제5행		34	36	38	40
제6행	48	46	44	42	
⋮	⋯				

[인터넷 수능]

① 252 ② 253
③ 254 ④ 255
⑤ 256

주관식

상 중 하

41. 아래와 같이 자연수가 배열되어 있다. 300이 제m행 제n열의 수라고 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

[수능특강]

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	⋯
제1행	1	4	5	16	17	
제2행	2	3	6	15	18	
제3행	9	8	7	14	19	
제4행	10	11	12	13	20	
제5행	25	24	23	22	21	
⋮						

09 발견적 추론

발견적 추론은 주어진 수학적 관계를 분석하여 여러 개의 항을 나열 해 본 후, 숨어 있는 규칙성을 발견해 내는 문제이다. 이미 배운 다양한 수열의 성질을 활용하여 식을 이끌어 내는 데 주력하자!

상 중 하

42. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬을 B라 할 때, B^n의 (2, 1) 성분을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

[수능특강]

① $11+\frac{1}{2^{10}}$ ② $10+\frac{1}{2^{10}}$ ③ $9+\frac{1}{2^{10}}$
④ $10+\frac{1}{2^{11}}$ ⑤ $9+\frac{1}{2^{11}}$

상 중 하

43. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n+a_{n+1}=6n+3$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

[인터넷 수능]

① 600 ② 610 ③ 630
④ 650 ⑤ 680

상 중 하

44. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(k)$가

$f(k)=\begin{cases} k-2 & (k \geq 4) \\ f(f(k+3)) & (k<4) \end{cases}$ 을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{12} f(k)$의 값은?

[수능특강]

① 45　② 50　③ 55
④ 60　⑤ 65

상 중 하

45. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)+\sum_{k=2}^{10}(k+2)+\sum_{k=3}^{10}(k+3)+\cdots$

$+\sum_{k=9}^{10}(k+9)+\sum_{k=10}^{10}(k+10)$의 값은?

[인터넷 수능]

① 585　② 590　③ 595
④ 600　⑤ 605

상 중 하

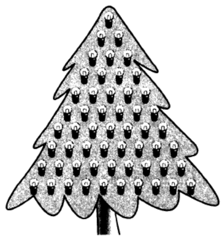
46. 자연수 n에 대하여 $\dfrac{n(n+1)}{2}$을 3으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2010} a_n$의 값은?

[수능특강]

① 666　② 667　③ 668
④ 669　⑤ 670

상 중 하

47. 오른쪽 그림과 같이 나무에 55개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1개, 두 번째 줄에는 2개, 세 번째 줄에는 3개, …, 열 번째 줄에는 10개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



(가) n이 10이하의 자연수일 때, n번째 줄에 있는 전구는 n초가 되는 순간 처음 켜진다.
(나) 모든 전구는 처음 켜준 후 1초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=6$, $a_{11}=25$이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① 215　② 220　③ 225
④ 230　⑤ 235

상 중 하

48. 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택하여 1보다 작은 분수를 만든다. 이때 만들어 지는 모든 분수의 합은?(단, 모든 분수를 기약분수로 고쳤을 때, 그 값이 같더라도 택해지는 두 수가 다르면 다른 분수로 생각한다.)

[인터넷 수능]

① 2475 ② 2525 ③ 4950
④ 5050 ⑤ 5115

상 중 하

49. 모든 자연수를 차례로 나열한 수열 1, 2, 3, $\cdots$에서 12와 서로소인 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, $a_n > 100$인 자연수 n의 최솟값은?

[인터넷 수능]

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

상 중 하

50. $2^n + 3^n$을 5로 나눈 나머지가 3이 되는 자연수 n의 값을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

[고득점 N제]

① 196 ② 200 ③ 204
④ 208 ⑤ 212

상 중 하

51. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & (n = 3k-2) \\ (-1)^n & (n = 3k-1) \\ \dfrac{a_{3k-2}}{a_{3k-1}} & (n = 3k) \end{cases} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의될 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $a_{100} = -1$

ㄴ. $a_n \times a_{n+3} = -1$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} a_k = 34$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

010 연역적 추론

연역적 추론의 문제들은 수학의 다양한 정의, 공식, 성질을 이용하여 주어진 명제를 증명하거나 참, 거짓을 찾아내는 유형이다. 반례, 귀납법, 동치명제의 증명, 삼단논법에 따른 증명 등을 통하여 연역적 추론능력을 길러야 한다.

상 중 하

52. 수열

$$27,\ 272,\ 2727,\ 27272,\ 272727,\ \cdots$$

의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_{2n}의 값을 구하는 과정이다

> 수열 27, 272, 2727, 27272, 272727, $\cdots$의 일반항을 a_n이라하자.
> 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열
> 27, 2727, 272727, $\cdots$의 일반항 a_{2k-1}은
> $a_{2k-1}=$ (가) $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$
> 수열 $\{a_n\}$의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열
> 272, 27272, 2727272, $\cdots$의 일반항 a_{2k}은
> $a_{2k}=$ (나) $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$
> $\therefore\ S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{3}{11}(10^{2k}-1)$	$10a_{2k-1}+2$	$\frac{100}{33}(10^{2n}-1)+n$
②	$\frac{3}{11}(10^{2k}-1)$	$10a_{2k-1}+2$	$\frac{100}{33}(10^{2n}-1)-n$
③	$\frac{3}{11}(10^{2k}-1)$	$100a_{2k-1}+2$	$\frac{1}{33}(10^{2n}-1)-n$
④	$\frac{9}{11}(10^{2k}-1)$	$10a_{2k-1}+2$	$\frac{100}{33}(10^{2n}-1)-n$
⑤	$\frac{9}{11}(10^{2k}-1)$	$100a_{2k-1}+2$	$\frac{100}{33}(10^{2n}-1)+n$

상 중 하

53. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$b_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{b_n\}$도 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{a_n\}$도 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이고, $\sum_{k=1}^{10}b_{2k-1}=20,\ \sum_{k=1}^{10}b_{2k}=10$이면 $a_{10}=-9$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

54. 99개의 자연수로 이루어진 수열 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{99}$중 어느 한 항을 제외하여도 나머지 98개의 항을 합이 같은 두 그룹으로 나눌 수 있다고 한다. $a_1=1$일 때, 그 값이 홀수인 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_1+a_2+\cdots a_{99}$
ㄴ. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$
ㄷ. $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ

상 중 하

55. 중심이 $(n,\ i)$이고, 반지름의 길이가 j인 원이 x축 또는 y축과 만나는 점의 개수를 이차정사각행렬 A_n의 성분 a_{ij}라 하고, 행렬 A_n의 모든 성분의 합을 $S(n)$이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, n은 음이 아닌 정수이고, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2$)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $A_n=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

ㄴ. 자연수 $n_1,\ n_2$에 대하여 $n_1<n_2$이면 $S(n_1)>S(n_2)$이다.

ㄷ. $\sum_{k=0}^{12} S(k)=66$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

56. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=(n+1)b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $a_n>0$일 때, $m<n$이면 $b_m<b_n$이다.

ㄴ. $b_n=n$이면 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{22}$이다.

ㄷ. 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{a_n\}$도 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

57. 수열$\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $S_n=n^2$이면 $a_n=2n-1$이다.

ㄴ. $S_{2n}=16n^2$이면 $a_n=8n-4$이다.

ㄷ. $S_n=3^n-1$이면 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

58. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 ω^n의 실수부분을 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100}(a_k a_{k+1} a_{k+2})$의 값을 구하여라. [4점]

[수능특강]

011 이 해 1-주어진 식의 이해

주어진 관계식 또는 문장들을 수학적 정의에 따라 해석하여 문제에서 요구하는 답을 찾아내는 평가영역의 문제이다.
10-가. 나와의 연계를 통한 문제들이 많이 출제되므로 수1의 영역 뿐 아니라 수 와 식, 방정식, 부등식, 여러 가지 함수, 절대값의 풀이 방법 등에 대한 정의와 유형을 익혀두자!

상 중 하

59. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 정의된 함수 $f:X\to X$ 중 $f(1)=2,\ f(f(1))=3$을 만족시키는 모든 함수를 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} f_k(2)f_k(3)f_k(4)$의 값은?

[수능특강]

① 150 ② 175 ③ 200
④ 225 ⑤ 300

상 중 하

60. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

상 중 하

61. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{101}=\frac{1}{4}$이고 $\sum_{k=1}^{100} k(a_k-a_{k+1})=30$일 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값은?

[인터넷 수능]

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

상 중 하

62. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(n)=\begin{cases} n & (n\text{이 짝수일때}) \\ 1 & (n\text{이 홀수일때}) \end{cases}$에 대하여 $\sum_{m=1}^{20} f(m^2)$의 값은?

[인터넷 수능]

① 1200 ② 1350 ③ 1550
④ 1620 ⑤ 2110

상 중 하

63. 함수 $f(x)$를 $f(x)=3^x-10\left[\dfrac{3^x}{10}\right]$로 정의 할 때, $\sum_{k=1}^{100} f(2k)$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

① 400 ② 450 ③ 500
④ 650 ⑤ 750

상 중 하

64. 수열 $\{a_n\}$을

$a_n=([\sqrt{k}]=[\sqrt{n}]$을 만족시키는 자연수 k의 개수)

라고 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

상 중 하

65. 자연수 n을 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $2=1\times2$, $4=1\times4=2\times2$이므로 $a_2=1$, $a_4=2$이다. 이 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $a_{72}+a_{81}=9$
ㄴ. $a_n=3$인 자연수 n의 최솟값은 16이다.
ㄷ. m, n이 소수이면 $a_m+a_n=a_{mn}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

주관식

상 중 하

66. 수열 $\{a_n\}$은 -1, 0, 1중의 어느 한 수이다.

$\sum_{k=1}^{40} a_k=0$, $\sum_{k=1}^{20} a_k=4$, $\sum_{k=1}^{20} |a_k|=12$

일 때, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{40}중 0인 것의 개수는 a이다. a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

[인터넷 수능]

상 중 하

67. 자연수 $n(n \geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4 = 5+10+15 = 30$이다. $a_n > 500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[인터넷 수능]

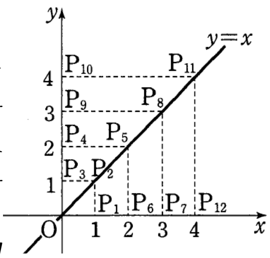
012 이해 2-그래프의 해석

다양한 함수의 그래프를 이용하여 수열 적 특성을 찾아내는 문제이다. 그래프의 해석과 이용이 답을 구하는데 결정적인 조건이므로, 다양한 문제를 통하여 숙달하도록 한다.

상 중 하

68. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 정할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 점선은 x축 또는 y축과 평행하다.)

[고득점 N제]



[보 기]

ㄱ. 점 P_{25}는 x축 위의 점이다.
ㄴ. 점 P_{52}의 좌표는 $(0, 18)$이다.
ㄷ. 점 P_{101}의 좌표는 $(33, 33)$이다.

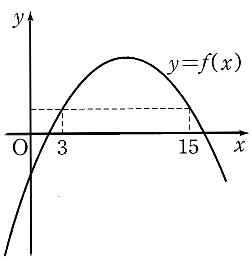
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

69. 함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15보다 작은 자연수일 때, $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오.

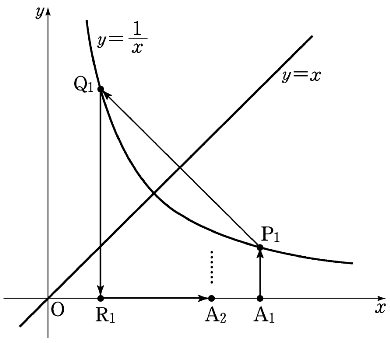
[인터넷 수능]



상 중 하

70. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
(3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
(4) 점 R_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.



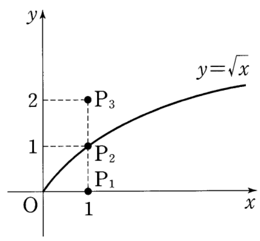
점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[인터넷 수능]

상 중 하

71. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(a_n,\ b_n)$을 다음과 같은 규칙에 따라 정한다.

[보 기]
(가) $a_1=1,\ b_1=0$
(나) $b_n \geq \sqrt{a_n+1}$이면 $a_{n+1}=a_n+1,\ b_{n+1}=b_n$
$b_n < \sqrt{a_n+1}$이면 $a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=b_n+1$이다.



예를 들면 $P_1(1,\ 0)$, $P_2(1,\ 1)$, $P_3(1,\ 2)$이다. 이때, 점 P_{100}의 x좌표와 y좌표를 각각 a, b라 할 때, $10a-b$의 값을 구하여라.

[인터넷 수능]

013 **수학의 내적 해결능력 1-합답형**

두 가지 이상의 수학적 개념이나 원리, 공식 등을 적용하여 풀어내는 유형이다. 그 중에서 옳고 그른 것을 찾아내는 합답형의 문제는 이해와 추론의 과정을 통하여 정확한 해법을 얻는데 주력해야 한다.

상 중 하

72. 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(k+2)$를 n으로 나눈 나머지를 $f(n)$으로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(3)=0$

ㄴ. $f(m)=\dfrac{m}{2}+1$을 만족하는 자연수 m이 존재한다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{2n}f(k)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

73. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을

$$f(n)=\frac{n+1}{3}-\left[\frac{n+1}{3}\right]$$

로 정의할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(30)=\dfrac{1}{3}$

ㄴ. 자연수 n_1, n_2에 대하여 $n_1<n_2$이면 $f(n_1)<f(n_2)$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100}f(k)=\dfrac{101}{3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

74. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=n-[\log_2 n]$으로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, n은 자연수이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_{10}=7$

ㄴ. 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 $a_m\neq a_n$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=28$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

75. 그림과 같이 제1 행에는 1 개, 제2 행에는 2 개, ⋯ , 제n 행에는 n 개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

> (가) 제 1 행의 직사각형에는 1 을 적는다.
> (나) 제 $n+1$ 행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 큰 수를 적는다.
> (다) 제 $n+1$ 행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 오른쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 작은 수를 적는다.
> (라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n 행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.

제1 행	1				
제2 행	2	0			
제3 행	3	2	-1		
제4 행	4	5	1	-2	
제5 행	5	9	6	-1	-3
⋮	⋮				

제 n 행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $<n, k>$ 로 나타내자. 예를 들어 $<4, 2>=5$ 이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $<10, 1> + <10, 10> = 2$
ㄴ. $<11, 2> + <11, 10> = 20$
ㄷ. $<12, 3> + <12, 4> + \cdots + <12, 10> = 2024$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

76. 자연수 n에 대하여 $n! = p\times 10^m$ (단, p는 자연수, m은 음이 아닌 정수)일 때, m의 최댓값을 a_n이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_5 + a_{25} = 7$
ㄴ. 서로 다른 두 자연수 n_1, n_2에 대하여 $n_1 < n_2$이면 $a_{n_1} < a_{n_2}$이다.
ㄷ. $n = 5^k$ (k는 음이 아닌 정수)일 때, $a_n = \dfrac{5^k - 1}{4}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

014 수학의 내적 해결능력 2-종합형문제

다양한 영역의 수학적 성질을 이용하여 수열의 성질을 추론해 내는 유형이다. 10-가, 나와의 연계성이 많은 부분이므로 문제를 풀면서 필요한 공식은 공식을 잘 정리해 두자.

상 중 하

77. 자연수 n에 대하여 6^n의 모든 약수를 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_i$라 할 때, $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{a_k}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{6^n}\right)$

② $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{6^n}\right)$

③ $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{6^{n+1}}\right)$

④ $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{6^{n+1}}\right)$

⑤ $3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{6^{n+1}}\right)$

상 중 하

78. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $\sqrt{2}\,x^2-2(\sqrt{3})^{n-1}x+1=0$의 두 근의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n}({a_k}^2-1)$은?

[고득점 N제]

① 3^n-n-1 ② 3^n+n-1 ③ $3^{n+1}-n-2$
④ $3^{n+1}-n-1$ ⑤ $3^{n+1}+n-1$

상 중 하

79. 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m+n=14,\ m^2+n^2=106$일 때, $\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{n}(k+l+1)\right\}$의 값은?

[고득점 N제]

① 365 ② 375 ③ 385
④ 395 ⑤ 405

상 중 하

80. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 다항식 $2x^2+3x+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지와 같을 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$의 값은?

[고득점 N제]

① 409 ② 411 ③ 413
④ 415 ⑤ 417

상 중 하

81. 오른쪽 표는 가로와 세로가 각각 10개의 칸으로 되어 있는 정사각형에 1부터 100까지의 자연수를 차례로 써 넣은 것이다. 각각의 행과 열에 대하여 중복되거나 빠지지 않게 각 행마다 오직 한 개씩 수를 선택하고자 한다. 예를 들어, 2행의 13이 이미 선택되었다면, 다른 행의 수를 선택할 때에는 13이 포함된 2행과 3열의 어떤 수도 선택할 수 없다. 이와 같이 10개의 수 들을 선택할 때, 선택되어진 모든 수들의 합은? [4점

1열	2열	3열		10열	
1	2	3	⋯	10	1행
11	12	13	⋯	20	2행
21	22	23	⋯	30	3행
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
91	92	93	⋯	100	10행

[수능특강]

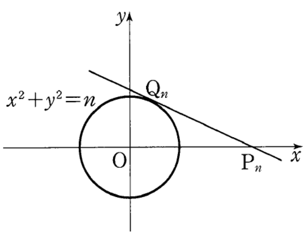
① 205 ② 355 ③ 455
④ 505 ⑤ 655

주관식

상 중 하

82. 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}_n(2n,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=n$에 접선을 그을 때, 접점을 Q_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{5}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q_n은 제 1사분면 위의 점이다.)

[고득점 N제]



Ⅱ 수학적 귀납법과 순서도

015 기본적인 수열의 점화식

등차. 등비, 조화, 수열의 점화식의 특성을 이해하고 이를 이용하여 해답을 구하는 유형이다.

① $a_{n+1}-a_n=d \Rightarrow$ 공차가 d인 등차수열
② $a_{n+1}=ra_n \Rightarrow$ 공비가 r인 등비수열
③ $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}} \Rightarrow$ 역수가 공차가 d인 등차수열을 이루는 조화수열

상 중 하

83. 오른쪽 표의 빈칸에 8개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써 넣어 가로, 세로 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈 칸에 써 넣을 8개의 수의 합은?

	5	

[수능특강]

① 30 ② 35 ③ 40
④ 44 ⑤ 50

상 중 하

84. $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{2n+2}-a_{2n+1}=a_{2n+1}-a_{2n}$ $(n=1,2,3,\cdots),\ a_{2n}=\sqrt{a_{2n-1}\cdot a_{2n+1}}\ (n=1,2,3,\cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{30}의 값은?

[인터넷 수능]

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

주관식

상 중 하

85. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의 될 때, a_5의 값을 구하여라.

[수능특강]

$a_1=2,\ a_2=6$

${a_{n+1}}^2=a_n\cdot a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

상 중 하

86. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $3a_n a_{n+1}=a_n-a_{n+1}$일 때, $\dfrac{1}{a_{100}}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

87. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_1=3,\ a_2=8,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=(4n-1)\cdot 2^n+1$을 만족시킬 때, b_5의 값을 구하여라. [3점]

[수능특강]

016 계차수열의 점화식

① $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\quad(p+q+r=0,\ pqr\neq 0)$

$\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$꼴로 변형하여 푼다.

② $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴의 점화식은

→ 축합의 성질을 이용하여 푸는 방법과

→ $a_{n+1}-a_n=f(n)$을 이용하여 $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ $(n\geq 2)$으로 변형하여 계차의 성질로 풀어내는 방법이 있다.

상 중 하

88. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=2$,

$a_{n+1}=a_n+2n\quad(n\geq 1)$로 정의 할 때, a_{10}의 값은?

[수능특강]

① 88 ② 89 ③ 90
④ 91 ⑤ 92

상 중 하

89. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1,\ a_2=3$이고 $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 관계가 성립할 때, a_{20}의 값은?

[수능특강]

① $\dfrac{1}{3}\left(7-\dfrac{1}{2^{17}}\right)$ ② $\dfrac{1}{3}\left(7+\dfrac{1}{2^{17}}\right)$ ③ $\dfrac{1}{3}\left(7-\dfrac{1}{2^{18}}\right)$
④ $\dfrac{1}{3}\left(7+\dfrac{1}{2^{18}}\right)$ ⑤ $\dfrac{1}{3}\left(7-\dfrac{1}{2^{19}}\right)$

상 중 하

90. $a_1=\frac{2}{3}, a_{n+1}=a_n+2n-\frac{16}{3}$ ($n=1,2,3,\cdots$) 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n은 $n=k$일 때, 최솟값 m을 갖는다. 이때, km의 값은?

[인터넷 수능]

① -18 ② -15 ③ -12
④ 16 ⑤ 24

상 중 하

91. $a_1=\frac{1}{6}, \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$ ($n=1,2,3,\cdots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_1=8a_1a_2,\ b_{n+1}-b_n=8a_{n+1}a_{n+2}$ ($n=1,2,3,\cdots$)가 성립하는 수열 $\{b_n\}$이 있다. b_{15}의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

상 중 하

92. 다음 조건을 만족하는 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$에 대하여 $a_5+b_5+c_5$의 값은?[3점]

[수능특강]

(가) $a_1=1,\ b_1=2,\ c_1=3$
(나) $b_n=a_{n+1}-a_n,\ c_n=b_{n+1}-b_n$
(다) $c_{n+1}=c_n+2$

① 70 ② 71 ③ 72
④ 73 ⑤ 74

상 중 하

93. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+\tan\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right),\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

[고득점 N제]

① 20 ② 24 ③ 25
④ 28 ⑤ 30

상 중 하

94. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 40$이고 p는 양의 정수, q는 정수일 때,
$a_{n+1} - a_n = pn + q \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$가 성립한다. 이때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_5 = 10p + 4q + 40$
ㄴ. $a_5 > 0, a_6 < 0$이면 $pq = -12$이다.
ㄷ. $a_5 > 0, a_6 < 0$일 때, $a_n < 0$인 n의 최댓값은 20 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

95. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1 = 1$
(나) $b_n = a_{n+1} - a_n = 10^n$
(다) $c_n = (a_n$의 각 자리의 숫자들의 합)

이때, $\sum_{n=1}^{10} c_n$ 의 값을 구하여라.

[수능특강]

017 $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$ 꼴의 점화식

$a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$ 꼴의 점화식은 축곱의 방법으로 풀어낸다.
$a_2 = f(1) \cdot a_1$
$a_3 = f(2) \cdot a_2$
$a_4 = f(3) \cdot a_3$
⋮
$a_n = f(n-1) \cdot a_{n-1}$의 각 변을 곱하면
$\Rightarrow \ a_n = a_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \cdots \cdot f(n-1) \quad (n \geq 2)$의 꼴로 변형되어 진다.

상 중 하

96. $a_1 = 2$, $(3n-2)a_{n+1} = (3n+1)a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_3 = 14$
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 175$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

97. $a_1=2,\ a_n=(n+1)b_n,\ b_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_2+b_2=8$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=440$

ㄷ. 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

98. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=2,\ a_{n+1}=[\log_5(n+5)]\times a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 같이 정의할 때, $a_{200}=2^p\times 3^q$이다. 자연수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

018 $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식

$a_{n+1}=pa_n+q \Rightarrow a_{n+1}-k=p(a_n-k)$꼴로 변형하면,
$a_n+k=(a_1+k)p^{n-1}$인 수열이 된다.

상 중 하

99. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=2$ 이고 $a_{n+1}=2a_n+2$ 일 때, a_{10} 의 값은?

[인터넷 수능]

① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

상 중 하

100. $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n-5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{20}-a_{19}$ 의 값은?

[인터넷 수능]

① $-3^{18}+1$ ② $-3^{19}+1$ ③ -3^{19}
④ -3^{20} ⑤ $-3^{20}+1$

상 중 하

101. $a_1=\frac{2}{3}\pi$, $\tan(2a_{n+1})+\tan(a_n)=0$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? $\left(\text{단}, 0<a_n<\frac{\pi}{2},\ n=1,\ 2, 3, \cdots\right)$

[수능특강]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2^9}\right)$

④ $\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$

상 중 하

102. 100억 원의 장학기금을 가지고 장학재단을 설립하고자 한다. 이 장학재단은 매년 장학생들에게 지불되는 장학금과 단체운영비로 전년도 기금의 10%를 사용한 후 장학기금의 완전 고갈을 막기 위하여 매년 5억 원의 기금을 추가로 적립한다. 지금부터 10년 후에 이 장학재단이 보유하고 있는 장학기금은?(단, $0.9^9=0.4$로 계산하고 이자는 고려하지 않는다.)

[수능특강]

① 60억 원 ② 64억 원 ③ 68억 원

④ 70억 원 ⑤ 76억 원

상 중 하

103. 10^n보다 작은 짝수 중 각 자리에 적어도 한 개의 2가 포함되어 있는 수의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들면, 10^2보다 작은 짝수 중 각 자리에 적어도 한 개의 2가 포함되어 있는 수는 $2, 12, 22, 32, \cdots, 92,$
$20, 24, 26, 28$이므로 $a_2=14$이다. a_n과 a_{n+1}사이의 관계식으로 옳은 것은? (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

[인터넷 수능]

① $a_{n+1}=4a_n+10^n$ ② $a_{n+1}=5a_n+9\cdot10^{n-1}$

③ $a_{n+1}=6a_n+8\cdot10^{n-1}$ ④ $a_{n+1}=9a_n+5$

⑤ $a_{n+1}=9a_n+5\cdot10^{n-1}$

주관식

상 중 하

104. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\frac{33}{32}$, $a_{n+1}=2a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때, $a_n<5000$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[고득점 N제]

019 특수한 꼴의 점화식 1-피보나치수열

피보나치수열의 대표적 일반항은 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$꼴로 나타난다. $n=1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot$을 대입하여 항의 값을 찾거나, 점화식의 성질을 이용하여 추론을 통하여 일반항을 찾아나가는 방법을 사용하면 된다.

상 중 하

105. 각 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_{n+1} > a_n$
(나) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

$a_6=60$일 때, $a_1 \times a_2$의 값은?

[인터넷 수능]

① 15 ② 25 ③ 35
④ 45 ⑤ 55

상 중 하

106. $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_na_{n+1}$ (단, $n \geq 2$인 자연수) … ㉠ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

[증 명]

(i) $n=2$일 때, ㉠에서
(좌변)$=a_1^2+a_2^2=$ (가)
(우변)$=a_2a_3=$ (가) 이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 하면
$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=a_ka_{k+1}$
이 식의 좌변에 (나)을 더하면
$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+$ (나)
$=a_{k+1}($ (다) $+a_{k+1})$
이므로 주어진 등식은 $n=k+1$일 때도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 등식은 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

[인터넷 수능]

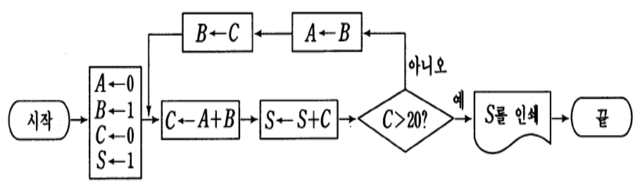
	(가)	(나)	(다)
①	2	a_{k+1}^2	a_{k+2}
②	2	a_{k+1}^2	a_k
③	3	a_{k+1}^2	a_k
④	2	a_{k+1}	1
⑤	3	a_{k+1}	a_{k+2}

주관식

상 중 하

107. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]



020 특수한 꼴의 점화식 1 - 다조건 점화식

여러 가지의 성질을 동시에 갖는 점화식은 각각의 조건을 모두 적용하여 문제를 풀어야 한다. 기본이 되는 점화식의 성질을 찾고, 나머지 성질을 활용하도록 하자!

상 중 하

108. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $a_1 = 2,\ b_1 = -1$

(나) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때, a_{10}의 값은?

[수능특강]

① $1 - \frac{1}{2^{10}}$ ② $1 - \frac{1}{2^9}$ ③ $1 + \frac{1}{2^9}$
④ $1 + \frac{1}{2^{10}}$ ⑤ $1 + \frac{1}{2^{20}}$

상 중 하

109. 모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$은 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n}$

(나) $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$

이 때, $\log_2 b_2 + \log_2 b_4 + \log_2 b_6 + \cdots + \log_2 b_{20}$의 값은?

[인터넷 수능]

① -110 ② -55 ③ -45
④ -20 ⑤ -10

상 중 하

110. $p \geq 2$ 인 자연수 p 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) $a_{k+1} = a_k + 1\ (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p} = a_k\ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$

ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \frac{p(p-1)}{2}$

ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

021 특수한 꼴의 점화식 2 - 합의 성질 이용하기

① $a_{n+1}+a_n=f(n)$꼴의 점화식은 $n=2k$와 $n=2k+1$ 일 때의 합을 따로 정리하면 S_n을 구할 수 있다.
② $S_n=f(n)\cdot a_n$ 의 꼴은 $S_n-S_{n-1}=a_n$의 성질을 이용하여 풀자!

상 중 하

111. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, $2a_n-S_n=3^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립한다. 이때, 일반항 a_n은?

[수능특강]

① $3^{n+1}-2^{n-1}$ ② $2\cdot3^n-3\cdot2^{n-1}$ ③ $2\cdot3^{n-1}-3\cdot2^n$
④ $3^{n+1}-3\cdot2^n$ ⑤ $2\cdot3^n-3\cdot2^n$

상 중 하

112. $a_1=\frac{1}{4}$, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n+1}=\frac{a_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{100} 의 값은?

[인터넷 수능]

① 25 ② 50 ③ 75
④ 100 ⑤ 125

상 중 하

113. 오른쪽은 수열 $\{a_n\}$에서 제 1행에는 a_1을 n개, 제 2행에는 a_2를 $n-1$개, 제 3행에는 a_3을 $n-2$개, $\cdots$, 제 n행에는 a_n을 1개 나열한 것이다. 제 1행부터 제 n행까지의 모든 항들의 합이 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$일 때,

(제 1 행)	a_1	a_1	a_1	$\cdots$	a_1
(제 2 행)		a_2	a_2	$\cdots$	a_2
(제 3 행)			a_3	$\cdots$	a_3
				$\vdots$	
(제 n 행)				a_n	

$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$의 값은? [4점]

[수능특강]

① 36 ② 45 ③ 54
④ 63 ⑤ 72

주관식

상 중 하

114. $a_1=4$, $a_{n+1}+a_n=n^2+5$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20} 의 값을 구하여라.

[인터넷 수능]

022 특수한 꼴의 점화식-3 추론과 이해

발견적 추론의 과정과 연역적 추론의 문제를 구분하여 적용하면, 어렵지 않게 정복 할 수 있는 유형이다. 특정한 수학적 정의나 성질이 사용되지 않는 점화식이라면 발견적 추론의 방법으로 풀어보자!

상 중 하

115. 수열 $\{a_n\}$이

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}\ (n>3)$

이라고 할 때, 이 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $\dfrac{S_{10}}{10}$의 값은?

[수능특강]

① 5 ② 8 ③ 10
④ 20 ⑤ 30

상 중 하

116. $\alpha,\ \beta$는 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 실근이고 $\alpha>\beta$이다. 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$으로 정의할 때, 다음 중 a_{n+2}와 같은 것은?

[수능특강]

① $2a_n-a_{n+1}$ ② a_n+a_{n+1} ③ $a_{n+1}-2a_n$
④ $a_{n+1}-a_n$ ⑤ $\dfrac{1}{2}a_{n+1}$

상 중 하

117. 모든 항이 양의 실수인 두 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$에 대하여

$a_{n+1}{}^2-6a_n{}^2=a_na_{n+1}$

$(b_n-\log_9 a_n)^2+(a_1-3)^2=0$ (단, $n=1,2,3,\cdots$)

이 성립한다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k=105$를 만족하도록 하는 m의 값은?

[인터넷 수능]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

상 중 하

118. 자연수 n에 대하여 $a_n=2+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{2010} a_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① 4018 ② 4019 ③ 4020
④ 4021 ⑤ 4022

상 중 하

119. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = m \ (m\text{은 정수}),\ a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n : \text{짝수}) \\ 3a_n + 1 & (a_n : \text{홀수}) \end{cases}$$

이 성립한다. $a_6 = 1$일 때, m의 값으로 가능한 모든 정수의 합은?

[인터넷 수능]

① 32 ② 36 ③ 37
④ 39 ⑤ 41

상 중 하

120. 다음은

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[증 명]

$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$에서 $p+q=6,\ pq=8$

$\therefore\ p=2,\ q=4$ 또는 $p=4,\ q=2$

(i) $p=2,\ q=4$일 때,

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 4(a_{n+1} - 2a_n)$에서

$a_{n+1} - 2a_n =$ (가) $\cdots$ ㉠

(ii) $p=4,\ q=2$일 때, $a_{n+2} - 4a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 4a_n)$에서

$a_{n+1} - 4a_n =$ (나) $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a_n =$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	4^n	2^n	$2^{2n-1} - 2^{n-1}$
②	4^n	2^n	$2^{2n-2} - 2^{n-1}$
③	4^n	2^{n-1}	$2^{2n-1} - 2^{n-2}$
④	4^{n-1}	2^{n-1}	$2^{2n-2} - 2^{n-1}$
⑤	4^{n-1}	2^{n-1}	$2^{2n-3} - 2^{n-2}$

상 중 하

121. 다음은 집합 $A_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에 대하여 함수 $f : A_n \to A_n$ 중 에서 $(f \circ f)(x) = x$ 가 되는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ 사이의 관계를 보이는 과정이다.

(i) $f(n+2) = n+2$인 경우

집합 A_{n+2}의 원소 중 $n+2$를 제외한 나머지 원소 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n+1$에 대해서만 $(f \circ f)(x) = x$가 성립하도록 f 를 결정하면 되므로 함수 f 의 개수는 (가) (개) 이다.

(ii) $f(n+2) = p\ (p \in A_{n+2},\ p \neq n+2)$인 경우

……

함수 f의 개수는 (나) (개)이다.

(i), (ii)에 의해 $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ 사이에는 (다) 의 관계가 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 적으면?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	$a_n + 1$	na_{n+1}	$a_{n+2} = na_{n+1}(a_n + 1)$
②	$a_n + 1$	$(n+1)a_{n+1}$	$a_{n+2} = a_n + (n+1)a_{n+1} + 1$
③	a_{n+1}	a_n	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
④	a_{n+1}	na_n	$a_{n+2} = a_{n+1} + na_n$
⑤	a_{n+1}	$(n+1)a_n$	$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$

023 수학적귀납법-수학적 성질의 증명

수학적 정의와 성질을 증명할 수 있는지 평가하는 영역의 문제이다. 주어진 명제를 잘 살펴본 후 귀납법적 증명방법에 따라 빈칸을 채워 나가야 한다. 난이도가 있는 문제의 경우 증명의 중간과정을 생략하여 논리적 연계가 불확실한 경우가 있으므로, 증명과정의 앞, 뒤를 잘 살펴서 생략된 과정을 복구 할 수 있도록 하자.

상 중 하

122. 다음은 명제 '$n \geq 4$인 자연수 n에 대하여 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n$이다.'가 참임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n =$ (가) 일 때,

(좌변)$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

(우변)$= 2^4 = 16$이므로 성립한다.

(ii) $n = k \ (k \geq 4)$일 때, 이 명제가 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k > 2^k \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 ((나))을 곱하면

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k($ (나) $) > 2^k \cdot ($ (나) $) \quad \cdots$ ㉡

㉡의 우변에 $2^k \cdot ($ (나) $) > ($ (다) $)$이므로

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k($ (나) $) > ($ (다) $)$

그러므로 $n = k+1$일 때에도 성립한다.

따라서 4이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

[수능특강]

① $1,\ k+1,\ 2^{k+1}$ ② $4,\ k+1,\ 2^{k+1}$

③ $1,\ k+1,\ 2^k$ ④ $4,\ k+1,\ 2^k$

⑤ $1,\ k+1,\ 2^{k-1}$

상 중 하

123. 다음은 명제 ' 2이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n - nx + n - 1$은 항상 $(x-1)^2$로 나누어떨어진다.'가 참임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n = 2$일 때, $x^2 - 2x + 2 - 1 = (x-1)^2$이므로 성립한다.

(ii) $n = k \ (k \geq 2)$일 때, $x^k - kx + k - 1 = (x-1)^2 \cdot Q(x)$ 가

성립한다고 가정하면

$x^{k+1} - (k+1)x +$ (가) $= (x-1)^2 \cdot ($ (나) $)$이므로

$n = k+1$일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에서 2이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n - nx + n - 1$은 항상 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어진다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

[수능특강]

① $k-1,\ xQ(x)+k$ ② $k-1,\ xQ(x)-k$

③ $k,\ xQ(x)+k$ ④ $k+1,\ xQ(x)-k$

⑤ $k+1,\ xQ(x)+k$

상 중 하

124. 다음은 0이 아닌 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}$이 정수이면 $x^n+\frac{1}{x^n}(n=2,3,4,\ \cdots)$도 정수임을 증명한 것이다.

[증 명]

$a_n=x^n+\frac{1}{x^n}$ $(n=2,3,4,\cdots)$이라 하고 $x+\frac{1}{x}=m$ (m은 정수)이라 하면

$a_2=m^2+$ (가) 에서 a_2는 정수

2이상의 임의의 자연수 k에 대하여 (나) 라면

$a_{k+2}=x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=$ (다) $-a_k$

…이하 생략

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	-1	a_k가 정수	a_{k+1}
②	-2	a_{k+1}이 정수	a_{k+1}
③	-1	a_k, a_{k+1}이 정수	ma_{k+1}
④	-2	a_k, a_{k+1}이 정수	ma_{k+1}
⑤	-2	a_k, a_{k+1}이 정수	a_{k+1}

상 중 하

125. 다음은 n 이 자연수일 때, $4^{n+1}+5^{2n-1}$ 이 21의 배수임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

$a_n=4^{n+1}+5^{2n-1}$ 이라 하자.

(ⅰ) $a_1=4^2+5^1=21$ 이므로 a_1 은 21 의 배수이다.

(ⅱ) a_k $(k\geq 1)$가 21의 배수라고 가정하면

정수 M에 대하여 $a_k=4^{k+1}+5^{2k-1}=21M$이고,

$a_{k+1}=$ (가) 이므로

$a_{k+1}=4\cdot 4^{k+1}+5^2\cdot$ (나) $=21($ (다) $)$

이때, (다) 은 정수이므로 a_{k+1}은 21의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 은 21의 배수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 나열하면?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	$4^{k+2}+5^{2k}$	5^{2k-2}	$2M+5^{2k-2}$
②	$4^{k+2}+5^{2k}$	5^{2k-2}	$4M+5^{2k-2}$
③	$4^{k+2}+5^{2k+1}$	5^{2k-2}	$4M+5^{2k-2}$
④	$4^{k+2}+5^{2k+1}$	5^{2k-1}	$4M+5^{2k-1}$
⑤	$4^{k+2}+5^{2k+1}$	5^{2k-1}	$2M+5^{2k-1}$

상 중 하

126. 다음은 n 이 자연수일 때, $3^{n+1}+4^{2n-1}$ 은 13 으로 나누어 떨어지는 것을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

[증 명]

(i) $f(n)=3^{n+1}+4^{2n-1}$ 으로 놓으면

$f(1)=3^2+4=13$ 이므로 $f(1)$ 은 13 으로 나누어 떨어진다.

(ii) $f(k)$ 가 13 으로 나누어 떨어진다고 가정하면

$f(k+1)=3^{k+2}+4^{2k+1}$

$=\boxed{(가)}f(k)+\boxed{(나)}\cdot 4^{2k-1}$

이므로 $f(k+1)$ 도 13 으로 나누어 떨어진다.

따라서 임의의 자연수 n 에 대하여 $3^{n+1}+4^{2n-1}$ 은 13 으로 나누어 떨어진다.

위의 증명 과정 중에서 (가), (나) 에 들어갈 두 수의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

024 수학적귀납법-등식의 증명

상 중 하

127. 다음은 등식

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.
위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

[고득점 N제]

[증 명]

(i) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)=0이므로 등식은 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(k-1)k(k+1)=\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4}$$

등식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{m}(k-1)k(k+1)+\boxed{(가)}$$

$$=\boxed{(나)}$$

$$(\text{우변})=\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4}+\boxed{(가)}$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$$

따라서 $n=m+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

	(가)	(나)
①	$m(m+1)(m+2)$	$\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)k(k+1)$
②	$m(m+1)(m+2)$	$\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)(k+2)$
③	$m(m+1)(m+2)$	$\sum_{k=1}^{m+1}(k+1)(k+2)(k+3)$
④	$(m+1)(m+2)(m+3)$	$\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)k(k+1)$
⑤	$(m+1)(m+2)(m+3)$	$\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)(k+2)$

상 중 하

128. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{n+5}{5}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

<증명>
(1) $n=1$ 일 때

$(\text{좌변})=\frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}}+\frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}}=\frac{6}{5}$, $(\text{우변})=\frac{1+5}{5}=\frac{6}{5}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.
(2) $n=m$ 일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{\ (가)\ }+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1}=\boxed{\ (나)\ }\cdot{}_{l}\mathrm{C}_{k}$ $(0\leq k\leq l)$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}=\boxed{\ (다)\ }\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$ 이다.

따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{\ (가)\ }+\boxed{\ (다)\ }\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

$$=\frac{m+6}{5}$$ 이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$
②	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
③	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$

상 중 하

129. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1}=n^2a_n\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\dots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{n+1}\quad\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$일 때, $(\text{좌변})=\frac{1}{2}$, $(\text{우변})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로 $(*)$이 성립한다.
(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\ (가)\ }a_m\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}\\&\quad+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot3}a_1\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\ (나)\ }\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}-\boxed{\ (다)\ }\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
②	$\frac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)}$
③	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
④	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)}$
⑤	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

025 수학적귀납법-부등식의 증명

부등식을 증명하는 문제에서는 삼각부등식의 성질이 자주 이용되므로, 빈칸을 넣는 문제에서는 논리적 연계를 위하여 다음의 삼각부등식의 성질을 익혀두도록 하자!
$a_n \ge b_n \ge c_n$ 이면 $a_n \ge c_n$ 이다.

상 중 하

130. 다음은 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$n! > 2^{n-1}$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

[증 명]

(ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=3\times2\times1=6$,
(우변)$=2^{3-1}=4$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$k! > 2^{k-1}$ … ㉠
그런데 $k+1>2$ 이므로 $(k+1)\cdot \boxed{(가)} > 2^k$
따라서 ㉠의 양변에 $\boxed{(나)}$ 를(을) 곱하면
$k!\cdot\boxed{(나)} > 2^{k-1}\cdot\boxed{(나)} > \boxed{(다)}$
그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 3 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 나열하면?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	2^k	$2k$	2^{k+1}
②	2^k	$k+1$	2^{k+1}
③	2^{k-1}	$2k$	2^k
④	2^{k-1}	$k+1$	2^k
⑤	2^{k-1}	$k+1$	2^{k+1}

상 중 하

131. 다음은 부등식

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)} < \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{15}$,
(우변)$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$이므로 부등식은 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, 부등식이 성립한다고 가정하면
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)} < \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$
부등식의 양변에 $\boxed{(가)}$을(를) 더하면
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}+\boxed{(가)}$$
$$<\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\boxed{(가)}$$
$$<\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\boxed{(나)}\right)$$
$$<\frac{1}{2}-\boxed{(다)}$$
즉, $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)} < \frac{1}{2}-\boxed{(다)}$이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.
그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

[고득점 N제]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$	$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}$	$\frac{1}{2k+3}$
②	$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$	$\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+4}$	$\frac{1}{2k+4}$
③	$\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$	$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}$	$\frac{1}{2k+3}$
④	$\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$	$\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+4}$	$\frac{1}{2k+3}$
⑤	$\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$	$\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+4}$	$\frac{1}{2k+4}$

상 중 하

132. $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leqq \frac{4}{n}$가 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

$a_1=1\leqq 4,\ a_2=\boxed{\text{(가)}}\leqq 2$이므로 $n=1,2$일 때, 성립한다.

2이상의 자연수 k에 대하여 $a_k\leqq\frac{4}{k}$가 성립한다고 하면

$$a_{k+1}-\frac{4}{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\boxed{\text{(나)}}\leqq\frac{2-k}{\boxed{\text{(다)}}}\leqq 0\ (\because k\geqq 2)$$

$n=k+1$일 때에도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

[인터넷 수능]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{3}{k}$	$k(k+1)$
②	1	$\frac{-3}{k+1}$	$k(k+1)$
③	1	$\frac{-3}{k+1}$	$(k+1)(k+2)$
④	$\frac{5}{6}$	$\frac{-3}{k+1}$	$k(k+1)$
⑤	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{k}$	$(k+1)(k+2)$

상 중 하

133. 자연수 n에 대하여 부등식

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\leqq\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{4}(3-1)=\frac{1}{2}$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}\leqq\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{\text{(가)}}$$

이 때,

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)-\boxed{\text{(가)}}=\boxed{\text{(나)}}\cdot\frac{1}{2k(2k+1)}\boxed{\text{(다)}}\ 0$$

$$\therefore 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}\leqq\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

[인터넷 수능]

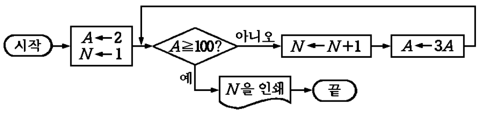
	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$	$\frac{1}{k+1}$	$>$
②	$\frac{1}{(2k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{2(k+1)}$	$>$
③	$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$	$\frac{1}{2(k+1)}$	$>$
④	$\frac{1}{(2k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{k+1}$	$<$
⑤	$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$	$\frac{1}{2(k+1)}$	$<$

026 순서도-횟수 구하기

상 중 하

134. 다음 순서도에 의하여 인쇄되는 N의 값은?

[수능특강]

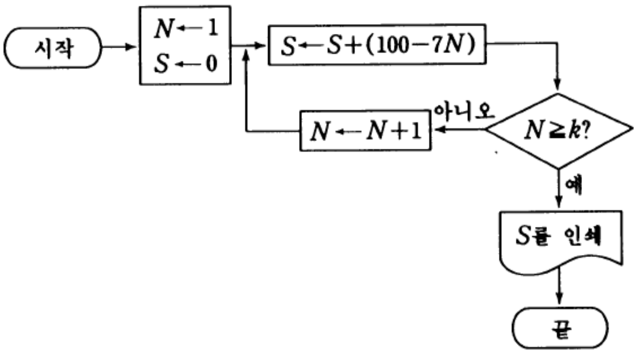


① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

상 중 하

135. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 k 의 값은?

[인터넷 수능]



① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

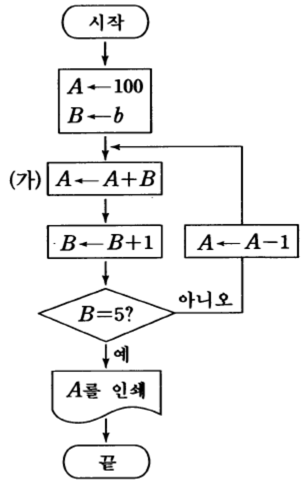
027 순서도-빈칸 넣기

상 중 하

136. 오른쪽 그림과 같은 순서도는 (가) $\boxed{A \leftarrow A+B}$를 10번 반복하고 A의 값 a를 인쇄한다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[인터넷 수능]

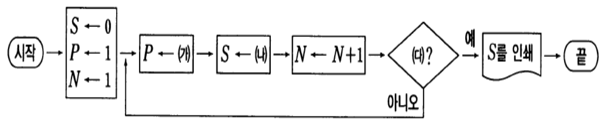
① 79
② 81
③ 83
④ 85
⑤ 87



상 중 하

137. 다음은 $S=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k!}$을 구하는 순서도이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

[인터넷 수능]



	(가)	(나)	(다)
①	$P+N$	$S+P$	$N>9$
②	$P+N$	$S+\frac{1}{P}$	$N>10$
③	$P\times N$	$S+\frac{1}{P}$	$N>9$
④	$P\times N$	$S+P$	$N>9$
⑤	$P\times N$	$S+\frac{1}{P}$	$N>10$

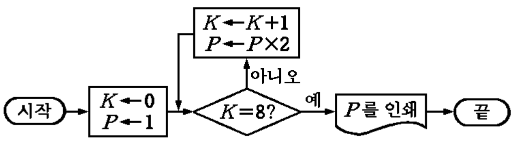
028 순서도- 항 구하기

주관식

상 중 하

138. 다음 순서도에서 인쇄되는 P의 값을 구하여라.

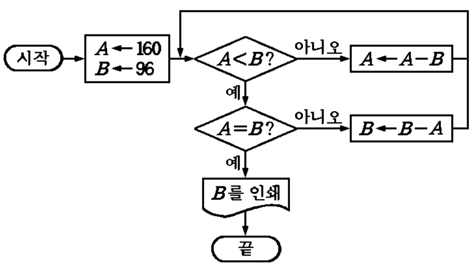
[수능특강]



상 중 하

139. 다음 순서도에서 인쇄되는 B의 값을 구하여라.

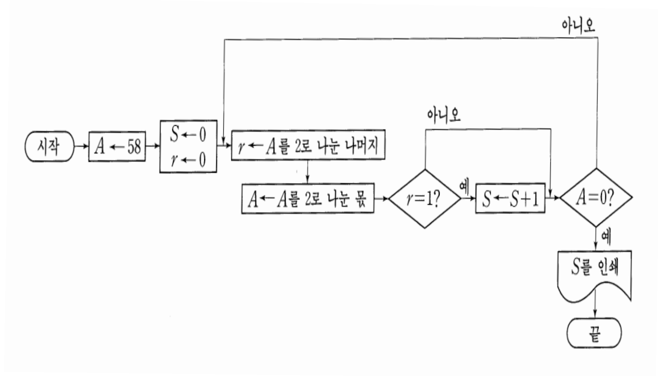
[수능특강]



상 중 하

140. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

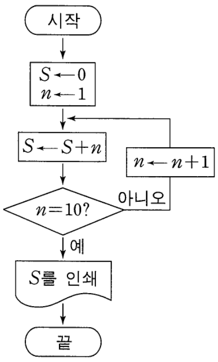


029 순서도- 합 S 구하기

상 중 하

141. 다음 순서도에서 인쇄되는 값은?

[수능특강]

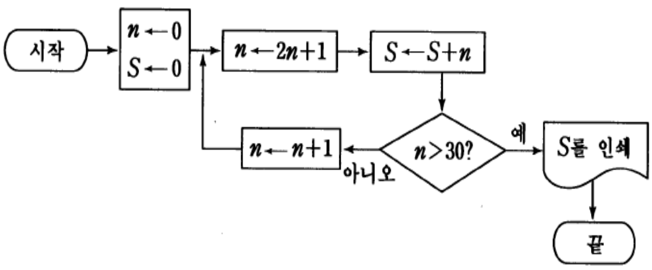


① 44 ② 45 ③ 55
④ 56 ⑤ 66

상 중 하

142. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?

[인터넷 수능]

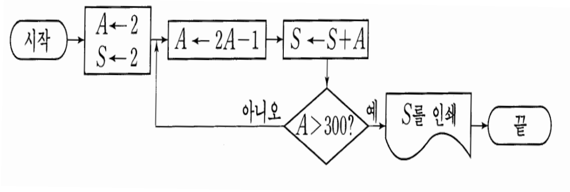


① 105 ② 107 ③ 109
④ 111 ⑤ 113

상 중 하

143. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?

[인터넷 수능]



① 264 ② 512 ③ 521
④ 1024 ⑤ 1033

상 중 하

144. 오른쪽 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?

[인터넷 수능]

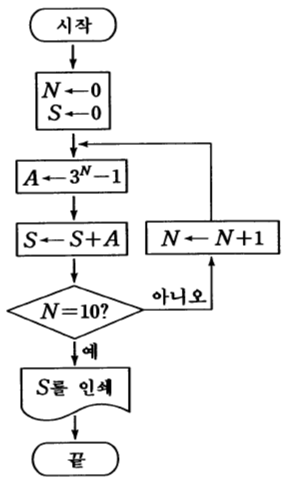
① $\frac{3}{2}(3^9-1)$

② $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$

③ $\frac{3}{2}(3^9-1)-10$

④ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)-10$

⑤ $\frac{3}{2}(3^{11}-1)-10$

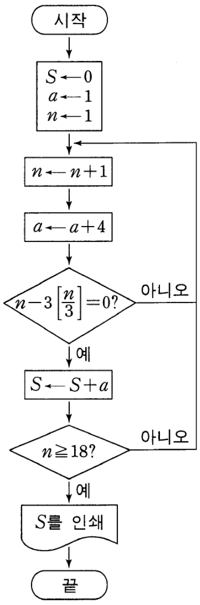


상 중 하

145. 오른쪽 그림과 같은 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

① 234 ② 238
③ 242 ④ 246
⑤ 250



Ⅵ. 수열의 극한

01 무한수열의 수렴과 발산

무한수열 $\{a_n\}$ 즉, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$에서 n이 한없이 커질 때, 제n항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다

상 중 하

1. 다음 수열 중 수렴하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점N제]

[보 기]

ㄱ. $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right\}$

ㄴ. $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right\}$

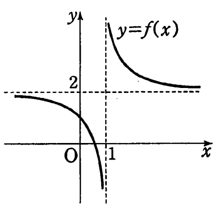
ㄷ. $\left\{\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

2. 오른쪽 그림과 같이 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=1$, $y=2$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점N제]



[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} f(n)=2$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} f(-n)=1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\infty$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

3. 다음 중 임의의 자연수 n에 대하여 $S_n=\left\{k \middle| -\frac{1}{n}<a_k<\frac{1}{n}\right\}$의 원소의 개수가 무한개가 되는 수열 $\{a_n\}$을 모두 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $a_n=\frac{n+1}{n^2}$　　ㄴ. $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$

ㄷ. $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 극한값의 기본 성질

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때,

① $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (k는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ (복호동순)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \cdot \beta$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$

상 중 하

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-2$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^3+b_n{}^3)$의 값을 구하시오.

[고득점N제]

03 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

① (분자의 차수) > (분모의 차수)이면

⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 ∞

② (분자의 차수)= (분모의 차수)이면

⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n$=(최고차항의 계수의 비)

③ (분자의 차수) < (분모의 차수)이면

⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

상 중 하

5. 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{n}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

6. 자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기 : 합 또는 곱

1. 주어진 합 또는 곱을 간단한 형태로 정리한다.
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

상 중 하

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2}{1-n^2}$의 값은?

[수능특강]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

상 중 하

8. 자연수 n에 대하여 $n<x<n+1$에서 이차함수 $f(x)=x^2+2x+5$의 값이 자연수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3n+1}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기 : 로그를 포함한 식

로그의 합은 진수의 곱셈으로 로그의 차는 진수의 나눗셈으로 전환하여 계산한다.

06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기 : S_n이 주어진 식

$a_n = S_n - S_{n-1}$을 이용하여 a_n을 구한 후 주어진 식에 대입하여 극한값을 구한다.

상 중 하

9. 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열$\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$$

로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k$의 값은?

[수능특강]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

상 중 하

10. 수열$\{a_n\}$에서 $a_n = \log\frac{n+1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$의 값은?

[인터넷수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

11. 첫째항이 0 이 아닌 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n} = \frac{2}{3}$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?

[인터넷수능]

① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

07 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값 구하기

$\infty-\infty$ 꼴의 부정형 ($\infty-\infty$ 꼴이란 앞의 ∞와 뒤의 ∞ 부분이 동차인 경우를 생각한다.
① 다항식의 극한은 최고차항으로 묶는다. (일부 교재들에서 말하는 풀이)
② 무리식의 극한은 분모 또는 분자를 유리화한다.

상 중 하

12. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{n^2-n}\right)$의 값은?

[수능특강]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

상 중 하

13. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

14. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 정수 부분을 a_n, 소수 부분을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값은?

[수능특강]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

상 중 하

15. 일반항이 $a_n=\sqrt{9n^2-2n}-\left[\sqrt{9n^2-2n}\right]$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[수능특강]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

주관식

상 중 하

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn+1}}{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}=5$ 일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

08 수열의 극한과 미정계수 구하기

미정계수를 구하는 순서
1. 0 이 아닌 극한값을 갖기 위해서는 분모, 분자의 차수가 같아야한다.
2. 차수가 같은 분모, 분자의 극한값은 계수비가 극한값과 같다.

상 중 하

17. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{an^4+bn^3+1}}{2n+3}=\frac{1}{2}$을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[고득점N제]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

상 중 하

18. 자연수 전체의 집합에서 정의된 일차함수 $f(n)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{f(n)}=\frac{1}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{(f\circ f)(n)}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{18}$　③ $\frac{1}{20}$
④ $\frac{1}{21}$　⑤ $\frac{1}{24}$

상 중 하

19. $a>0$, $b>0$이고 $ab=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}-n)$의 최솟값은?

[인터넷수능]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

상 중 하

20. $\lim_{n\to\infty}(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})=0$일 때, $\lim_{n\to\infty}n(n+a-\sqrt{n^2+2n+3})=0$의 값은? (단 a상수)

[인터넷수능]

① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{1}{2}$　⑤ 0

09 수열의 극한과 이차방정식

주어진 조건에 대한 이차방정식의 성질을 이용한다.
1. 근과 계수와의 관계
2. 근에 대한 판별식

상 중 하

21. 자연수 n 에 대하여 이차방정식

$x^2+(\sqrt{n}+3)x-\frac{\sqrt{n}}{4}-\frac{1}{2}=0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$ 의 값은?

[수능특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

22. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n $(n\geq 2)$을 계수로 하는 x대한 이차방정식 $a_{n-1}x^2-a_nx+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때,

$\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1=0$이 항상 성립한다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

010 수열의 극한값의 대소 관계

① $a_n\leq b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha\leq\beta$

② $a_n\leq b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

③ $a_n\leq c_n\leq b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

상 중 하

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\theta\right)$의 값은?

[수능특강]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

상 중 하

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{4^n}{2}<2^{a_n}<2\cdot 4^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

[고득점N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

주관식

상 중 하

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$3n^2-n-1<a_n<3n^2+n-1$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+3}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

011 치환 및 식 변형을 이용한 수열의 극한 구하기

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ 일 때,

① $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (k는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ (복호동순)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \cdot \beta$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$

에서 ①②③④의 성질은 반드시 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴한다는 전제 조건이 있어야 한다. 그러므로 수렴조건을 만족하지 못하면 치환을 통해서 해결한다.

상 중 하

26. 두 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은?

[인터넷수능]

(가) $20-\frac{1}{n} < a_n + b_n < 20+\frac{1}{n}$

(나) $10-\frac{1}{n} < a_n - b_n < 10+\frac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

상 중 하

27. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(n^2+6n+9)a_n = 6$ 을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)a_n$ 의 값은?

[인터넷수능]

① 10 ② 12 ③ 16
④ 18 ⑤ 24

012 점화식과 수열의 극한

(1) 수열의 일반항 a_n을 구한 후 극한값의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to} a_n$을 구한다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

상 중 하

28. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \end{cases} (\text{단, } n\text{은 자연수})$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{2n}}$의 값은?

[고득점N제]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

29. $a_1=0,\ a_{n+1}-a_n = n(n+1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

상 중 하

30. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=1$, $a_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$인 관계가 성립할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

상 중 하

31. 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $3a_n-4b_{n+1}=2$, $4a_{n+1}+3b_n=1$ 이 성립할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값은?

[인터넷수능]

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{2}{25}$ ③ 0
④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

상 중 하

32. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ $(n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $a_{11}=1$
ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=2$
ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

33. 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{3}{2}$, $b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $a_1=b_1$ 일 때, $a_n=b_n$
ㄴ. $a_1=0$, $b_1=1$ 일 때, $a_{n+1}>a_n$
ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

34. $x_1=3,\ x_n=\dfrac{2x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\,(n=2,3,4,\cdots)$에 대하여 $y_n=\dfrac{x_n-1}{x_n+1}$이라 하자. 이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-y_n}{1+y_n}$의 값은?

[인터넷수능]

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

상 중 하

35. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열$\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n$의 값은?

[수능특강]

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{3} \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3na_n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

상 중 하

36. 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(1)=\dfrac{1}{3}$
(나) $a,b\in N$일 때, $f(a+b)=f(a)f(b)$

이때, $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n\times f(n)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\log_3 a_n$의 값은?

[인터넷수능]

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{3}$
④ 0　⑤ $\dfrac{1}{9}$

상 중 하

37. 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이
$a_1=10,\ b_1=5,\ a_n=2a_{n-1}-3b_{n-1},\ b_n=3a_{n-1}+8b_{n-1}\ (n\ge 2)$
을 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$의 극한값은?

[인터넷수능]

① -5　② -3　③ -1
④ 2　⑤ 5

상 중 하

38. 두 함수 $f(x)=2x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+2}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{2n}=f(a_{2n-1})$, $a_{2n+1}=g(a_{2n})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

다음 중 보기에서 맞는 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $a_4=\frac{3}{2}$ ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$ ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\sqrt{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

39. A 그릇에는 $16\,\%$ 의 소금물 $400\,g$, B 그릇에는 $4\,\%$ 의 소금물 $200\,g$ 이 들어 있다. A, B 두 그릇에서 각각 $100\,g$ 의 소금물을 덜어내어 서로 섞는 시행을 n 번 반복한 결과 A 그릇에 들어 있는 소금물의 농도는 $a_n\,\%$, B 그릇에 들어 있는 소금물의 농도는 $b_n\,\%$ 가 되었다. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n$

ㄴ. $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=12$

[인터넷수능]

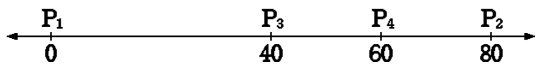
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

40. 그림과 같이 수직선 위에 두 점$P_1(0)$과 $P_2(80)$이 있다. 선분 P_1P_2의 중점을$P_3(x_3)$, 선분P_2P_3의 중점을$P_4(x_4)$, $\cdots$, 선분 P_nP_{n+1}의 중점을$P_{n+2}(x_{n+2})$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[수능특강]



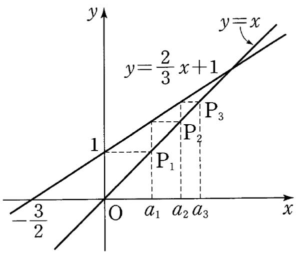
013 그래프와 수열의 극한

$y=f(x)$의 그래프가 주어지고 수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=f(a_n)$으로 정의될 때, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프를 이요하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구할 수 있다.

그래프와 수열의 극한 ⟹ 점화식과 수열의 극한

상 중 하

41. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 직선 $y=\frac{2}{3}x+1$과 $y=x$의 그래프를 그려서 직선 $y=x$ 위에 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n을 정하고 그 점들의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$이라 하자. 이 때, 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? (단, 점선은 모두 x축 또는 y축에 평행하다.)



[인터넷수능]

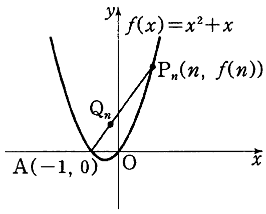
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

014 수열의 극한의 활용

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 차례로 구하여 규칙을 찾거나 주어진 조건을 이용하여 일반항a_n을 구한 다음 극한값의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구한다.

상 중 하

42. 이차함수 $f(x)=x^2+x$ 위의 점 $P_n(n,\ f(n))$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$과 점 $A(-1,\ 0)$에 대하여 선분 AP_n을 $2n:(n^3+n)$으로 내분하는 점을 Q_n이라 하자. 점 Q_n의 y좌표를 y_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} y_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.)



[고득점N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

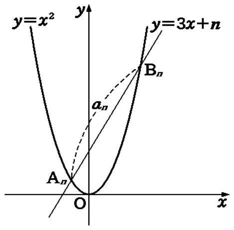
43. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=\log_n\sqrt{x^3}$, $y=\log_{\sqrt[3]{n^2+n}} x$의 그래프가 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\overline{P_nQ_n}$의 값은?

[고득점N제]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

상 중 하

44. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=3x+n$ 이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 선분 A_nB_n 의 길이를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{8n-3}$ 의 값은?



[수능특강]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 8 ⑤ 10

상 중 하

45. 자연수 n 에 대하여 원점 O 와 점 $(n, 0)$을 이은 선분을 밑변으로 하고, 높이가 h_n 인 삼각형의 넓이를 a_n 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=\frac{1}{2}$이면 $h_n=\frac{1}{n}$이다.

ㄴ. $h_2=\frac{1}{4}$이면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

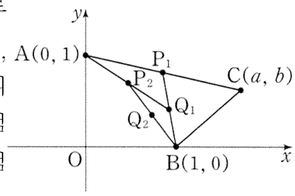
ㄷ. $h_2<\frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} nh_n=0$이다.

[인터넷 수능]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

46. 그림과 같이 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$가 있다. 선분 AC 의 중점을 P_1 이라 하고, 선분 BP_1 의 중점을 Q_1 이라 하자. 또, 선분 AQ_1 의 중점을 P_2 라 하고, 선분 BP_2 의 중점을 Q_2 라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n 에 대하여 선분 BP_n 의 중점을 Q_n 이라 하고, 선분 AQ_n 의 중점을 P_{n+1} 이라 하자. n 이 한없이 커질 때, 점 P_n 은 어떤 점에 한없이 가까워지는가?



[수능특강]

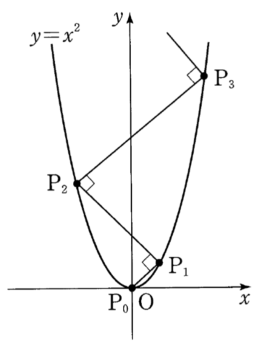
① $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ ② $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

상 중 하

47. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1 의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은?

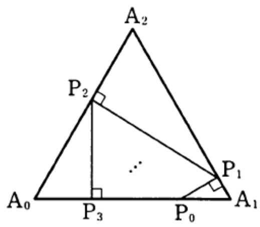


① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[인터넷수능]

상 중 하

48. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 $A_0A_1A_2$ 에서 변 A_0A_1 을 $3:1$ 로 내분하는 점을 P_0 라 하자. 이 때, 점 P_0 에서 변 A_1A_2 에 내린 수선의 발을P_1, 다시 점 P_1 에서 변 A_2A_0 에 내린 수선의 발을 P_2 라 한다. 이와 같은 방법으로 $\triangle A_0A_1A_2$ 의 변 위에 계속하여 수선의 발 P_3, P_4, $\cdots$, P_n, $\cdots$을 잡고 $a_n = \overline{P_{n-1}P_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 의 값은?



[인터넷수능]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
④ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

상 중 하

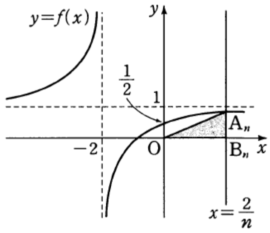
49. 곡선 $y=x^2$ $(x \geq 0)$ 위의 점 $P_n(a_n,\ b_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에 대하여 원점을 $P_1(a_1,\ b_1)$ 으로 하고 $c_n = b_{n+1} - b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 하자. 수열 $\{c_n\}$ 이 첫째항이 6 이고 공차가 4 인 등차수열을 이룰 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 의 값은?

[인터넷수능]

① 0　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

상 중 하

50. 오른쪽 그림과 같이 분수함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 자연수 n에 대하여 직선 $x=\dfrac{2}{n}$가 곡선 $y=f(x)$와 x축에서 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$의 값은?(단, 점선은 x축 또는 y축과 평행하다.)



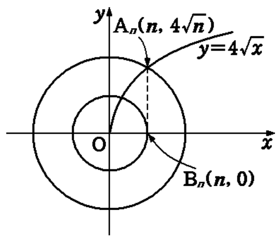
[인터넷수능]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

주관식

상 중 하

51. 그림과 같이 곡선 $y=4\sqrt{x}$ 위의 점$A_n(n,\ 4\sqrt{n})$에서 x 축에 내린 수선의 발을 B_n이라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점A_n을 지나는 원과 원점O를 중심으로 하고 점B_n을 지나는 원의 반지름의 길이의 차를 $f(n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$의 값을 구하여라.
(단, n 은 자연수)



[수능특강]

상 중 하

52. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자. 2이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

015 무한등비수열의 수렴과 발산

(1) $r>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

(2) $r=1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=1$

(3) $|r|<1 \Longleftrightarrow -1<r<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

(4) $r\leq -1$일 때 $\{r^n\}$은 발산(진동)

016 등비수열을 포함한 식의 극한

(1) 분수식의 극한
분모에 있는 등비수열 중 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나눈다.
(2) 다항식의 극한
밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 묶어낸다.

상 중 하

53. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n-1}$의 값은?

[수능특강]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

54. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}$의 값은?

[수능특강]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

55. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}a_n&0\\0&b_n\end{pmatrix}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-3b_n}{3a_n+2b_n}$의 값은?

[수능특강]

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{2}{3}$ ③ 0
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

상 중 하

56. 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n=n\cdot 3^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$으로 주어질 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 3

상 중 하

57. 다항식 $(x+3)^n$을 다항식 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 $R_n(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(2)}{4^n}$의 값은? (단, n은 2 이상의 자연수이다.)

[고득점N제]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

58. 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ 0 & c_n\end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n+c_n}$의 값은?

[고득점N제]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

상 중 하

59. 자연수 n에 대하여 $\log N$의 지표가 n인 자연수 N의 개수를 $f(n)$이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)+f(2n+1)}{f(2n+3)}$의 값은?

[고득점N제]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{90}$ ③ $\frac{1}{100}$ ④ $\frac{1}{200}$ ⑤ $\frac{1}{900}$

상 중 하

60. 자연수 n에 대하여 10^n의 양의 약수의 총합을 $f(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{10^n}$의 값은?

[수능특강]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

상 중 하

61. 자연수 n 에 대하여 2^n, 3^n 의 양의 약수의 총합을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3f(n)+2g(n)}{2^n+3^n}$ 의 값은?

[수능특강]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

상 중 하

62. 다항식 $x^{n+1}+x^n$ 을 이차식 x^2-x-6 으로 나눈 나머지를 $a_n x+b_n$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

상 중 하

63. 자연수 n에 대하여

$A_n=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\text{이고},0\le y\le 1\right\}$

이라 하고, A_n에 속하는 (x,y)에 대하여 $4x+y$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[인터넷수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

64. 등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^{n+1}}{(3-\sqrt{3}+2\cos\theta)^{n+1}}=a$ $(a\ne 0)$ 가 성립하기 위한 θ 의 값을 b 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? $\left(\text{단, } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

[인터넷수능]

① π ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

상 중 하

65. 자연수 n에 대하여 70^n의 양의 약수의 총합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{70^n}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ $\frac{35}{12}$ ⑤ 3

상 중 하

66. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$을 x^2-4x+3으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{R(0)}$의 값은?

[인터넷수능]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

상 중 하

67. 자연수 n에 대하여 n자리 자연수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=10+11+12+\cdots+99$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^{2n}}$의 값은?

[인터넷수능]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{99}{200}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{111}{200}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

017 무한등비수열의 수렴 조건

(1) 무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴조건 $\Rightarrow -1 < r \leq 1$
(2) 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴조건 $\Rightarrow$ $a=0$ 또는 $-1 < r \leq 1$

상 중 하

68. 무한등비수열 $\left\{\dfrac{(3x+4y-10)^n}{5^n}\right\}$이 수렴하도록 하는 양의 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값 중 자연수의 개수는?

[고득점N제]

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

상 중 하

69. 무한수열 $\left\{(x+1)\left(\dfrac{3x-7}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하도록 하는 정수 x 값들의 합은?

[인터넷수능]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

018 r^n을 포함한 식의 극한

① $|r|>1$, $r=1$, $|r|<1$, $r=-1$인 네 경우로 나누어 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$을 조사

② 무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건 $\Rightarrow -1 < r \leq 1$

상 중 하

70. 등식 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1}=3$을 만족시키는 서로 다른 양의 실수 r의 모든 값의 합은?

[고득점N제]

① $\dfrac{11}{3}$ ② 4 ③ $\dfrac{13}{3}$
④ $\dfrac{14}{3}$ ⑤ 5

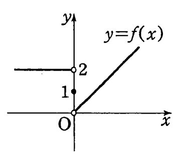
상 중 하

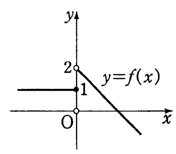
71. 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의한다.

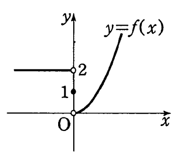
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^x)^{n+1}-(2^x)^n+2}{(2^x)^n+1}$ (단, n은 자연수)

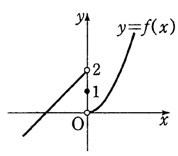
이때, $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

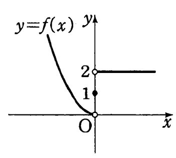
[고득점N제]

①


②


③


④


⑤


상 중 하

72. 다음은 실수 r에 대하여 $\lim\limits_{n\to n}\dfrac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}}$의 극한값을 구한 것이다.

(ⅰ) $-1<r<0$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}}=a$이다.
(ⅱ) $r=-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}}=b$이다.
(ⅲ) $r<-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(2r+1)^{2n+1}}{1+(2r+1)^{2n}}=c$이다.

이때, 세 상수 a,b,c에 대하여 $\dfrac{a+b+2c}{r}$의 값은?(단, $r\neq 0$)

[인터넷수능]

① -4 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 4

019 **점화식과 무한등비수열의 극한**

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한 후 극한값의 기본 성질을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$을 구한다.

(2) 수열 $\{a_n\}$이 α로 수렴하면, 즉 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha,\cdots$임을 이용하여 α의 값을 구한다.

상 중 하

73. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{2009}{2010}$을 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+n-2}{5a_n+4n+1}$의 값은?

[인터넷수능]

① -2 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ 1

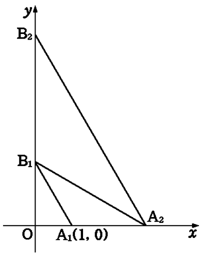
020 무한등비수열의 활용

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 차례로 구하여 규칙을 찾는다. 또는, 주어진 조건을 이용하여 일반항 a_n을 구하거나 a_n, a_{n+1}사이의 관계식 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}사이의 관계식을 구한다.

(2) 극한값의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구한다.

상 중 하

74. 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}_1(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선이 y축과 만나는 점을 B_1이라 하자. 또, 점 B_1을 지나고 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선이 x축과 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같이 점 A_n을 지나고 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선이 y축과 만나는 점을 B_n, 점 B_n을 지나고 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선이 x축과 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(3^n+2^n)^2}$의 값은?



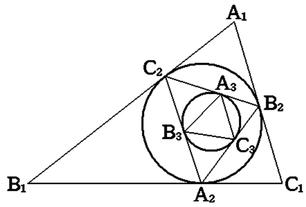
[고득점N제]

① $\frac{\sqrt{3}}{18}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{16}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{14}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{10}$

상 중 하

75. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. 세 변 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 이 원이 접하는 접점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$를 만든다. 다시 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$에 내접하는 원 O_2를 그린다. 세 변 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$와 원 O_2가 접하는 접점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하고 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3$을 만든다. 이와 같은 방법으로 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$을 계속 만들어 나갈 때, $\lim_{n\to\infty}\angle\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$의 값은?



[고득점N제]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{5}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

주관식

상 중 하

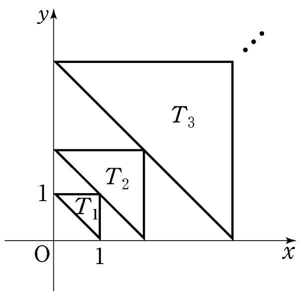
76. 자연수 n에 대하여 집합 $A_n=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합의 개수를 $f(n)$, 집합 A_n의 부분집합 중 1, 2, 3의 세 원 소를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 $g(n)$이라고 한다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)f(2n)}{g(n)\{f(n)+g(2n)\}}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

상 중 하

77. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A_n}(x_n,\ 0)$, $\mathrm{B_n}(0,\ x_n)$, $\mathrm{C_n}(x_n,\ x_n)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 T_n을 다음 조건에 따라 그린다.

(가) $x_1=1$이다.
(나) 변 $\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}$의 중점이 $\mathrm{C_n}$이다. $(n=1,2,3,\cdots)$



삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n b_n}{a_n+2^n}$의 값을 구하시오.

[인터넷수능]

021 수열의 극한의 진위 판단

$\{a_n\},\{b_n\}$에 대하여 주어진 명제가 참인 경우는 증명하고, 거짓인 경우는 반례를 들어준다.

상 중 하

78. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_nb_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

79. $a_n<0<b_n$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n<0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n<0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)<0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

80. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n - b_n\}$이 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 수열 $\{b_n\}$도 발산한다.

ㄷ. 수열 $\{a_n b_n\}$이 0으로 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴하지 않으면 수열 $\{b_n\}$은 0으로 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

81. 수열 $\{a_n\}$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = 0$ 이면 수열 $\{a_n{}^2\}$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

82. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, α는 상수)

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n{}^2 = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n = \sqrt{\alpha}$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n b_n = \alpha$ 이고 $\lim_{n\to\infty}a_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n = 0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n b_n = \infty$ 이고 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}b_n = \infty$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ,ㄷ

상 중 하

83. 두 수열 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n$도 수렴한다.

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < 1$이면 $\lim_{n\to\infty}a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots \cdot a_n = 0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n = \alpha$ (α는 양수)이고 모든 자연수 n에 대하여 $|b_n| < a_n$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

상 중 하

84. 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x-1)=f(x+1)$ 을

만족시키고, $0 \leqq x \leqq 2$ 사이에서 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 2-x & (1 < x \leqq 2) \end{cases}$$

보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. $f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

ㄷ. 수열 $\left\{f\left(\frac{1}{2}+n\right)\right\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

85. 두 무한수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷수능]

[보 기]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이고 $a_{n+1} < a_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < p$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. (단, $0 < p < 1$)

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 0$이고 $a_n < a_{n+1}$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

022 미 분류 문제들

상 중 하

86. 자연수를 순서대로 나열한 다음 표에서 제 m행, 제 n열의 수를 $a_{(m,\ n)}$이라 하자. 예를 들면 $a_{(1,\ 1)}=1$, $a_{(2,\ 1)}=2$이다. 이때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점N제]

	1열	2열	3열	4열	$\cdots$
1행	1	3	6	10	$\cdots$
2행	2	5	9	$\cdots$	
3행	4	8	$\cdots$		
4행	7	$\cdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[보 기]

ㄱ. $a_{(10,\ 1)}=46$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n,\ 1)}}{a_{(n,\ 2)}}=1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n,\ 1)}}{a_{(n,\ n)}}=\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

87. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=3n-2$ $(n\geq 1)$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

[인터넷수능]

① -2 ② -1 ③ $\frac{1}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

Ⅶ 무한급수

01 무한급수의 수렴 · 발산

상 중 하

1. 다음 무한급수 중 수렴하는 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}\right\}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 부분합과 무한급수

상 중 하

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ $(n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값은?

[인터넷 수능]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

상 중 하

3. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$4^n x^2-2^n x+\left(\frac{4^n}{2^n+1}-\frac{4^n}{2^{n+1}+1}\right)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right)$의 값은?

[고득점 N제]

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{4}{3}$

03 부분분수를 이용한 무한급수

(1) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

(2) $\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$

[참고] $n\cdot n!=(n+1)!-n!$

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

상 중 하

4. $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

상 중 하

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}}{\sqrt{n^2+n}}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

6. 자연수 n에 대하여 원 $(x-2n)^2+y^2=1$과 원점을 지나는 직선이 제1사분면에서 접할 때, 이 직선의 기울기를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$의 값은?

[수능특강]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

7. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프와 함수 $f(x)=|\sin\pi x|$의 그래프의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

상 중 하

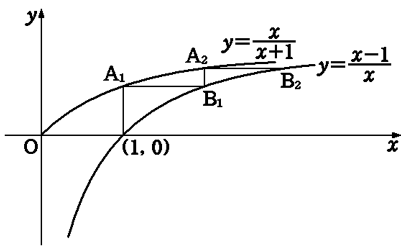
8. 자연수 n에 대하여 도형 $n|x|+(n+1)|y|=2$의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

상 중 하

9. 오른쪽 그림은 $x \geq 0$에서 두 유리함수 $y=\frac{x}{x+1}$, $y=\frac{x-1}{x}$의 그래프를 나타낸 것이다. 점 $(1,\ 0)$에서 y축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$와 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{x-1}{x}$과 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같이 점 A_n에서 x축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{x-1}{x}$과 만나는 점을 B_n, 점 B_n에서 y축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. 삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



[고득점 N제]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

상 중 하

10. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2^{n-1}}}{1-3^{2^n}}$의 합은?

[인터넷 수능]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

04 S_n 과 a_n 사이의 관계를 이용한 무한급수

상 중 하

11. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값은?

[고득점 N제]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

상 중 하

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2n(n+1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 일 때,
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}}-\sqrt{a_3+a_6+a_9+\cdots a_{3n}})$의 값은?

[인터넷 수능]

① $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　② $-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　③ 0
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

상 중 하

13. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=6S_n-5$가 성립한다.
이 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$의 값은?

[인터넷 수능]

① $-\dfrac{1}{4}$　② $-\dfrac{1}{5}$　③ $-\dfrac{1}{6}$
④ $-\dfrac{5}{24}$　⑤ $-\dfrac{6}{35}$

주관식

상 중 하

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 좌표평면 위에서 $|x|+|y|=n$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. 이때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000}{a_na_{n+1}}$의 값을 구하여라.

[수능특강]

05 귀납적으로 정의된 수열의 무한급수

상 중 하

15. 수열 $\{a_n\}$이 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_na_{n+1}}{(n+1)(a_n-a_{n+1})}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

상 중 하

16. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty} a_n=2$	(나) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_na_{n+1}}=1$

$b_1=\frac{1}{3}$일 때, a_2의 값은? (단, $a_n\neq0$)

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 무한급수의 성질

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$
(단, 역은 성립하지 않는다.)

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

[참고] $\lim_{n\to\infty}a_n=0$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하지 않는 경우가 있다.
예를 들면, $a_n=\frac{1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이지만 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 양의 무한대로 발산한다.

상 중 하

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n+2}{2a_n+n-4}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

상 중 하

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n+2}{n+3}\right)$는 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

19. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$을 만족한다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, 항상 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha = \beta$이다.

ㄴ. 수열 $\{c_n\}$이 발산하면 $\alpha < \beta$이다.

ㄷ. $\alpha = \beta = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

20. 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{4^{n+1}}{4^n+1}\right) = 5$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

21. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

22. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{n}{n+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n + \frac{2n}{n+1}\right)$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 2b_n}{2a_n + b_n}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $-\frac{5}{4}$ ② 0 ③ 1
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

상 중 하

23. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. (단, $a_n \neq 0$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$은 발산한다. (단, $a_n \neq 0$)

ㄴ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$($\alpha$는 양수)이면 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{2n} \geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

상 중 하

25. 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 0$이면 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 같다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$중 적어도 하나는 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

26. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$도 수렴한다.(단, $b_n \neq 0$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

27. 양의 정수로만 이루어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$이 성립한다. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $a_2=6$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $b_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 무한등비급수의 합

상 중 하

28. 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2^n}$의 값은?

[인터넷 수능]

① $2-\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $2(\sqrt{3}-1)$

상 중 하

29. 집합 $A_n=\{x\mid x$는 $4n$ 이하의 자연수$\}$에 대하여 세 수열
$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 다음과 같이 정의하자.

(가) a_n은 집합 A_n의 부분집합의 개수이다.
(나) b_n은 집합 A_n의 부분집합 중 짝수를 모두 포함한 부분집합의 개수이다.
(다) c_n은 집합 A_n의 부분집합 중 4의 배수를 포함하지 않는 부분집합의 개수이다.

이때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n+c_n}{a_n}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

상 중 하

30. 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 세 조건이 성립할 때, 상수 p의 값은? (단, $p \neq 0$)

[인터넷 수능]

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = p$ (나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = p-1$

(다) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = \frac{1}{2}p$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

상 중 하

31. 첫째항이 모두 1이고 공비가 각각 r, s인 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{13}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{6}{7}$이 성립한다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + b_n{}^2)$의 값은? (단, $r \leq s$)

[인터넷 수능]

① $\frac{11}{24}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
④ $\frac{57}{24}$ ⑤ $\frac{59}{24}$

상 중 하

32. 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $(3^n+1)S_n = 3^n S_{2n}$을 만족시킨다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

33. 첫째항이 2이고 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고, 이 수열의 각 항의 제곱을 항으로 하는 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 T_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} S_n = 4$일 때, $\lim_{n \to \infty} T_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$
④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

상 중 하

34. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n, T_n을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad T_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$$

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4 점]

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. $a_n+S_n=2$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

ㄴ. $T_n=a_n$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n-T_n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

35. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $[\log_2 x]=n$을 만족하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않는 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

상 중 하

36. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1 10=7^n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?(단, $n=1,2,3,\cdots$)

[인터넷 수능]

① 1 ② $\frac{21}{10}$ ③ 3
④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{21}{5}$

주관식

상 중 하

37. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{(x-3)(x-4)^k\}$의 값이 존재할 때, 정수 x의 총합을 구하시오.

[인터넷 수능]

08 삼각함수를 포함한 무한등비급수

상 중 하

38. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\theta)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\theta)^n=2\sqrt{2}$ 일 때, $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 의 값은? $\left(\text{단}, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

[인터넷 수능]

① $\frac{\sqrt{2}}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

09 무한등비급수의 수렴 조건

상 중 하

39. 무한급수 $x+x^2(x-3)+x^3(x-3)^2+\cdots+x^n(x-3)^{n-1}+\cdots$에 대한 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $x=1$이면 주어진 무한급수는 발산한다.
ㄴ. 주어진 무한급수의 합이 존재하도록 하는 정수 x의 최댓값은 3이다.
ㄷ. 주어진 무한급수의 합이 $\frac{1}{3}$이 되도록 하는 x는 한 개 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

40. 무한등비급수

$$x^2+x^2(1+x)+x^2(1+x)^2+\cdots$$

이 수렴하도록 하는 x의 값에 대하여 그 합을 $f(x)$라 하자. 좌표평면에서 $y=f(x)$의 그래프가 나타내는 도형의 길이는?

[고득점 N제]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

상 중 하

41. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, 보기 중 수렴하는 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2}$ ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}a_{2n+1}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

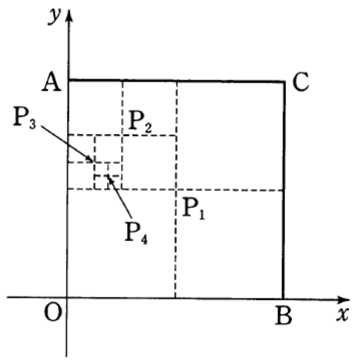
42. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n(x-2)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^n$이 동시에 수렴하기 위한 x의 값의 범위가 $\alpha < x < \beta$이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

010 무한등비급수 활용 : 좌표

상 중 하

43. 좌표평면 위에 한 변의 길이가 16인 정사각형 $AOBC$가 있다. 이 정사각형의 네 변의 중점을 x축과 y축에 평행하게 연결할 때 생기는 두 선분의 교점을 P_1, 4등분된 정사각형의 왼쪽 윗부분의 정사각형에서 네 변의 중점을 x축과 y축에 평행하게 연결할 때 생기는 두 선분의 교점을 P_2, 다시 4등분된 정사각형의 왼쪽 아랫부분의 정사각형에서 네 변의 중점을 x축과 y축에 평행하게 연결할 때 생기는 두 선분의 교점을 P_3, 다시 4등분된 정사각형의 오른쪽 아랫부분의 정사각형에서 네 변의 중점을 x축과 y축에 평행하게 연결할 때 생기는 두 선분의 교점을 P_4, 다시 4등분된 정사각형의 오른쪽 윗부분의 정사각형에서 네 변의 중점을 x축과 y축에 평행하게 연결할 때 생기는 두 선분의 교점을 P_5라 한다. 이와 같은 과정을 왼쪽 윗부분, 왼쪽 아랫부분, 오른쪽 아랫부분, 오른쪽 윗부분 순으로 한없이 계속하면서 생기는 점을 $P_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하면 n의 값이 커짐에 따라 점 P_n은 점 $P(a,\ b)$에 가까워진다. 이 때, $a+b$의 값은?



[인터넷 수능]

① $\frac{32}{3}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{62}{5}$
④ $\frac{64}{5}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

011 무한등비급수 활용 : 길이

상 중 하

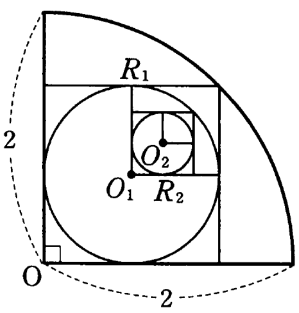
44. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$을 C_n이라 하자. 원 C_{n+1}의 한 접선에서 원 C_n의 현에 해당되는 선분의 길이를 d_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$의 값은?

[수능특강]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{6}$

상 중 하

45. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴에 내접하는 정사각형을 R_1, 또 R_1에 내접하는 원을 O_1이라고 한다. 이와 같은 방법으로 한없이 계속하여 R_2, O_2, R_3, O_3, $\cdots$를 만든다. 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$의 값은?



[인터넷 수능]

① $\frac{4\sqrt{2}-2}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{2}+2}{9}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}-2}{7}$
④ $\frac{3\sqrt{2}+2}{7}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$

상 중 하

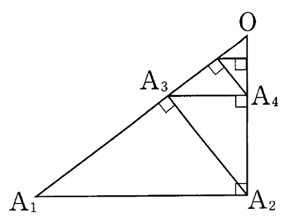
46. 동심원 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n, $\cdots$의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2, r_3, $\cdots$, r_n, $\cdots$이라 하고, 그 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_n, $\cdots$이라 할 때,
$S_n=2S_{n+1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
이 성립한다. $r_1=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$의 값은?

[인터넷 수능]

① $2-\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}-2$ ③ $2+\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4+2\sqrt{2}$

상 중 하

47. 그림과 같이 직각삼각형 OA_1A_2에서 $\angle OA_2A_1=90^\circ$이고 변 OA_1의 길이는 1, 변 OA_2의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 점 A_2에서 변 OA_1에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고 계속 변 OA_2에 내린 수선의 발을 A_4라고 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 점 A_k에서 변 OA_{k-1}에 내린 수선의 발을 A_{k+1}이라 할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{A_kA_{k+1}}$의 값은?

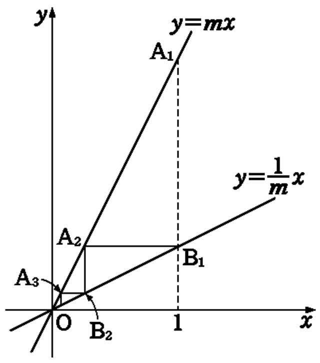


[인터넷 수능]

① $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{6}+1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

상 중 하

48. 오른쪽 그림은 두 직선 $y=mx$, $y=\frac{1}{m}x\ (m>1)$을 그린 것이다. 직선 $x=1$과 직선 $y=mx$가 만나는 점을 A_1이라 하자. 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=\frac{1}{m}x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=mx$와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같이 점 A_n에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=\frac{1}{m}x$와 만나는 점을 B_n, 점 B_n에서 x축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=mx$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_{2n}\mathrm{B}_{2n}}=\frac{2}{5}$일 때, m의 값은?



[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

49. 평면 위의 두 점 $O(0,\ 0)$, $A_1(1,\ 0)$에 대하여 $\overline{P_1O}:\overline{P_1A_1}=2:1$을 만족하는 점 P_1의 자취를 도형 C_1이라 하자. 이 도형 C_1과 $\overline{OA_1}$과의 교점을 A_2라 하고 $\overline{P_2O}:\overline{P_2A_2}=2:1$을 만족하는 점 P_2가 나타내는 도형을 C_2라 하자. 이와 같은 방법으로 계속해서 도형 C_{n-1}과 $\overline{OA_{n-1}}$과의 교점을 A_n, $\overline{P_nO}:\overline{P_nA_n}=2:1$을 만족하는 점 P_n의 자취를 도형 C_n이라 할 때, 도형 C_n 위의 점 P_n에 대하여 $\triangle OA_nP_n$의 넓이의 최댓값을 M_n이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$의 값은?

[인터넷 수능]

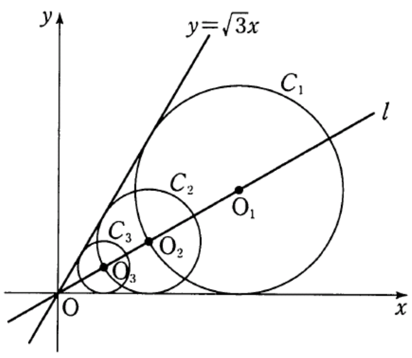
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

012 무한등비급수 활용 : 넓이

상 중 하

50. 다음 그림과 같이 직선 $y=\sqrt{3}x$와 x축에 접하는 중심이 점O_1인 원C_1이 있다. 원점 O와 점O_1을 지나는 직선 l이 원C_1과 만나는 두 점 중 원점에 가까운 점을 O_2라 하고, 점O_2를 중심으로 하고 직선 $y=\sqrt{3}x$와 x축에 접하는 원을 C_2라 하자. 직선 l이 원 C_2와 만나는 두 점 중 원점에 가까운 점을 O_3이라 하고, 점 O_3을 중심으로 하고 직선 $y=\sqrt{3}x$와 x축에 접하는 원을 C_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 원 C_4, C_5, $\cdots$를 만든다. 원 C_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, $\overline{OO_1}=10$)

[인터넷 수능]



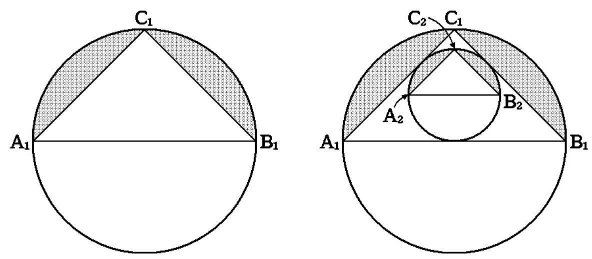
① 30π ② 33π ③ $\frac{100}{3}\pi$

④ 34π ⑤ $\frac{104}{3}\pi$

상 중 하

51. [그림1]과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1의 지름 A_1B_1을 한 변으로 하고 이 원에 내접하는 이등변삼각형 $A_1B_1C_1$을 그린 후 점 C_1을 포함하는 호 A_1B_1과 이 삼각형의 두 변으로 둘러싸인 도형을 T_1이라 하자. 또, [그림 2]와 같이 삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2를 그리고 이 원의 지름 A_2B_2를 한 변으로 하고 이 원에 내접하는 이등변삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린 후 점 C_2를 포함하는 호 A_2B_2와 이 삼각형의 두 변으로 둘러싸인 도형을 T_2라 하자. 이와 같은 방법으로 원 O_n의 지름 A_nB_n을 한 변으로 하고 이 원에 내접하는 이등변삼각형 $A_nB_nC_n$을 그린 후 C_n을 포함하는 호 A_nB_n과 이 삼각형의 두 변으로 둘러싸인 도형을 T_n이라 하자. 도형 T_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[고득점 N제]



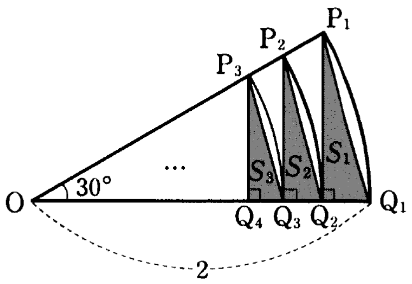
[그림 1] [그림 2]

① $(\sqrt{2}-1)(\pi-2)$ ② $(\sqrt{2}-1)(\pi-1)$ ③ $(\sqrt{2}+1)(\pi-2)$

④ $(\sqrt{2}+1)(\pi-1)$ ⑤ $(\sqrt{2}+1)(\pi+2)$

상 중 하

52. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 30°인 부채꼴 OQ_1P_1이 있다. 점 P_1에서 선분 OQ_1에 내린 수선의 발을 Q_2, 선분 OQ_2를 반지름으로 하는 원이 $\overline{OP_1}$과 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 $\overline{OQ_2}$에 내린 수선의 발을 Q_3라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 계속하여 $\triangle P_1Q_2Q_1$, $\triangle P_2Q_3Q_2$, $\triangle P_3Q_4Q_3$, $\cdots$를 만들어 가고, 그 넓이를 차례로 S_1, S_2, S_3, $\cdots$라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



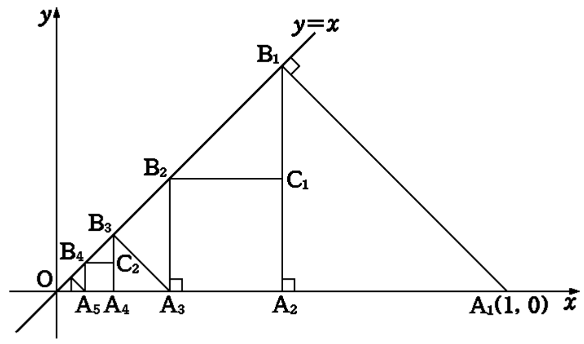
[인터넷 수능]

① $4-2\sqrt{3}$　② $4-\sqrt{3}$　③ $4+\sqrt{3}$
④ $5-2\sqrt{3}$　⑤ $3+3\sqrt{3}$

상 중 하

53. 아래 그림과 같이 점 $\mathrm{A}_1(1,\ 0)$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 B_1, 점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 이때 만들어진 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$를 T_1이라 하자. 또, 직선 $y=x$ 위의 점 B_2에서 x축, 변 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$에 각각 수선의 발 A_3, C_1을 내려 정사각형 $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1$을 만들고 이 정사각형을 T_2라 하자. 이와 같은 방법으로 점 A_{2n-1}에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 B_{2n-1}, 점 B_{2n-1}에서 x축에 내린 수선의 발을 A_{2n}이라 하고, 이때 만들어진 삼각형 $\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{B}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$을 T_{2n-1}이라 하자. 또, 직선 $y=x$ 위의 점 B_{2n}에서 x축, 변 $\mathrm{B}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$에 각각 수선의 발 A_{2n+1}, C_n을 내려 정사각형 $\mathrm{B}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}\mathrm{A}_{2n}\mathrm{C}_n$을 만들고 이 정사각형을 T_{2n}이라 하자. 도형 T_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[고득점 N제]

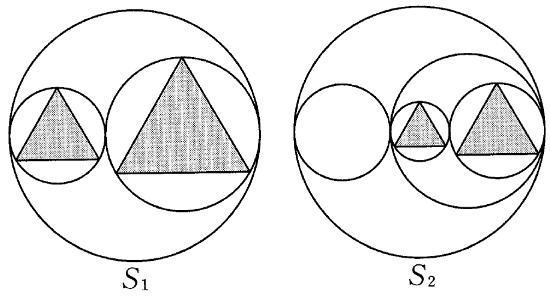


① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{1}{8}$　③ $\dfrac{1}{7}$
④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

상 중 하

54. 길이가 3인 원의 지름을 1:2로 내분하여 각각을 지름으로 하는 원을 만들고 그 두 원에 각각 내접하는 정삼각형들의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 다시 만들어진 두 원 중 큰 원의 지름을 2:1로 내분하여 각각을 지름으로 하는 원을 만들고 그 두 원에 각각 내접하는 정삼각형들의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 S_n을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[인터넷 수능]



① $\frac{18\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{27\sqrt{3}}{16}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{45\sqrt{3}}{16}$

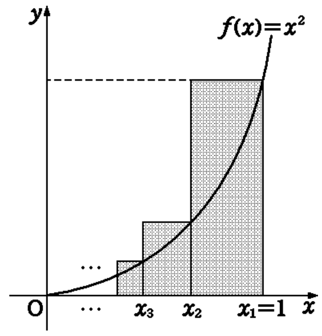
주관식

상 중 하

55. 이차함수 $f(x)=x^2$에서

$x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{4}{9},\ \cdots,$

$x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \cdots$ 을 그림과 같이 정할 때, x_n-x_{n+1}을 밑변의 길이, $f(x_n)$을 높이로 하는 직사각형의 넓이를 A_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n=\frac{q}{p}$를 만족할 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4 점]



[수능특강]

013 통합 유형

상 중 하

56. 일반항이 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$인 두 수열 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-S_nx+T_n=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)$의 값은?

[수능특강]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

상 중 하

57. 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $[\sqrt{x}]=n$을 만족하는 정수 x의 개수를 $f(n)$이라 할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(2)=5$
ㄴ. 수열 $\{f(n)\}$은 등차수열이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{f(n)}}=\frac{1}{6}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

58. 좌표평면에서 직선 $y=3x$ 위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 원점 O에 가까운 쪽부터 $A_1, A_2, A_3, \cdots$이라 하고 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 O에 가까운 쪽부터 $B_1, B_2, B_3, \cdots$이라 하자. 삼각형 OA_kB_k의 넓이를 S_k $(k=1,2,3,\cdots)$라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n^3}$의 값은? (단, 격자점이란 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 뜻한다.)

[인터넷 수능]

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{9}{4}$

상 중 하

59. $f(x)=\log_2 x$라 할 때, $0<x<1$에서 방정식

$$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$$

을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[수능특강]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ 2

1. 정답 ①	2. 정답 ④	3. 정답 ②
4. 정답 ③	5. 정답 ②	6. 정답 ①
7. 정답 ③	8. 정답 ③	9. 정답 ③
10. 정답 ②	11. 정답 ②	12. 정답 ②
13. 정답 ④	14. 정답 125	15. 정답 ④
16. 정답 ①	17. 정답 ②	18. 정답 ③
19. 정답 ②	20. 정답 ④	21. 정답 ①
22. 정답 ⑤	23. 정답 ④	24. 정답 ②
25. 정답 ③	26. 정답 ③	27. 정답 ④
28. 정답 ④	29. 정답 ②	30. 정답 ④
31. 정답 ①	32. 정답 ③	33. 정답 ⑤
34. 정답 ③	35. 정답 ③	36. 정답 ②
37. 정답 7	38. 정답 ③	39. 정답 ③
40. 정답 ④	41. 정답 ③	42. 정답 10
43. 정답 ④	44. 정답 ②	45. 정답 ⑤
46. 정답 ⑤	47. 정답 ⑤	48. 정답 ②
49. 정답 ③	50. 정답 ③	51. 정답 ③
52. 정답 ①	53. 정답 ⑤	54. 정답 ②
55. 정답 28	56. 정답 ①	57. 정답 ⑤
58. 정답 ③	59. 정답 ④	

1. 정답 ①

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

ㄴ. $n\to\infty$일 때, 수열 $\left\{(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}\right\}$은 진동한다.

그러므로 주어진 무한급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\infty$

따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㄱ이다.

2. 정답 ④

주어진 식을 이용하여 각 항을 차례로 나열하면

$1,2,1,2,1,2,\cdots$

(i) $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{3m}{2m}=\frac{3}{2}$

(ii) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2m-1}\sum_{k=1}^{2m-1}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{3m-2}{2m-1}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$

3. 정답 ②

근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=\frac{2^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\alpha_n\beta_n=\frac{1}{4^n}\times\left(\frac{4^n}{2^n+1}-\frac{4^n}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$

$=\frac{1}{3}-2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}-2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

4. 정답 ③

$a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^2+2n$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

5. 정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}}{\sqrt{n(n+1)}}$

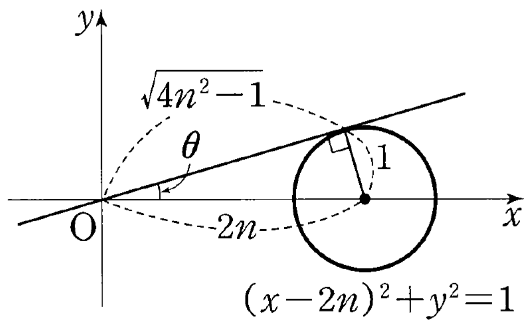
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

6. 정답 ①



$$a_n=\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$$

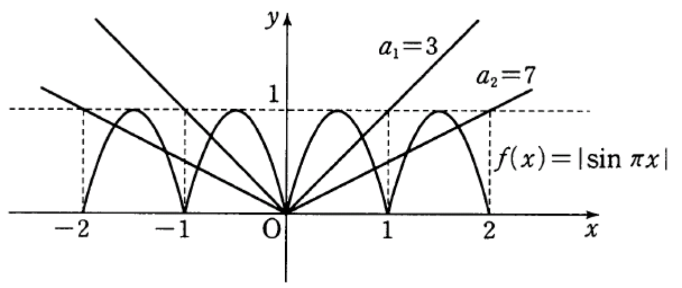
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}\right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n-\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n-\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

7. 정답 ③



위의 그림에서

$a_1=3,\ a_2=7,\ a_3=11,\ \cdots$

$\therefore\ a_n=4n-1$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{12}$$

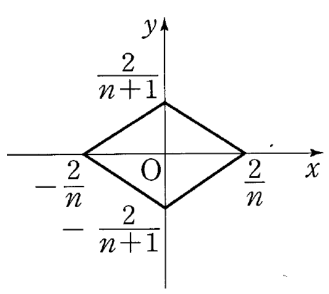
8. 정답 ③

좌표평면에서

$n|x|+(n+1)|y|=2$의 x절편은 $\pm\dfrac{2}{n}$,

y절편은 $\pm\dfrac{2}{n+1}$이므로

도형 $n|x|+(n+1)|y|=2$는 그림과 같다.



$S_n=\dfrac{8}{n(n+1)}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)}=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=8$$

9. 정답 ③

점 A_n, B_n을 차례로 찾으면

$A_1\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B_1\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $A_2\left(2,\ \dfrac{2}{3}\right)$, $B_2\left(3,\ \dfrac{2}{3}\right)$, $\cdots$

$\therefore\ A_n\left(n,\ \dfrac{n}{n+1}\right)$, $B_n\left(n+1,\ \dfrac{n}{n+1}\right)$

이때, 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times\overline{A_{n+1}B_n}=\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

10. 정답 ②

1보다 큰 자연수 n에 대하여

$\dfrac{n}{1-n^2}=\dfrac{1}{1-n}-\dfrac{1}{1-n^2}$이므로 수열$\left\{\dfrac{3^{2n-1}}{1-3^{2n}}\right\}$의 첫째항부터 제$n$

항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{3}{1-3^2}+\frac{3^2}{1-3^4}+\frac{3^4}{1-3^8}+\cdots+\frac{3^{2^{n-1}}}{1-3^{2^n}}$$

$$=\left(\frac{1}{1-3}-\frac{1}{1-3^2}\right)+\left(\frac{1}{1-3^2}-\frac{1}{1-3^4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1-3^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-3^{2^n}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-3}-\frac{1}{1-3^{2^n}}$$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{2^n}=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-3^{2^n}}=0$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2^{n-1}}}{1-3^{2^n}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{1-3^{2^n}}\right)=-\frac{1}{2}$$

11. 정답 ②

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\dfrac{3}{2}$

(ii) $n \geqq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \dfrac{2n+1}{n^2+n} - \dfrac{2n-1}{(n-1)^2+(n-1)} = \dfrac{2n+1}{n(n+1)} - \dfrac{2n-1}{n(n-1)}$

$= \dfrac{(2n+1)(n-1)-(2n-1)(n+1)}{(n-1)n(n+1)} = \dfrac{-2n}{(n-1)n(n+1)}$

$= \dfrac{-2}{(n-1)(n+1)}$

그러므로 (i), (ii)에 의해

$$a_n \begin{cases} \dfrac{3}{2} & (n=1) \\ \dfrac{-2}{(n-1)(n+1)} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-2}{(2k-1)(2k+1)}$

$= -\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= -\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= -\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = -1$

12. 정답 ②

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$이라 하면

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n(n+1) - 2n(n-1) = 4n$

이 때, $S_1 = a_1 = 4$이므로 $a_n = 4n$

따라서 $a_{3n-2} = 12n - 8$, $a_{3n} = 12n$이므로

$a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (12k-8) = 6n^2 - 2n$

$a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 12k = 6n^2 + 6n$

$\therefore$ (주어진 식)$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{6n^2-2n} - \sqrt{6n^2+6n}\right)$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-8n}{\sqrt{6n^2-2n}+\sqrt{6n^2+6n}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-8}{\sqrt{6-\frac{2}{n}}+\sqrt{6+\frac{6}{n}}}$

$= \dfrac{-8}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

13. 정답 ④

$a_n = 6S_n - 5$ …… ㉠

$a_{n-1} = 6S_{n-1} - 5$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_n - a_{n-1} = 6(S_n - S_{n-1}) = 6a_n$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = -\dfrac{1}{5}$ $(n \geqq 2)$

한편, $a_1 = 6S_1 - 5 = 6a_1 - 5$

$\therefore a_1 = 1$

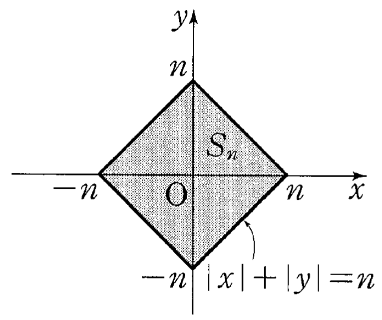
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{5}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}) = \frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = -\frac{5}{24}$

14. 정답 125

좌표평면에서 $|x|+|y|=n$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$S_n = \left(\dfrac{1}{2} \times 2n \times n\right) \times 2 = 2n^2$

따라서 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2$ $(n \geq 2)$이고

$S_1 = a_1 = 2$이므로 $a_n = 4n - 2$ $(n \geq 1)$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{(4n-2)(4n+2)}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 250\left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2}\right)$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} 250\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)\right\}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} 250\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right) = 125$

15. 정답 ④

$\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = n$에서 $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = n$

$\therefore \dfrac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \dfrac{1}{n}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n a_{n+1}}{(n+1)(a_n - a_{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$= 2\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 2\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= 2\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2$

16. 정답 ①

$b_n = a_{n+1} - a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) = 1$$

한편, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2$에서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} = 1$$

$\therefore\ a_1 = \frac{2}{3}$

따라서 $b_1 = a_2 - a_1$이므로

$$a_2 = a_1 + b_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

17. 정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=0$이다

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n+2}{2a_n+n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-3+\frac{2}{n}}{2\frac{a_n}{n}+1-\frac{4}{n}} = \frac{2-3}{2\cdot 2+1} = -\frac{1}{5}$$

18. 정답 ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{n}{n+1}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{2n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 1-2 = -1 \neq 0$

그러므로 주어진 무한급수는 발산한다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{n+2}{n+3}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+2}{k+3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)+\cdots + \left(\frac{n-1}{n}-\frac{n+1}{n+2}\right)+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{n+3}\right) = -\frac{5}{6}$$

이때, 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}\right)$가 모두 수렴하므로 ㉠에서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n+2}{n+3}\right)$는 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19. 정답 ②

ㄱ. (반례) $a_n = 1$, $b_n = 3$, $c_n = 2$이면 $a_n < c_n < b_n$이고 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n$ (거짓)

ㄴ. 주어진 명제의 대우는 '$\alpha \geq \beta$이면 수열 $\{c_n\}$이 수렴한다.'이다. 이때, $a_n < b_n$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, 즉 $\alpha \leq \beta$이다. 즉, $\alpha \geq \beta$이고 $\alpha \leq \beta$이므로 $\alpha = \beta$이다. 따라서 주어진 명제의 대우는 '$\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴한다.'이고 이것이 참이므로 주어진 명제도 참이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{3}{n}$, $c_n = \frac{2}{n}$이면 $\alpha = \beta = 0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

20. 정답 ④

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{4^{n+1}}{4^n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{4^{n+1}}{4^n+1}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n}{4^n+1} = 4$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 4$

21. 정답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이다. (참)

ㄴ. (반례)

$\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

이면 $\{a_n b_n\}$: 0, 0, 0, 0, $\cdots$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$이지만 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 n값이 커짐에 따라 진동(발산)한다. (거짓)

ㄷ. (반례)

$\{a_n\}$: -1, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, $-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\cdots$ 이면

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = (-1+1)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

$\sum_{k=1}^{2n}=0$

이 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산한다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

22. 정답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{n}{n+1}\right)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n+\frac{2n}{n+1}\right)$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{n}{n+1}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2n}{n+1}\right)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n}{2a_n+b_n}=\frac{-1-4}{-2-2}=\frac{5}{4}$

23. 정답 ④

ㄱ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=2$이지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{a_n}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24. 정답 ②

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\neq 0$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$은 발산한다. (참)

ㄴ. $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\alpha$ (수렴) (참)

ㄷ. (반례) $a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$

이지만 $a_{2n}<0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25. 정답 ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta-\alpha$ (수렴) (참)

ㄴ. (반례) $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=0$

이지만 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비는 다르다.

ㄷ. 주어진 명제의 대우를 증명해 보자.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 발산한다고 하고 두 수열의 공비를 각각 r, s라 하면 $|r|\geq 1$, $|s|\geq 1$이므로 $|rs|=|r||s|\geq 1$이다. 즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

26. 정답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\gamma$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha-\gamma$

즉, 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)\right\}=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

즉, 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴하지만

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$$

이므로 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27. 정답 ④

ㄱ. $\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1}=\sqrt{2a_1}$에서

$(a_1+2)^2=8a_1$, $(a_1-2)^2=0$

$\therefore\ a_1=2$

$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2}=\sqrt{2(a_1+a_2)}=\sqrt{2(2+a_2)}$

$(a_2+2)^2=8(a_2+2)$, $a_2{}^2-4a_2-12=0$

$(a_2-6)(a_2+2)=0$

$a_2>0$이므로 $a_2=6$ (참)

ㄴ. $\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$S_n=\frac{(a_n+2)^2}{8}$, $S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2$

$\therefore\ a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}\{(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2\}$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$

$a_{n+1}+a_n\neq 0$이므로 $a_{n+1}-a_n=4$

또한, ㄱ에서 $a_1=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=4n-2$ (참)

ㄷ. $b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{4n+2}{4n-2}+\frac{4n-2}{4n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{4}{4n-2}\right)+\left(1+\frac{-4}{4n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)$

$=1+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+(b_n-1)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28. 정답 ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2^n}=\frac{\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$$

29. 정답 ②

a_n은 집합 A_n의 부분집합의 개수이므로

$a_n=2^n$

또, b_n은 짝수를 제외한 홀수 $2n$개로 만든 부분집합의 개수와 같으므로

$b_n=2^{2n}$

또, c_n은 4의 배수를 제외한 $3n$개로 만든 부분집합의 개수와 같으므로

$c_n=2^{3n}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n+c_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+2^{3n}}{2^{4n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

30. 정답 ④

무한등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면

(가)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=p$

(나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=p-1$이므로

$\frac{ar}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}-1$

$\frac{ar}{(1-r)(1+r)}=\frac{a+r-1}{1-r}$

$\therefore\ \frac{ar}{1+r}=a+r-1$ ⋯⋯ ㉠

(다)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{1}{2}p$이므로

$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1-r}$

$$\frac{a}{1+r}=\frac{1}{2}\ (\because\ p\neq 0 \text{ 이므로 } a\neq 0)$$

$\therefore\ 1+r=2a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{4},\ r=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ p=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

31. 정답 ①

$$\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-s}=\frac{13}{6},\quad \frac{1}{1-rs}=\frac{6}{7}$$

$6(2-r-s)=13(1-r-s+rs) \quad \cdots$ ㉠

$6(1-rs)=7 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$rs=-\frac{1}{6},\ r+s=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ r=-\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{3}\ (\because\ r\le s)$$

따라서 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$a_{2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1},\ {b_n}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{2}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{8}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+{b_n}^2)=-\frac{2}{3}+\frac{9}{8}=\frac{11}{24}$$

32. 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $(3^n+1)S_n=3^nS_{2n}$에서

$$(3^n+1)\times\frac{2(1-r^n)}{1-r}=3^n\times\frac{2(1-r^{2n})}{1-r}$$

$$(3^n+1)\times\frac{2(1-r^n)}{1-r}=3^n\times\frac{2(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}$$

$$3^n+1=3^n(1+r^n)$$

$$\therefore\ r^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

33. 정답 ⑤

$$S_n=2+2r+2r^2+\cdots+2r^{n-1}=\frac{2(1-r^n)}{1-r}$$

$$T_n=2^2+(2r)^2+(2r^2)^2+\cdots+(2r^{n-1})^2=\frac{4(1-r^{2n})}{1-r^2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=4$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(1-r^n)}{1-r}=4$

$$\frac{2}{1-r}=4(\because -1<r<1)$$

$$\therefore r=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4(1-r^{2n})}{1-r^2}=\frac{4}{1-r^2}(\because 0<r^2<1)$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$$

34. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$T_n=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

ㄱ. $a_n+S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2$ (참)

ㄴ. $T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2a_n$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-T_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S_n-T_n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\ (\text{참})$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

35. 정답 ③

$[\log_2 x]=n$에서

$$n\le\log_2 x<n+1 \Leftrightarrow \log_2 2^n\le\log_2 x<\log_2 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^n\le x<2^{n+1}$$

$$\therefore f(n)=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

36. 정답 ②

$T_n = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10$으로 놓으면

$n \geq 2$일 때, $T_n - T_{n-1} = a_n 10^n = 7^n - 7^{n-1} = 6 \cdot 7^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$ (단, $n \geq 2$), $a_1 = \frac{7}{10}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째 항이 $\frac{7}{10}$이고, 둘째 항부터 공비가 $\frac{7}{10}$인 등비수열을 이룬다.

$a_2 = \frac{21}{50}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{7}{10} + \frac{\frac{21}{50}}{1-\frac{7}{10}} = \frac{21}{10}$$

37. 정답 7

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{(x-3)(x-4)^k\}$

$= \lim_{n\to\infty} \{(x-3)(x-4) + (x-3)(x-4)^2 + \cdots + (x-3)(x-4)^n\}$

이므로 첫째항이 $(x-3)(x-4)$, 공비가 $(x-4)$인 무한등비급수이다.

(ⅰ) $x=3$이면 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (-1)^k = 0$(수렴)

(ⅱ) $x \neq 3$이면 $-1 < x-4 < 1$에서 $3 < x < 5$ $\quad \therefore x=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3,\ 4$

따라서 정수 x의 값의 총합은 7이다.

38. 정답 ③

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < 1-\sin\theta < 1,\ 0 < 1-\cos\theta < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\sin\theta)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\theta)^n$$
$$= \frac{1-\sin\theta}{1-(1-\sin\theta)} - \frac{1-\cos\theta}{1-(1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{1-\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$\cos\theta - \sin\theta = 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 8(\sin\theta\cos\theta)^2$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = 8(\sin\theta\cos\theta)^2$

$(2\sin\theta\cos\theta + 1)(4\sin\theta\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{4}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\quad \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{4}$

39. 정답 ③

무한급수 $x + x^2(x-3) + x^3(x-3)^2 + \cdots + x^n(x-3)^{n-1} + \cdots$는 공비가 $x(x-3)$이다.

ㄱ. $x=1$이면 $1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots$

즉, 공비가 -2이므로 주어진 무한급수는 발산한다. (참)

ㄴ. 주어진 무한급수의 합이 존재하려면 $-1 < x(x-3) < 1$이어야 한다.

(ⅰ) $x^2 - 3x + 1 > 0$에서

$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(ⅱ) $x^2 - 3x - 1 < 0$에서 $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

(ⅰ),(ⅱ)에서

$\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

따라서 주어진 무한급수의 합이 존재하도록 하는 정수 x의 최댓값은

3이다. ($\because\ \sqrt{5} < 3 < \sqrt{13}$) (참)

ㄷ. 주어진 무한급수의 합을 S라 하면

$S = \frac{x}{1-x(x-3)} = \frac{1}{3}$

$3x = 1 - x^2 + 3x$

$x^2 = 1$

$\therefore\ x = \pm 1$

이것은 ㄴ을 만족하지 않는다.

따라서 주어진 무한급수의 합이 $\frac{1}{3}$이 되도록 하는 x는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40. 정답 ④

무한급수가 수렴할 조건은 다음과 같다.

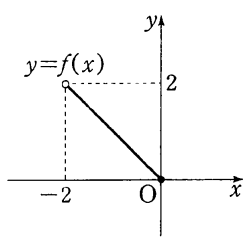
(ⅰ) $x^2 = 0$일 때, $x = 0$

(ⅱ) 공비 $1+x$가 $-1 < 1+x < 1$일 때, $-2 < x < 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-2 < x \leq 0$

이때, 무한급수의 합 $f(x)$는

$f(x) = \frac{x^2}{1-(1+x)} = -x$



따라서 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 구하는 도형의 길이는 원점과 점 $(-2,\ 2)$ 사이의 거리이므로 $2\sqrt{2}$이다.

41. 정답 ③

무한등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a, 공비가 $r^2\ (0<r^2<1)$ 인 등비수열이므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$은 $\frac{a}{1-r^2}$로 수렴한다.

수열 $\{a_{2n+1}\}$은 첫째항이 ar^2, 공비가 $r^2\ (0<r^2<1)$인 등비수열이므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$은 $\frac{ar^2}{1-r^2}$으로 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\right)$은 수렴한다.

ㄴ. $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{ar^{2n}}{ar^{2n-2}} = r^2$

따라서 수열 $\left\{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right\}$은 첫째항이 r^2, 공비가 1인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^2 = \lim_{n\to\infty} nr^2$ (발산)

ㄷ. $a_{2n-1}a_{2n+1} = ar^{2n-2}ar^{2n} = a^2r^{4n-2}$이므로

수열 $\{a_{2n-1}a_{2n+1}\}$은 첫째항이 a^2r^2, 공비가 $r^4\ (0<r^4<1)$ 인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}a_{2n+1}$은 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

42. 정답 10

(i) 수열 $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n (x-2)^{n-1}\right\}$의 공비가 $\frac{x}{3}(x-2)$이므로 무한등비급수가 수렴하기 위해서는

$-1<\frac{x}{3}(x-2)<1$이어야 한다. 즉,

$-3<x(x-2)<3$

$-3<x^2-2x<3$

이 때, $x^2-2x>-3$에서 $x^2-2x+3>0$

$(x-1)^2+2>0$

$\therefore x$는 모든 실수 …… ㉠

또, $x^2-2x<3$에서 $x^2-2x-3<0$

$(x-3)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x<3$

(ii) 수열 $\left\{\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^n\right\}$의 공비가 $\log_3 \frac{x}{3}$이므로 무한등비급수가 수렴하기 위해서는 $-1<\log_3 \frac{x}{3}<1$이어야 한다. 즉, $3^{-1}<\frac{x}{3}<3$

$\therefore 1<x<9$

(i), (ii)에서 $1<x<3$

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

43. 정답 ④

$P_1(8,\ 8)$

$P_2(8-4,\ 8+4)$

$P_3(8-4-2,\ 8+4-2)$

$P_4(8-4-2+1,\ 8+4-2-1)$

$P_5\left(8-4-2+1+\frac{1}{2},\ 8+4-2-1+\frac{1}{2}\right)$

$P_6\left(8-4-2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ 8+4-2-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

⋮

n의 값이 커짐에 따라

$a=8-4-2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots,$

$b=8+4-2-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots$

$\therefore\ a+b=2\left(8-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\cdots\right)$

$=2\times\frac{8}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{64}{5}$

44. 정답 ②

원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 $r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

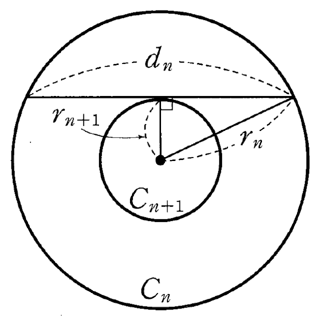
$\frac{d_n}{2}=\sqrt{r_n^2-r_{n+1}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}$

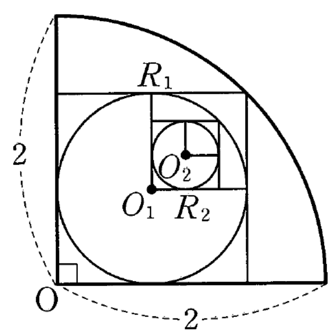
$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore d_n=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$



45. 정답 ⑤



위의 그림에서 원 O_1의 반지름의 길이가 r_1이라 하면

$(2r_1)^2+(2r_1)^2=2^2$

$\therefore r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

원 O_2의 반지름의 길이를 r_2라 하면

$(2r_2)^2 + (2r_2)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\therefore r_2 = \dfrac{1}{4}$

따라서 원 O_n의 반지름의 길이 r_n은

$r_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}+2}{7}$

46. 정답 ⑤

$S_n = \pi r_n{}^2$, $S_n = 2S_{n+1}$이므로 $\pi r_n{}^2 = 2\pi r_{n+1}{}^2$

$\therefore r_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_n$

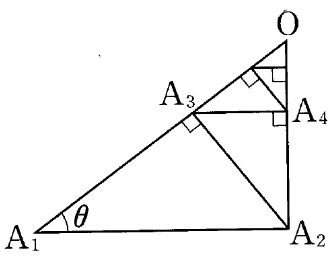
$r_1 = 2$이므로 $r_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 4 + 2\sqrt{2}$

47. 정답 ⑤

$\angle OA_1A_2 = \theta$라고 하면



$\sin\theta = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{A_1A_2} = \sqrt{\overline{OA_1}^2 - \overline{OA_2}^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_2}\sin\theta$,

$\overline{A_3A_4} = \overline{A_2A_3}\sin\theta = \overline{A_1A_2}\sin^2\theta$

즉, $\overline{A_kA_{k+1}} = \overline{A_1A_2}\sin^{k-1}\theta$

$= \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A_kA_{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$

$= \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

48. 정답 ②

점 A_n, B_n의 좌표를 차례로 구하면 다음과 같다.

$A_1(1,\ m)$, $B_1\left(1,\ \dfrac{1}{m}\right)$, $A_2\left(\dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{1}{m}\right)$, $B_2\left(\dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{1}{m^3}\right)$, $\cdots$

$\therefore\ A_n\left(\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1},\ m\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1}\right)$

$B_n\left(\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1},\ \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1}\right)$

$\therefore\ \overline{A_nB_n} = \left(m-\dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1}$

이때,

$\overline{A_{2n}B_{2n}} = \left(m-\dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{2n-1}$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{2n}B_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(m-\dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{2n-1}$

$= \dfrac{\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m^2}\right)}{1-\left(\frac{1}{m}\right)^4} = \dfrac{m}{m^2+1} = \dfrac{2}{5}$

이 식을 풀면

$2m^2 + 2 = 5m$

$2m^2 - 5m + 2 = 0$

$(2m-1)(m-2) = 0$ $\qquad \therefore\ m = 2$ ($\because\ m > 1$)

49. 정답 ③

점 P_1의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

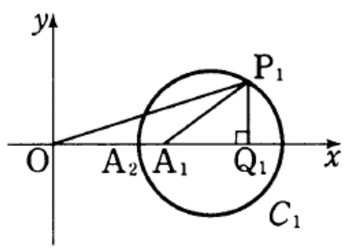
$\overline{P_1O}^2 = x^2 + y^2$, $\overline{P_1A_1}^2 = (x-1)^2 + y^2$

$\overline{P_1O} : \overline{P_1A_1} = 2 : 1$ 이므로

$x^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$

$\therefore \left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

따라서 도형 C_1은 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\dfrac{2}{3}$인 원이다.



또한, $A_n(a_n,\ 0)$이라 하면, $\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 3 : 2$ 이므로

$\overline{OA_{n-1}} : \overline{OA_n} = 3 : 2$

따라서 $a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1}$, $a_1 = 1$이므로 $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

이 때, 도형 C_n의 방정식은

$x^2 + y^2 = 4\{(x-a_n)^2 + y^2\}$

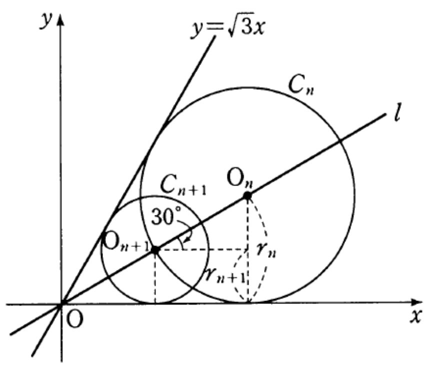
$\therefore \left\{x - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}^2 + y^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$

또한, $\triangle OA_1P_1 = \frac{1}{2}\overline{OA_1}\cdot\overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}y$이므로 $\triangle OA_1P_1$의 넓이의 최댓값 M_1은 $M_1 = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

같은 방법으로 $\triangle OA_nP_n = \frac{1}{2}\overline{OA_n}\cdot\overline{P_nQ_n}$이므로 $\triangle OA_nP_n$의 넓이의 최댓값 M_n은 $M_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$

50. 정답 ③



직선 $y=\sqrt{3}x$의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 $y=\sqrt{3}x$와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore\ \theta = 60^{\circ}$

위의 그림에서 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_n - r_{n+1} = r_n\sin 30^{\circ}$

$\therefore\ r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$

한편, $r_1 = \overline{OO_1}\sin 30^{\circ} = 10\times\frac{1}{2} = 5$

$\therefore\ r_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

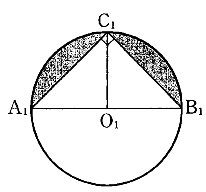
$\therefore\ S_n = \pi {r_n}^2 = 25\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 25\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{25\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{100}{3}\pi$$

51. 정답 ③

원 O_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

오른쪽 그림에서 변 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로

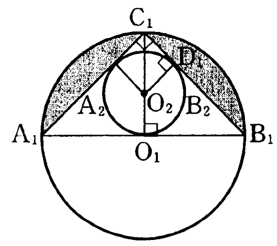


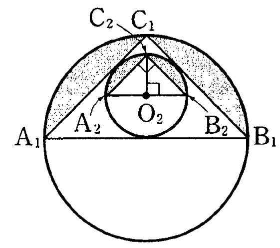
$\angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ S_1 = \frac{1}{2}\times {r_1}^2\pi - \triangle A_1B_1C_1 = 2\pi - 4$

삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 변 B_1C_1이 만나는 접점을 D_1이라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{C_1O_1} = \sqrt{2}r_2$





이때, $\overline{C_1O_1} = r_1$, $\overline{O_1O_2} = r_2$이므로

$r_1 = (\sqrt{2}+1)r_2$

$r_1 : r_2 = (1+\sqrt{2}) : 1$이므로

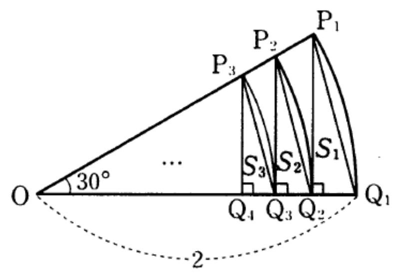
$S_1 : S_2 = (1+\sqrt{2})^2 : 1$

$= (3+2\sqrt{2}) : 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\pi-4}{1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}}$$

$= (\sqrt{2}+1)(\pi-2)$

52. 정답 ①



$\triangle P_1Q_2Q_1$의 밑변의 길이는 $2(1-\cos 30^{\circ})$이고 높이가 $2\sin 30^{\circ}$이므로

$S_1 = \frac{1}{2}\times 2(1-\cos 30^{\circ})\times 2\sin 30^{\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$\triangle P_1Q_2Q_1$과 $\triangle P_2Q_3Q_2$에서

$\overline{P_2Q_3} = \overline{OP_2}\cdot\sin 30^{\circ} = \overline{OQ_2}\cdot\sin 30^{\circ}$

$\overline{OQ_2} = 2\cos 30^{\circ}$이므로

$\overline{P_1Q_2} : \overline{P_2Q_3} = 2\sin 30^{\circ} : 2\cos 30^{\circ}\sin 30^{\circ} = 1 : \cos 30^{\circ}$

따라서 $\triangle P_1Q_2Q_1$과 $\triangle P_2Q_3Q_2$는 닮음비가 $1 : \cos 30^{\circ}$, 즉 $1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 닮음도형이므로

$S_1 : S_2 = 1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 : \frac{3}{4}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}} = 4-2\sqrt{3}$$

53. 정답 ⑤

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 $A_1B_1A_2$는 직각이등변삼각형이다.

이때, $\overline{B_1A_2} = \overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{OA_1} = \frac{1}{2}$이므로

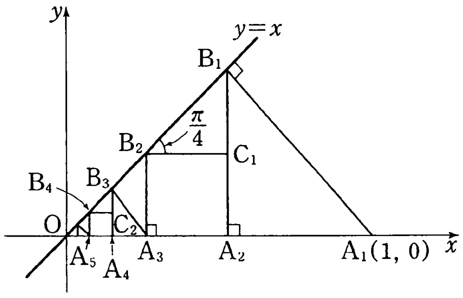
$S_1 = \frac{1}{2}\times\overline{B_1A_2}^2 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

또, $\overline{B_2A_3} = \frac{1}{2}\overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$이므로

$S_2 = \overline{B_2A_3}^2 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

또, $\overline{B_3A_4} = \frac{1}{2}\overline{B_2A_3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$이므로

$S_3 = \frac{1}{2} \times \overline{B_3A_4}^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$



이런 방법으로 계속하면 $\overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}$, $\overline{B_{n+1}A_{n+2}} = \frac{1}{2}\overline{B_nA_{n+1}}$이므로

$\overline{B_nA_{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

따라서 $S_{2n-1} = \frac{1}{2}\overline{B_{2n-1}A_{2n}}^2 = \frac{1}{2} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}$,

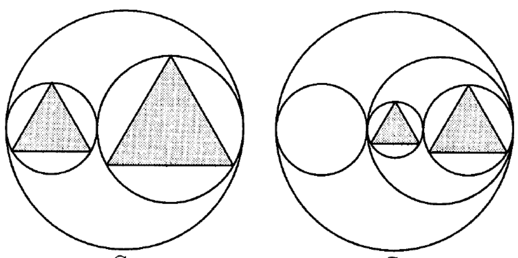
$S_{2n} = \overline{B_{2n}A_{2n+1}}^2 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \cdots\right\} + \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} + \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

54. 정답 ②



S_1 S_2

지름의 길이가 1과 2인 두 원에 내접하는 두 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 a, b라 하면

$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 1, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \therefore\ b = \sqrt{3}$

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2\right\} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$

두 번째 만들어진 두 정삼각형의 한 변의 길이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\} = \frac{15\sqrt{3}}{36} = \frac{4}{9}S_1$

이때, 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$은 등비수열이고, $S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$이다.

$S_1 = \frac{15\sqrt{3}}{16}$이고 $r = \frac{4}{9}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{16}}{\frac{5}{9}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

55. 정답 28

$A_n = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

따라서 $p = 19$, $q = 9$이므로

$p + q = 19 + 9 = 28$

56. 정답 ①

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$에서 $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$에서

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$x^2 - S_nx + T_n = 0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n + \beta_n = S_n$, $\alpha_n\beta_n = T_n$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \lim_{n\to\infty}\{(\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n\beta_n\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(S_n^2 - 2T_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}$$

57. 정답 ⑤

$[\sqrt{x}] = n$에서

$n \leqq \sqrt{x} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leqq x < (n+1)^2$

$\therefore\ f(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

ㄱ. $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ (참)

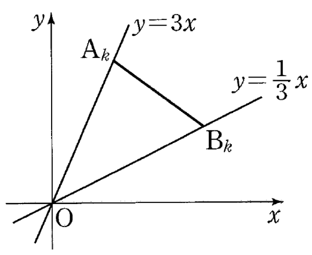
ㄴ. $f(n) = 2n+1$이므로 수열 $\{f(n)\}$은 첫째항이 3이고, 공차가 2인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{f(n)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

58. 정답 ③

$A_k(k,3k)$, $B_k(3k,k)$(단, k는 정수)라 하면



$\overline{OB_k}=\sqrt{9k^2+k^2}=\sqrt{10}k$

$A_k(k,3k)$에서 직선 $y=\frac{1}{3}x$까지의 거리 h는

$h=\frac{|k-9k|}{\sqrt{10}}=\frac{|8k|}{\sqrt{10}}$

따라서 삼각형의 넓이 S_k는

$S_k=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\,k\times\frac{|8k|}{\sqrt{10}}=4k^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{4}{3}$

59. 정답 ④

$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$에서 $\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$

$\therefore 1\leqq\frac{f(x)}{[f(x)]}<2$

(i) $\frac{1}{2^n}<x<\frac{1}{2^{n-1}}$이면

$-n<\log_2 x<-n+1$ $\quad\therefore[\log_2 x]=-n$

$\frac{f(x)}{[f(x)]}=\frac{\log_2 x}{[\log_2 x]}$이므로

$1-\frac{1}{n}<\frac{f(x)}{[f(x)]}<1$

$\therefore\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$

(ii) 임의의 자연수 n에 대하여 $x=\frac{1}{2^n}$이면

$\log_2 x=-n$, $[\log_2 x]=[-n]=-n$

$\therefore\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=\left[\frac{\log_2 x}{[\log_2 x]}\right]=\left[\frac{-n}{-n}\right]=1$

(i), (ii)에서 $\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$을 만족하는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례로 나열하면

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

Ⅷ. 지수함수

01 지수함수의 대소관계

주어진 수의 밑을 같게 한 다음 지수함수의 성질을 이용한다.
① $a>1$일 때, $m<n \Leftrightarrow a^m<a^n$
② $0<a<1$일 때, $m<n \Leftrightarrow a^m>a^n$

상 중 하

1. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]
ㄱ. $0.2^{0.2}<0.2^{0.3}$ ㄴ. $0.2^{0.2}<0.3^{0.2}$
ㄷ. $0.3^{-0.2}<0.2^{-0.3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

2. 함수 $f(x)=2^x-1$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]
ㄱ. $x>1$이면 $\dfrac{f(x)}{x}>1$
ㄴ. $0<x<1$이면 $0<\dfrac{f(x)}{x}<1$
ㄷ. $x<0$이면 $\dfrac{f(x)}{x}<0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

3. $0<b<a<1$인 두 실수 a, b에 대하여 $a^p=b^q$이 성립할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]
ㄱ. $p>1$이면 $q>1$이다.
ㄴ. $q>1$이면 $p>1$이다.
ㄷ. $p<0$이면 $p<q<0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

4. 두 실수 a, b가 $a^2<a<b<b^2$을 만족할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]
ㄱ. $\dfrac{1}{a^a}>a^{\frac{1}{a}}$ ㄴ. $b^{\frac{1}{b}}>b^b$
ㄷ. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a}}<a^b$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 지수함수의 그래프

함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여
① 정의역 : 실수 전체의 집합
치역 : $\{y \mid y>0\}$
② 그래프의 점근선 : 직선 $y=0$ (x축)
③ 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지난다. $\Leftrightarrow$ $n=a^m$

상 중 하

5. 지수함수 $y=2^{-x+1}-1$의 그래프의 점근선의 방정식은?

[수능특강]

① $x=-1$　② $x=1$　③ $y=-1$
④ $y=0$　⑤ $y=1$

상 중 하

6. $0<b<1<a<2$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 함수 $y=-a^x+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 적은 것은?

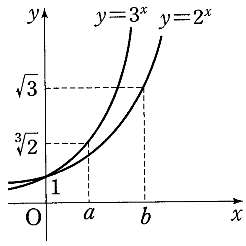
[수능특강]

① 제1, 2사분면　② 제 1, 3사분면　③ 제 2, 4사분면
④ 제 1, 3, 4사분면　⑤ 제 2, 3, 4사분면

상 중 하

7. 오른쪽 그림과 같이 지수함수 $y=3^x$, $y=2^x$의 그래프가 각각 점 $(a,\ \sqrt[3]{2})$, $(b,\ \sqrt{3})$을 지날 때, a, b의 관계식으로 옳은 것은?

[인터넷 수능]



① $2a-b=0$　② $a^2=b^3$
③ $3a-2b=0$　④ $3ab=1$
⑤ $6ab=1$

상 중 하

8. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-3}}$의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표가 y축 위에 있을 때, $f(a)f(b)$의 값은?

[인터넷 수능]

① 2　② 2^4　③ 2^6
④ 2^8　⑤ 2^{10}

상 중 하

9. 지수함수 $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. 곡선 $y=\dfrac{2}{3^x}$와 만난다.

ㄴ. 임의의 양수 a에 대하여 직선 $y=a$와 만난다.

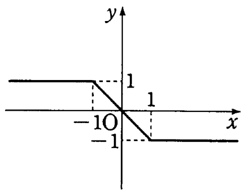
ㄷ. 임의의 양수 a에 대하여 직선 $y=ax$와 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

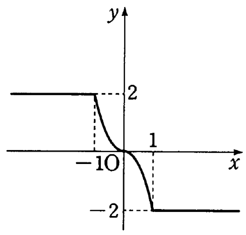
상 중 하

10. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 $y=2^{1-f(x)}$의 그래프로 옳은 것은?

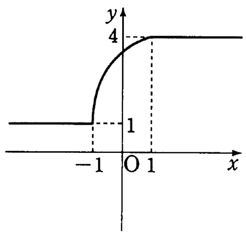
[인터넷 수능]



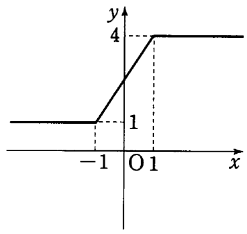
①



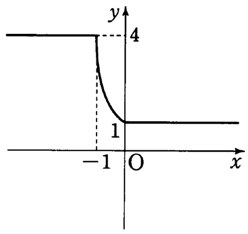
②



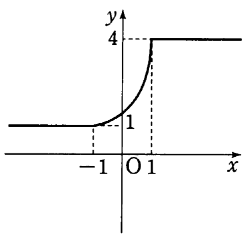
③



④



⑤



03 지수함수의 성질

지수함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$과 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여

① $f(x)f(y)=a^xa^y=a^{x+y}=f(x+y)$

② $\dfrac{f(x)}{f(y)}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}=f(x-y)$

③ $f(px)=a^{px}=(a^x)^p=\{f(x)\}^p$ (단, p는 실수)

④ $f\left(\dfrac{x}{n}\right)=a^{\frac{x}{n}}=\sqrt[n]{a^x}=\sqrt[n]{f(x)}$ (단, n은 양의 정수)

상 중 하

11. $x,\ y$가 실수일 때, 집합 $A=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}$에 대하여 다음 명제가 참이라 한다. □ 안에 알맞은 것은?

[인터넷 수능]

$(a,\ b)\in A$이면 $\left(\square,\ \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\in A$이다.

① $-\dfrac{a}{2}$ ② $\dfrac{a}{2}$ ③ $\sqrt{a}$

④ $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{a}$

상 중 하

12. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x+1}{2^{x+1}}$에 대하여 $f(2a)=4,\ f(2b)=6$일 때, $f(a+b)f(a-b)$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\dfrac{5}{2}$ ② 5 ③ 10

④ 12 ⑤ 24

상 중 하

13. 지수함수 $f(x)=3^x$에 대하여 등식 $2f(x+1)+f(x)=f(x+k)$를 만족시키는 상수 k의 값은?

[인터넷 수능]

① $-2\log_3 7$ ② $-\log_3 7$ ③ $-\dfrac{1}{2}\log_3 7$

④ $\dfrac{1}{2}\log_3 7$ ⑤ $\log_3 7$

상 중 하

14. 집합 $S=\{(x,y)|y=\sqrt{3^x}\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $(a,b)\in S$ 이면 $\left(a-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}b\right)\in S$이다.

ㄴ. $(a,b)\in S$이면 $(2a,\ b^2)\in S$이다.

ㄷ. $(a,b)\in S,\ (c,d)\in S$이면 $(a+c,\ bd)\in S$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

15. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{k}{101}\right)=50$

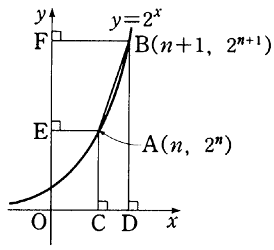
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 지수함수의 활용

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지나면
$\Rightarrow\ a^m=n$

상 중 하

16. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 위의 두 점 $A(n,\ 2^n)$, $B(n+1,\ 2^{n+1})$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. 사각형 ABDC와 사각형 ABFE의 넓이의 비가 $2:5$일 때, n의 값은?

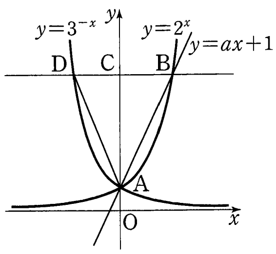


[인터넷 수능]

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{5}{2}$
③ $\dfrac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{13}{4}$

상 중 하

17. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2^x$과 직선 $y=ax+1$ $(a>0)$의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ABD의 넓이가 $3\log_3 6$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A는 y축 위의 점이다.)



[고득점 N제]

① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

05 지수함수의 최대•최소 : $y=a^{px+q}+r$의 꼴

정의역이 $\{x \mid m \le x \le n\}$인 지수함수
$f(x)=a^{px+q}+r\ (a>0,\ a\ne 1,\ p>0)$에 대하여
① $a>1$일 때 ⇒ 최댓값 : $f(n)$, 최솟값 : $f(m)$
② $0<a<1$일 때 ⇒ 최댓값 : $f(m)$, 최솟값 : $f(n)$

상 중 하

18. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

[인터넷 수능]

① 8 ② 6 ③ 4
④ 2 ⑤ 1

상 중 하

19. $-2 \leqq x \leqq 3$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{a^x}$의 최댓값이 2일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$이다.)

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

상 중 하

20. 집합 $\{x \mid -1 \leqq x \leqq 2\}$가 정의역인 함수 $f(x)=a^{|x-1|+1}$의 최댓값이 $\frac{1}{8}$일 때, $f(x)$의 최솟값은? (단, $a>0$)

[수능특강]

① 2^{-1} ② 2^{-6} ③ 2^{-7}
④ 2^{-8} ⑤ 2^{-9}

06 지수함수의 최대•최소 : $y=a^{px^2+qx+r}$의 꼴

① $f(x)=px^2+qx+r$로 놓고 주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.
② ①에서 구한 $f(x)$의 최댓값, 최솟값에서 주어진 함수가 최대이거나 최소임을 이용한다.

상 중 하

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}$의 최댓값은?

[수능특강]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

상 중 하

22. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2}\times 2^{3-2x}$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[고득점 N제]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

07 지수함수의 최대•최소 : 치환

정의역이 $m \le x \le n$일 때,

$$y=pa^{2x}+qa^x+r \xrightarrow{a^x=t} \underbrace{y=pt^2+qt+r}_{㉠}$$

① $a>1$일 때 ⇒ $a^m \le t \le a^n$에서 ㉠의 최댓값, 최솟값을 구한다.
② $0<a<1$일 때 ⇒ $a^n \le t \le a^m$에서 ㉠의 최댓값, 최솟값을 구한다.

상 중 하

23. 함수 $f(x)=1+2^{x-a}-4^x$은 $x=b$일 때 최댓값 $\frac{257}{256}$을 갖는다. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[고득점 N제]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

08 **지수함수의 최대•최소 : $y=a^{x}+a^{-x}$의 꼴**

$a>0,\ a\neq 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $a^{x}>0,\ a^{-x}>0$ 이므로

$a^{x}+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^{x}\cdot a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

상 중 하

24. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $y=-\sqrt{2}(2^{x}+2^{1-x})$의 최댓값은?

[수능특강]

① -3 ② -4 ③ $2-\sqrt{2}$
④ $1-2\sqrt{2}$ ⑤ $1-3\sqrt{2}$

상 중 하

25. 양수 $x,\ y$에 대하여 $\mathrm{A}=2x+\frac{1}{y},\ \mathrm{B}=y+\frac{2}{x}$라 할 때, $\left\{\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{A}}\right\}^{\mathrm{B}}$의 최솟값 또는 최댓값에 대한 설명으로 옳은 것은?

[수능특강]

① 최솟값 $\frac{1}{27}$을 갖는다. ② 최솟값 $\frac{1}{9}$을 갖는다.
③ 최솟값 9를 갖는다. ④ 최댓값 $\frac{1}{27}$을 갖는다.
⑤ 최댓값 $\frac{1}{9}$을 갖는다.

09 **지수함수의 역함수**

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$\Rightarrow f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$

상 중 하

26. 함수 $f(x)=4^{x}-2^{x+1}\ (x>1)$에 대하여 $f^{-1}(8)$의 값은?

[고득점 N제]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

상 중 하

27. 지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은?

[인터넷 수능]

① $2-\sqrt{3}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $2+\sqrt{3}$

010 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

① $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 ⇒ $y=a^{x-m}+n$
② $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를
x에 대하여 대칭이동 ⇒ $y=-a^x$
y에 대하여 대칭이동 ⇒ $y=a^{-x}$
원점에 대하여 대칭이동 ⇒ $y=-a^{-x}$

상 중 하

28. 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 함수 $y=3\cdot4^{x+1}-2$의 그래프로 옮기는 평행이동에 의해 원점은 점 $(m,\ n)$으로 옮겨진다. 이 때, $m-n$의 값은?

[수능특강]

① $\log_4\frac{2}{3}$　② 1　③ $\log_4\frac{4}{3}$
④ $\log_4 6$　⑤ $\log_4\frac{8}{3}$

상 중 하

29. 함수 $f(x)=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{2}f(x)$의 그래프와 일치할 때, m의 값은?

[수능특강]

① $\log_5 2$　② $\frac{1}{2}\log_5 2$　③ -1
④ $-\log_5 2$　⑤ $-\frac{1}{2}\log_5 2$

상 중 하

30. 두 점 $\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$, $(3,\ 3\sqrt{3})$을 지나는 함수 $f(x)=(\sqrt{3})^{ax+b}$의 그래프는 함수 $y=c^x$의 그래프를 x축의 방향으로 d만큼 평행이동한 그래프와 일치한다. 이 때, $abcd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

[수능특강]

① -27　② $-9\sqrt{3}$　③ -9
④ 9　⑤ 27

상 중 하

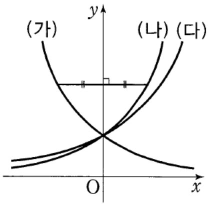
31. 지수함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니, 점근선의 방정식이 $y=2$이고, y절편이 4가 되었다. 이때, $a+b$의 값은?

[인터넷 수능]

① $1-\log_3 2$　② $2-\log_3 2$　③ $2+\log_3 2$
④ $\log_3 8$　⑤ 6

상 중 하

32. 오른쪽 그림은 좌표평면 위에 세 지수함수 $y=a^x, y=b^x$, $y=c^x$의 그래프를 그린 것이다. 두 그래프 (가)와 (나)는 y축에 대하여 대칭이고, $bc<1$, $c>1$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



[수능특강]

[보 기]

ㄱ. (다)는 $y=c^x$의 그래프이다.

ㄴ. 방정식 $b^x=\frac{1}{2}$을 만족하는 x는 양수이다.

ㄷ. $y=\left(\frac{c}{a}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

33. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

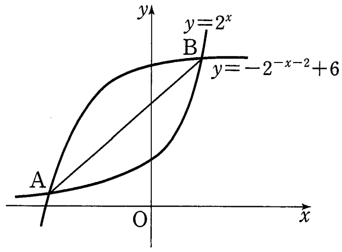
두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)

[인터넷 수능]

① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

상 중 하

34. 아래 그림은 두 함수 $y=2^x, y=-2^{-x-2}+6$의 그래프를 나타낸 것이다.



두 그래프의 교점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 중점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. $a+b$의 값은?

[고득점 N제]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

주관식

상 중 하

35. 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후 다시 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{a}{b^x}$ (단, a, b는 자연수)의 그래프와 일치한다. $a+b$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

011 통합 유형

상 중 하

36. 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$와 $g(x)=|x+1|$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다.

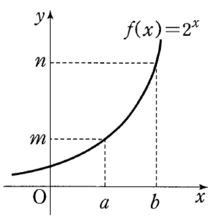
ㄴ. $x_1 < x_2$이면 $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$이다.

ㄷ. 합성함수 $(f \circ g)(x)$는 최솟값 3을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

상 중 하

37. 그림과 같이 함수 $f(x)=2^x$의 그래프와 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에 대하여 $f(a)=m$, $f(b)=n$이라 하자. 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 x좌표가 4일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

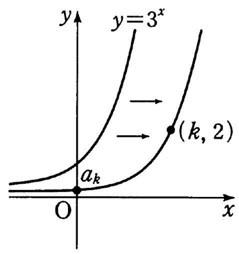


[수능특강]

① $mn=4$ ② $m^2n=16$ ③ $mn^2=16$
④ $n^2=16m$ ⑤ $n^2=4m$

상 중 하

38. 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동시켜 점 $(k,\ 2)$ (k는 자연수)를 지나도록 하는 곡선의 y절편을 a_k라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 값은?



[인터넷 수능]

① $\frac{2}{3}$ ② 1
③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$
⑤ 2

상 중 하

39. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n)=n^2\left(\frac{4}{5}\right)^n$은 $n=k$일 때 최댓값을 갖는다. 이때, 자연수 k의 값은?

[인터넷 수능]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

상 중 하

40. $p<q$를 만족하는 임의의 실수 p, q에 대하여

$$\left(\frac{2}{3}x^2-x+1\right)^p > \left(\frac{2}{3}x^2-x+1\right)^p$$

이 성립하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

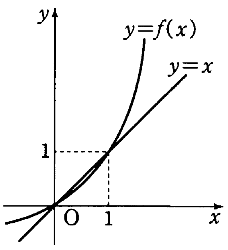
[수능특강]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

상 중 하

41. 그림은 함수 $f(x)=2^x-1$의 그래프와 직선 $y=x$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, b $(0<a<b)$라 할 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]



[보 기]

ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다.
ㄴ. $b-a<2^b-2^a$
ㄷ. $b(2^a-1)<a(2^b-1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

42. 직선 $y=-x$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하고, 직선 $y=-x$가 곡선 $y=3^x$과 만나는 점을 $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $x_1+y_2<0$ ㄴ. $x_1y_1>x_2y_2$
ㄷ. $x_1y_2=x_2y_1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

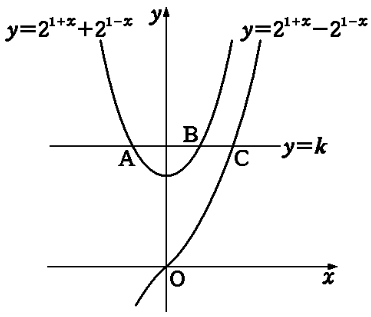
43. 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$가 양수 a,b에 대하여 $a+b=2^x$, $ab=2^y$으로 나타내어질 때, 원점으로부터 점 $P(x,y)$까지의 최솟값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

상 중 하

44. 아래 그림은 두 함수 $y=2^{1+x}+2^{1-x}$, $y=2^{1+x}-2^{1-x}$의 그래프를 나타낸 것이다.



직선 $y=k$가 두 함수의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B는 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점일 때, 상수 k의 값은?

[고득점 N제]

① 5 ② 6 ③ $2\sqrt{5}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

상 중 하

45. 1이 아닌 양수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2},\quad g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $y=f(x)+g(x)$는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

ㄴ. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 치역은 $\{y \mid -1<y<1\}$이다.

ㄷ. $y=f(x)g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

46. $a>0$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]

ㄱ. $y=f(x)g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 모든 x에 대하여 $2f(x)g(x)=g(2x)$가 성립한다.
ㄷ. 방정식 $g(2x)=4g(x)$를 만족시키는 실수 x의 값은 모두 3개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Ⅷ 로그함수

01 로그함수의 함숫값

로그함수 $f(x)$의 함숫값 $f(a)$
⇒ $f(x)$의 식에 x 대신 a를 대입하고 로그의 성질을 이용하여 간단히 한다.

상 중 하

1. 함수 $f(x)=\log_3 x$와 함수 $g(x)$에 대하여

$$(g \circ f)(x)=\sqrt{x+2}$$

가 성립할 때, $g\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

상 중 하

2. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=[\log x]+\left[\log\frac{1}{x}\right]$의 치역의 원소의 개수는?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[인터넷 수능]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02 로그의 대소 관계

주어진 식의 밑을 같게 한 다음 로그함수의 성질을 이용한다.
① $a>1$일 때, $m>n \Leftrightarrow \log_a m>\log_a n$
② $0<a<1$일 때, $m>n \Leftrightarrow \log_a m<\log_a n$

상 중 하

3. 로그함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 양수 a, b가 $0<f(a)<f(b)$를 만족할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $(\log_a b)^2<\sqrt{\log_a b}$
ㄴ. $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}<(\log_a b)^2$
ㄷ. $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}<\sqrt{\log_a b}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

4. $a>1$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\log_2 a<\log_3 a$
ㄴ. $\frac{\log_2 3a+\log_2 a}{2}<\log_2 2a$
ㄷ. $a\log_2(a+1)<(a+1)\log_2 a$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

5. 다음 수의 대소를 비교하여라.

[수능특강]

(1) $\log_2 10,\ 2+\log_2 3,\ 4\log_4 3$

(2) $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27,\ -\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6},\ -\log_2\sqrt{10}$

03 로그함수의 그래프

$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$에 대하여
① 정의역 : $\{x\mid x>0\}$, 치역 : 실수 전체의 집합
② 그래프의 점근선의 방정식 : $x=0$

상 중 하

6. $y=\log_a(4-x)-1$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 점 $(p,\ q)$를 지나고, 점근선의 방정식은 $x=r$이다. 이 때, $p+q+r$의 값은? (단, $a>0,\ a\neq 1$)

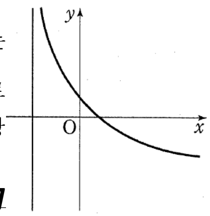
[수능특강]

① -6 ② -5 ③ 1
④ 5 ⑤ 6

상 중 하

7. 오른쪽 그림은 제 1, 2, 4사분면을 지나는 로그함수 $y=\log_a(x+b)+c$의 그래프와 이 로그함수의 점근선을 나타낸 것이다. 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]



[보 기]

ㄱ. $0<a<1$ ㄴ. $b>0$ ㄷ. $c>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 집합 $\{x|a \le x \le 16\}$을 정의역으로 하는 함수 $y=|\log_2 x-2|$의 치역이 $\left\{y \middle| 0 \le y \le \frac{5}{2}\right\}$일 때, a^2의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 2 ⑤ 4

9. 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+10)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $\{f(x)|x는 실수\} \subset \{x|x<0\}$
ㄴ. $x>0$이면 $f(x)<f(0)$이다.
ㄷ. 직선 $y=-2$와 $y=f(x)$의 그래프는 두 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. $0<a<1$일 때, 로그함수 $f(x)=\log_a x$의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

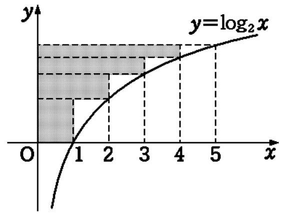
[보 기]

ㄱ. $t>1$일 때 $|f(t)|=f(t)$
ㄴ. $0<t<1$일 때 $f(1-t)+f(1+t)>0$
ㄷ. $0<s<t$일 때 $sf(t)<tf(s)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 오른쪽 그림은 $y=\log_2 x$의 그래프이다. 각 직선은 x축, y축에 평행할 때, 어두운 직사각형들의 넓이의 합은?

[고득점 N제]



① $\log_2 \frac{25}{3}$ ② $\log_2 \frac{25}{4}$ ③ $\log_2 \frac{125}{8}$
④ $\log_2 \frac{125}{12}$ ⑤ $\log_2 \frac{625}{24}$

주관식

12. 함수 $f(x)=\log_2\{\log_3(\log_4 x)\}$의 정의역은 $X=\{x \mid x>a\}$이고, $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(b,\ 0)$이다. 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

[고득점 N제]

04 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

① $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
$\Rightarrow$ $y=\log_a(x-m)+n$

② $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를
x축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow$ $y=-\log_a x$
y축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow$ $y=\log_a(-x)$
원점에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow$ $y=-\log_a(-x)$
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow$ $y=a^x$

상 중 하

13. 보기의 함수의 그래프 중에서 함수 $y=2\log_2 x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $y=2\log_2 3x$ ㄴ. $y=\log_2 x^2+1$
ㄷ. $y=\log_{\sqrt{2}} 2x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

14. 함수 $f(x)=\log_2 \dfrac{1}{x+3}$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.
ㄷ. 제 2, 3, 4사분면을 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

15. 두 함수

$y=\log_2 \dfrac{x-2}{\sqrt{2}}$, $y=\log_4(x+a)$

의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $a=-100$일 때, 두 그래프는 만나지 않는다.
ㄴ. $a=100$일 때, 두 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. 두 그래프가 x좌표가 4인 점 A에서 만날 때, 두 그래프의 교점은 A 뿐이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

16. 함수 $y=\log_4(2x-11)+4$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $p+q$의 값을 구하여라.

[수능특강]

05 로그함수의 성질

로그함수 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여

① $f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy=f(xy)$

② $f(x)-f(y)=\log_a x-\log_a y=\log_a \dfrac{x}{y}=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

상 중 하

17. 두 집합 $A=\{(x,\ y)\mid y=3^x\}$, $B=\{(x,\ y)\mid y=\log_3 x\}$에 대하여 $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in B$일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $(a^3,\ 3b)\in A$ ㄴ. $(b,\ a)\in B$

ㄷ. $(a+d,\ bc)\in A$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

18. 집합 $X=\{(x,\ y)\mid y=\log_2 x\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $(a,\ b)\in X$이면 $(a^2,\ 2b)\in X$이다.

ㄴ. $(\sqrt{2}\,a,\ b)\in X$이면 $\left(a,\ b+\dfrac{1}{2}\right)\in X$이다.

ㄷ. $(a,\ b)\in X$, $(c,\ d)\in X$이면 $(ac,\ b+d)\in X$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

19. 임의의 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(2x)=\log_2 x$를 만족할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0,\ b>0$이다.)

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(ab)=f(a)+f(b)-1$

ㄴ. $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-f(a)-2$

ㄷ. $f(a^b)=bf(a)-1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 로그함수의 활용

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 점 $(m,\ n)$을 지나면
$\Rightarrow n=\log_a m \quad \therefore\ a^n=m$

상 중 하

20. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 항상 만나는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

[수능특강]

[보 기]

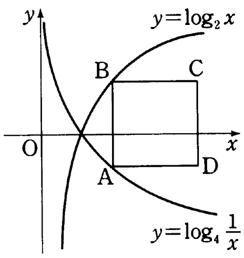
ㄱ. $f(x)=a^x$, $g(x)=\dfrac{1}{a}x+b$
ㄴ. $f(x)=-\log_a x$, $g(x)=ax+b$
ㄷ. $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

상 중 하

21. 오른쪽 그림과 같이 각 변이 좌표축과 평행하고 넓이가 9인 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, B가 각각 함수 $y=\log_4 \dfrac{1}{x}$, $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점일 때, 직선 AC의 y절편은? (단, 점 A의 x좌표는 1보다 크다.)

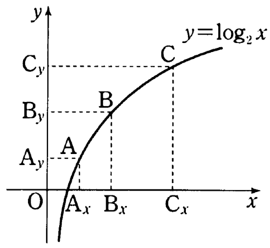
[인터넷 수능]



① -10 ② -8 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

상 중 하

22. 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_x, B_x, C_x라 하고, y축에 내린 수선의 발을 각각 A_y, B_y, C_y라 하자. $\overline{\mathrm{A}_y\mathrm{B}_y}=\overline{\mathrm{B}_y\mathrm{C}_y}=1$일 때, $\overline{\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x}:\overline{\mathrm{B}_x\mathrm{C}_x}$는?

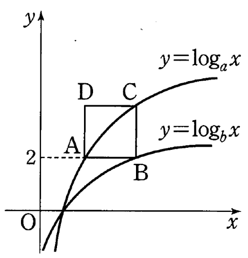


[인터넷 수능]

① $1:1$ ② $1:\sqrt{2}$ ③ $1:2$
④ $1:2\sqrt{2}$ ⑤ $1:4$

상 중 하

23. 그림과 같이 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위의 두 점 A, C를 이은 선분이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 대각선이다. $\overline{\mathrm{AB}}$는 x축과 평행하고, 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 점 B를 지날 때, 상수 b의 값은? (단, 점 A의 y좌표는 2이다.)

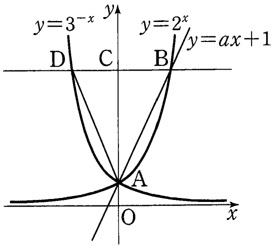


[인터넷 수능]

① $\sqrt[4]{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

상 중 하

24. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2^x$과 직선 $y=ax+1$ $(a>0)$의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ABD의 넓이가 $3\log_3 6$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A는 y축 위의 점이다.)

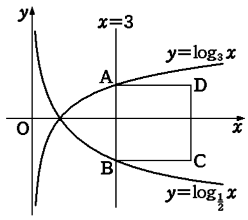


[고득점 N제]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

상 중 하

25. 좌표평면에서 직선 $x=3$이 두 곡선 $y=\log_3 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD를 그림과 같이 만들었다. 직선 BD의 y절편은? (단, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.)

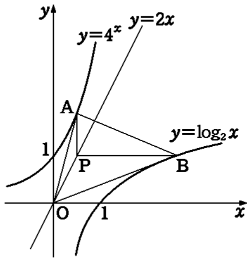


[고득점 N제]

① $-\log_2 22$ ② $-\log_2 24$ ③ $-\log_2 26$ ④ $-\log_2 28$ ⑤ $-\log_2 30$

상 중 하

26. 오른쪽 그림은 직선 $y=2x$와 두 곡선 $y=4^x$, $y=\log_2 x$를 나타낸 것이다. 직선 $y=2x$ 위에 있는 점 P를 지나고 x축, y축에 각각 수직인 두 직선을 그었을 때, 두 곡선 $y=4^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 삼각형 OPA, OPB의 넓이가 각각 12, 28일 때, 삼각형 APB의 넓이는? (단, 점 O는 원점이고, 세 점 P, A, B는 모두 제1사분면 위의 점이다.)

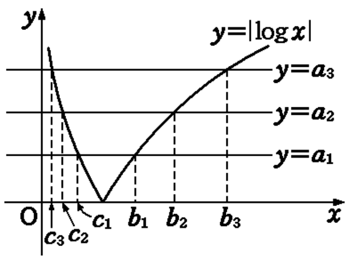


[고득점 N제]

① 84 ② 86 ③ 88 ④ 90 ⑤ 92

상 중 하

27. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=|\log x|$와 직선 $y=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 교점의 x좌표를 b_n, c_n이라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a_n<a_{n+1}$이고 $b_n>1$, $0<c_n<1$이다.)



[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. $b_1=2$이면 $c_1=\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $b_{n+1}-b_n$의 값이 일정하면 $c_{n+1}-c_n$의 값도 일정하다.

ㄷ. $\frac{b_{n+1}}{b_n}$의 값이 일정하면 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$의 값도 일정하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

28. $0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

29. 직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[인터넷 수능]

[보 기]

ㄱ. $x_1>y_2$　　ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$

ㄷ. $x_1y_1>x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

30. 함수 $y=x\log_4 a+\log_4 a^2$의 그래프가 두 점 $A(0,4)$, $B(2,1)$을 이은 선분 AB와 만나기 위한 자연수 a의 개수를 구하시오.

[인터넷 수능]

07 로그함수의 최대•최소

정의역이 $\{x \mid m \le x \le n\}$인 로그함수
$g(x)=\log_a f(x)$ $(a>0,\ a\ne 1)$의 최대 · 최소 구하기
① 주어진 정의역에서 $f(x)$의 최댓값 α, 최솟값 β를 구한다.
② $a>1$일 때 $\Rightarrow$ $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\alpha$, 최솟값은 $\log_a\beta$
$0<a<1$일 때 $\Rightarrow$ $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\beta$,
최솟값은 $\log_a\alpha$

상 중 하

31. 함수 $y=\log_3(-x^2+3\sqrt{3})$의 최댓값은?

[수능특강]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

상 중 하

32. 정의역이 $\{x \mid 2\le x\le 5\}$인 함수 $y=\log|1-x|+\log|7-x|$의 최댓값은?

[인터넷 수능]

① $\log 7$ ② $3\log 2$ ③ $2\log 3$
④ 1 ⑤ $\log 11$

상 중 하

33. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $y=\log_a(x^2-6x+a^2+9)$가 $x=\alpha$일 때, 최댓값 β를 가진다. 다음 중 옳은 것은?

[수능특강]

① $0<a<1$이고 $\alpha\beta=5$이다. ② $0<a<1$이고 $\alpha\beta=6$이다.
③ $a>1$이고 $\alpha\beta=4$이다. ④ $a>1$이고 $\alpha\beta=5$이다.
⑤ $a>1$이고 $\alpha\beta=6$이다.

상 중 하

34. $a=2\log_5 2$일 때, 최솟값이 존재하는 함수를 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[수능특강]

[보 기]
ㄱ. $y=ax^2$
ㄴ. $y=(\log_a x)^2-2\log_a x^2$ (단, $x>1$)
ㄷ. $y=\log_a\left(x^2+\frac{1}{2x^2}\right)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

주관식

상 중 하

35. 함수 $y=\log_2(x^2-4x+2a)$의 최솟값이 1일 때, 함수 $y=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+a$는 $x=k$일 때, 최댓값 m을 가진다. 이 때, $k+m$의 값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

[수능특강]

08 로그함수의 최대•최소 : 치환

$y=(\log_a x)^2+p\log_a x+q$ (p, q는 상수)

$\Rightarrow$ $\log_a x=t$로 놓으면 $y=t^2+pt+q$

상 중 하

36. 1보다 큰 실수 x에 대하여 함수

$f(x)=10+2(5^{\log x}+x^{\log 5})-5^{\log x}\cdot x^{\log 5}$의 최댓값은?

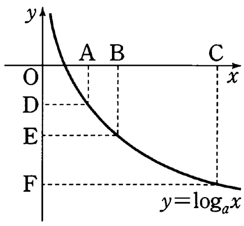
[인터넷 수능]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

09 통합 유형

상 중 하

37. 오른쪽 그림과 같이 x축 위의 세 점 A, B, C와 y축 위의 세 점 D, E, F에서 각각 x축, y축에 수직으로 그은 점선이 함수 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$의 그래프 위에서 만난다. A$(2,\ 0)$, C$(16,\ 0)$이고 $\overline{\text{EF}}=2\overline{\text{DE}}$일 때, 점 B의 x좌표는?



[인터넷 수능]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $3\sqrt{2}$
④ 5 ⑤ 6

상 중 하

38. 양의 실수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 x에 대하여

$$f(1+\log_2 x)=\log_3 x^2$$

을 만족한다. 이때, 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[인터넷 수능]

① 1 ② $\log_3 2$ ③ $\log_2 3$
④ $2\log_3 2$ ⑤ $2\log_2 3$

상 중 하

39. 10보다 큰 임의의 실수 t에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} \log t & \log(at)^2 \\ 1 & \log 10t \end{pmatrix}$가 역행렬을 가질 때, 정수 a의 최댓값은?

[수능특강]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

주관식

상 중 하

40. $x>0$일 때, 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f_1(x)=\log_3 x$
(나) $f_{n+1}(x)=f_n(x^2)+f_n(x)$

이 때, $\log_{27}\{f_{81}(27)\}$의 값을 구하여라. [3점]

[수능특강]

1. 정답 ④ 2. 정답 ② 3. 정답 ②
4. 정답 ②
5. 정답 (1) $4\log_4 3 < \log_2 10 < 2+\log_2 3$

(2) $-\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6} < -\log_2\sqrt{10} < \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}27$

6. 정답 ⑤ 7. 정답 ③ 8. 정답 ③
9. 정답 ③ 10. 정답 ② 11. 정답 ⑤
12. 정답 68 13. 정답 ③ 14. 정답 ⑤
15. 정답 ③ 16. 정답 10 17. 정답 ④
18. 정답 ④ 19. 정답 ② 20. 정답 ⑤
21. 정답 ④ 22. 정답 ③ 23. 정답 ③
24. 정답 ③ 25. 정답 ② 26. 정답 ①
27. 정답 ③ 28. 정답 ⑤ 29. 정답 ⑤
30. 정답 15 31. 정답 ④ 32. 정답 ③
33. 정답 ② 34. 정답 ① 35. 정답 6
36. 정답 ③ 37. 정답 ② 38. 정답 ②
39. 정답 ① 40. 정답 27

지수 로그 방부등식

01 밑을 같게 할 수 있는 지수 방정식

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (단, $a > 0, a \neq 0$)의 성질을 이용한다.

주관식

상 중 하

1. 방정식 $4^{-2x+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{8^{1-x}}$의 해를 $x = \dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[수능특강]

상 중 하

2. 방정식 $\dfrac{7^{x^2-2x}}{7^{4x-10}} = 49$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

02 밑을 같게 할 수 없는 지수 방정식

밑이 다른 지수방정식은 양변에 로그를 취하여 푼다.

상 중 하

3. x에 대한 방정식 $2^{3-2x} = 5^{2x-1}$의 해를 α라 할 때, 10^{α}의 값은?

[인터넷 수능]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $\sqrt{50}$ ⑤ $4\sqrt{15}$

03 밑에 문자가 포함된 지수 방정식

$a^{f(x)}=a^{g(x)}$인 형태의 지수방정식의 해는 $f(x)=g(x)$ 또는 $a=1$을 이용하여 구할 수 있다.

상 중 하

4. 방정식

$$x^{x+1}=\sqrt[x]{x}\quad(x>0,\ x\neq1)$$

의 해를 $x=\alpha$라 할 때, $\dfrac{\log(1-\alpha)}{\log\alpha}$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

5. x, y는 1이 아닌 양수일 때, 연립방정식

$$\begin{cases} x^{y-2}=4 \\ x^{2y-3}=64 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자. $\alpha+\beta$의 값은?

[고득점 N제]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 치환을 이용한 지수 방정식

$a^x=t$ (단, $t>0$)로 치환하여 t에 대한 이차방정식으로 유도하여 지수방정식을 해결한다.

상 중 하

6. 방정식 $9^x-3^{x+k}+9=0$의 한 근이 다른 근의 3배일 때, 실수 k는 $k=p+q\log_3 2$로 나타낼 수 있다. 이 때, 두 유리수 p, q의 곱은?

[수능특강]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

7. 방정식 $3^{2x+1}+27^x=70\cdot3^x$의 근을 $x=\alpha$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

[인터넷 수능]

① $-1<\alpha<0$ ② $0<\alpha<1$ ③ $1<\alpha<2$
④ $2<\alpha<3$ ⑤ $3<\alpha<4$

상 중 하

8. 방정식 $9^x-2\cdot3^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

[수능특강]

① 6 ② 10 ③ 12
④ 15 ⑤ 36

상 중 하

9. 지수방정식 $(2^x-1)^2+(2^x+1)^2=5\cdot2^x$의 모든 근의 합은?

[고득점 N제]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

상 중 하

10. x에 대한 방정식 $4^{x+a}-2^{x+b}+2^{2a+3}=0\,(a, b$는 실수$)$이 오직 하나의 실근 $x=\alpha$를 가질 때, α의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

상 중 하

11. 방정식 $9^x-2(k-2)3^x+k=0$의 한 근이 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 클 때, 상수 k의 값의 범위는?

[인터넷 수능]

① $k>0$ ② $0<k<\frac{21}{5}$ ③ $3<k<7$
④ $k>\frac{21}{5}$ ⑤ $k>7$

상 중 하

12. 지수방정식 $5^x=5^{\frac{x}{2}+1}+a$가 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

[수능특강]

① 2 ② 3 ③ 5
④ 6 ⑤ 8

상 중 하

13. x에 대한 지수방정식

$$4^x - 2^{x+a} + 1 = 0$$

의 한 근이 0과 $\frac{1}{2}$사이에 있도록 하는 상수 a의 값의 범위는 $\alpha < a < \log_2 \beta$이다. $\alpha^2 + \beta^2$의 값은?

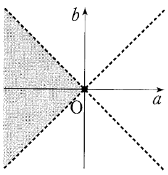
[고득점 N제]

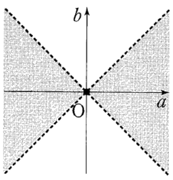
① $\frac{7}{2}$　② $\frac{9}{2}$　③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{13}{2}$　⑤ $\frac{15}{2}$

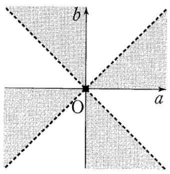
상 중 하

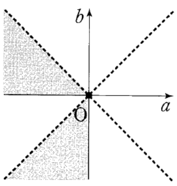
14. 방정식 $4^x + a \cdot 2^{x+1} + b^2 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 점 $(a,\ b)$의 존재 범위를 좌표평면 위에 나타내면? (단, 경계선은 포함되지 않는다.) [4점]

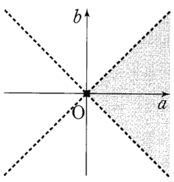
[수능특강]

①


②


③


④


⑤


주관식

상 중 하

15. 방정식 $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$의 값을 구하여라. [3점]

[수능특강]

상 중 하

16. 실수 $x,\ y,\ z$는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $2^x + 3^y + 5^z = 12$
(나) $2^{x+1} + 3^y + 5^{z-1} = 8$

집합 $\{k \mid k = 5 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^y + 14 \cdot 5^z,\ k\text{는 정수}\}$의 원소의 개수를 구하시오.

[고득점 N제]

05 지수 방정식의 연립방정식

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$ 이면 α, β는 이차방정식 $t^2-pt+q=0$ 의 두 근임을 이용하여 근을 구한다.

상 중 하

17. 연립방정식 $\begin{cases} 2^x+2^y=20 \\ 2^{2x}+2^{2y}=272 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

[인터넷 수능]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

06 지수 방정식의 활용

실생활과 관련된 문제를 지수방정식의 풀이를 이용해 해결한다. 일정한 증가율, 감소율 문제가 주로 출제된다.

상 중 하

18. 지구에서 발사된 후 대기권을 벗어나 800 km/분의 속력으로 지구 궤도를 돌고 있는 인공위성이 있다. 이 인공위성은 속력이 100 km/분이 되어야 안정궤도에 오를 수 있다고 한다. 이 인공위성의 속력을 1시간마다 20%씩 줄인다고 할 때, 속력이 100 km/분이 되는 것은 몇 시간 후인가? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

[인터넷 수능]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

상 중 하

19. 당분을 소화시켜 알코올을 생산하는 효모는 생산된 알코올에 의해 죽게 된다. 200(그램)의 어떤 효모가 발효를 시작한 지 t시간 후의 양 $A(t)$(그램)는

$$A(t)=100\left(1+r^{-\frac{t}{50}}\right) \quad (\text{단, } 0<r<100)$$

으로 나타내어진다고 한다. 발효를 시작한 지 10시간 후의 효모의 양이 5시간 후의 효모의 양의 $\frac{13}{15}$배가 될 때, r의 값은?

[인터넷 수능]

① $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{6}{5}\right)^{20}$ ③ $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$
④ $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ ⑤ 2^5

07 밑을 같게 할 수 있는 지수 부등식

지수 부등식을 풀 때 밑 a의 크기에 따라 부등호의 방향이 달라짐을 주의한다.

상 중 하

20. 부등식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x < 3\sqrt{3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은?

[인터넷 수능]

① 4 ② $\frac{17}{4}$ ③ 6
④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 8

상 중 하

21. 지수부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < 2^{-x^2}$의 해가 $a < x < b$일 때,
$a^2 + b^2$의 값은? [3점]

[수능특강]

① 1 ② $\frac{13}{4}$ ③ 5
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 8

상 중 하

22. 집합 $A = \{x | 3^{x^2} < 27 \cdot 3^{4x+2}, x는\ 정수\}$의 부분집합 중 집합 $B = \{x | 2^{|x-1|} > 4, x는\ 정수\}$의 원소를 적어도 하나 포함하는 것의 개수는?

[인터넷 수능]

① 9 ② 15 ③ 16
④ 31 ⑤ 32

상 중 하

23. x에 대한 지수부등식

$$a^{2x} + 1 < a^{x+2} + a^{x-2}$$

의 해의 집합을 A라 할 때, 집합 A의 원소 중 정수인 것의 개수는? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 치환을 이용한 지수 부등식

$a^x = t$ (단, $t > 0$)로 치환하여 t에 대한 이차부등식으로 유도하여 지수방정식을 해결한다.

상 중 하

24. 부등식 $9^x - 3^{x+1} - 54 < 0$을 만족하는 자연수 x의 개수는?

[수능특강]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

25. 지수부등식 $a^{2x} - 4a^{x+2} + 4 > 0$을 만족하는 x의 값의 범위가 $x < \alpha$또는 $x > \beta$일 때, $\alpha + \beta = 6$이 되도록 하는 양수 a의 값은? (단, $a > 1$)

[수능특강]

① $\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt[3]{4}$ ③ 2
④ 4 ⑤ 8

주관식

상 중 하

26. 지수부등식 $9^x - 10 \cdot 3^x + 24 < 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $3^{\alpha + \beta}$의 값을 구하시오.

[고득점 N제]

상 중 하

27. 부등식 $4^{2x} - 4^{x+1} - 12 < 0$의 해와 부등식 $2^{2x} + a \cdot 2^x - 18 < 0$의 해가 서로 같을 때, a^2의 값을 구하시오.(단, a는 상수이다.)

[인터넷 수능]

09 지수 부등식이 항상 성립할 조건

$a^x = t\,(t>0)$라 할 때, 이차부등식 $pt^2+qt+r>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $t>0$에서 $pt^2+qt+r>0$이 성립해야 하므로 함수 pt^2+qt+r의 최솟값이 0보다 커야 한다.

상 중 하

28. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$9^x+9^{-x}-2(3^x+3^{-x})+k \geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[인터넷 수능]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

010 지수 부등식의 활용

실생활과 관련된 문제를 지수방정식의 풀이를 이용해 해결한다. 가우스 함수, 일정한 증가율, 감소율 문제가 주로 출제된다.

상 중 하

29. 의진이는 지난 달 1일 아침에 깔때기 모양의 용기에 어느 용액을 가득 채웠다. 의진이가 다음 날부터 이 용기 속에 담긴 용약의 양을 매일 아침 일정한 시각에 측정했더니 전날의 남은 양의 $\frac{1}{5}$만큼 줄어들었다. 또, 의진이는 용기 속에 담기 용액의 양이 처음 양의 $\frac{1}{10}$ 이하로 줄어들면 다음 날 아침에 다시 용기에 용액을 가득 채웠다고 한다. 다음 중 의진이가 지난 달에 용기에 용액을 다시 채운 날짜는? (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)

[인터넷 수능]

① 21일 ② 23일 ③ 25일
④ 27일 ⑤ 29일

011 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ 꼴의 로그방정식

(1) 로그 방정식을 풀 때에는 가장 먼저 진수와 밑조건을 따진다.
(2) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

상 중 하

30. 로그방정식 $\log_4 (x-1) + 1 = \log_2 (x-4)$의 모든 근의 합은? [2점]

[수능특강]

① 7 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

상 중 하

31. 로그방정식 $\log_2 (x+4) = \log_4 (x-2)^2$을 만족하는 정수 x의 개수는?

[인터넷 수능]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

상 중 하

32. x에 대한 로그방정식

$$\log_2 x + \log_2 (2-x) = \log_2 a + \log_2 (a-2)$$

가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $p < a \leq q$이다. 이때, $p+q$의 값은?

[인터넷 수능]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $4+\sqrt{2}$ ⑤ $5+\sqrt{2}$

상 중 하

33. x에 대한 방정식 $\log(x^2 + 5x - k) = \log(x-2)$가 근을 갖기 위한 실수 k값의 범위는?

[인터넷 수능]

① $k < -14$ ② $-14 < k < 0$ ③ $1 < k < 4$
④ $0 < k < 14$ ⑤ $k > 14$

상 중 하

34. x에 대한 로그방정식

$$\log_a|x-2a|+\log_a x=2$$

의 해를 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$라 하자. $\alpha^2+\beta^2=8+4\sqrt{2}$일 때, 양수 a의 값은? (단, a는 상수이다.)

[고득점 N제]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

상 중 하

35. x에 대한 방정식

$$\log_a(x-2)=ax-4a$$

에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$, $a\neq1$)

[고득점 N제]

[보 기]

ㄱ. a의 값에 관계없이 항상 근을 갖는다.
ㄴ. $a>1$일 때, 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.
ㄷ. 오직 한 개의 실근 $x=\alpha$를 가질 때, $3<\alpha<4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

상 중 하

36. x에 대한 방정식

$$\log(4-2x^2)=\log(a-x)+1$$

이 근을 갖도록 자연수 a의 값을 정할 때, a의 값을 α라 하고 그때의 근을 $x=\beta$라 하자. $\alpha+\beta$의 값은?

[고득점 N제]

① $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ ② $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{2}$
④ $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

012 $\log_a x$ 가 반복되는 로그 방정식 $\Rightarrow$ 치환

$\log_a x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 방정식을 푼다.

주관식

상 중 하

37. 두 집합 $A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 8 < 0\}$,
$B = \left\{x \mid (\log_2 x)^2 - a\log_2 x + b \le 0\right\}$에 대하여 $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \{x \mid x \le 8\}$이 성립할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.

[인터넷 수능]

013 지수에 로그가 포함된 로그방정식

지수에 로그가 포함되는 방정식은 양변에 로그를 취한다.
$x^{\log x} = a \Leftrightarrow \log x^{\log x} = \log a$

상 중 하

38. 임의의 양수 x에 대하여 부등식 $x^{\log x} \ge (100x)^k$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[인터넷 수능]

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

상 중 하

39. $y^2 \cdot x^{\log x} = 100$을 만족시키는 두 양수 x, y에 대하여 $M = xy$ 는 $x = \alpha$, $y = \beta$일 때, 최댓값 γ를 갖는다. $\log\alpha\beta\gamma$의 값은?

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

014 로그 방정식에서의 근과 계수의 관계

$\log_a x$ 에 대한 방정식
$p(\log_a x)^2 + q\log_a x + r = 0$ (단, $p \neq 0$)
의 양의 두 실근을 α, β 라 하면
$pt^2 + qt + r = 0$ 의 두 실근은 $\log_a \alpha, \log_a \beta$ 이므로 근과 계수의 관계를 통해 $\alpha \cdot \beta$ 를 구할 수 있다.

상 중 하

40. 방정식 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^k - 6 = 0$이 두 근 α, β를 갖고 $\alpha\beta = \frac{1}{9}$ 일 때, 상수 k의 값은?

[수능특강]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 8 ⑤ 9

상 중 하

41. 방정식 $(\log x)^2 - 6\log x - 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 방정식 $(\log x)^2 - a\log x + b = 0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다. 이 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

[수능특강]

① -12 ② -6 ③ -1
④ 6 ⑤ 12

상 중 하

42. 방정식
$(\log_x xy)(\log_y xy) + \log_x (x-y) \cdot \log_y (x-y) = 0$
의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 값은?

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

015 로그 방정식의 연립방정식

$\begin{cases} u+v=a \\ uv=b \end{cases}$ 와 같은 대칭꼴의 연립방정식은 u, v가 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근임을 이용하여 푼다.

상 중 하

43. 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 2x = \log_3 9y \\ \log_3 x \log_2 y = 12 \end{cases}$ 를 만족하는 두 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

[인터넷 수능]

① 17 ② 29 ③ 35
④ 43 ⑤ 55

상 중 하

44. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} 2^{x+\log_2 a} - 5^y = 0 \\ 2^{x-2} - b \cdot 5^y = 0 \end{cases}$$

이 해를 가질 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}$의 최댓값은? (단, $a>0$, $b>0$) [3점]

[수능특강]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

016 로그 방정식의 활용

실생활과 관련된 문제를 로그방정식의 풀이를 이용해 해결한다. 가우스 함수, 일정한 증가율, 감소율 문제등이 출제된다.

상 중 하

45. 온실가스를 줄이기 위해 어느 공장에서는 이산화탄소 배출량을 매년 일정한 비율로 줄여 10년 후에는 현재 배출량의 67.6%까지 감축하려고 한다. 매년 이산화탄소 배출량을 몇 %씩 줄여야 하는가? (단, $\log 6.76 = 0.83$, $\log 1.04 = 0.017$로 계산하고, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)

[인터넷 수능]

① 3.65 ② 3.85 ③ 4.05
④ 4.25 ⑤ 4.45

주관식

상 중 하

46. 방정식 $[\log_2 x^2] + 2\log_2 x = \frac{9}{2}$의 해는 $x = 2^{\frac{b}{a}}$이다.

자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이고, a, b는 서로소인 자연수이다.)

[고득점 N제]

017 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 꼴의 로그부등식

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 은
(1) $a > 1$ 이면 $f(x) > g(x) > 0$
(2) $0 < a < 1$ 이면 $0 < f(x) < g(x)$

상 중 하

47. 두 부등식 $|\log_2(x+1)| < 1$과 $x^2 + ax + b < 0$의 해의 집합이 서로 같을 때, $a^2 + b^2$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

상 중 하

48. 부등식 $\log(x^2 - 6x + 8) \leq 1 + \log(x - 4)$를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은?

[인터넷 수능]

① 62 ② 68 ③ 72
④ 75 ⑤ 77

상 중 하

49. 로그부등식 $\log_2(x^2 - 3x - 4) \leq 1 + \log_2 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 합은?

[고득점 N제]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

상 중 하

50. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) + 1 > \log_2(x-6)$의 해의 집합을 A라 할 때, 다음 중 집합 A의 원소인 것은?

[고득점 N제]

① 3.14 ② 4.25 ③ 5.33
④ 6.54 ⑤ 7.88

상 중 하

51. 다음은 $x>1$에서 부등식 $3^x > 2^x + 1$이 성립함을 이용하여

$x>1$일 때, 부등식 $\log_2(x+1) > \log_3(x+2)$

가 성립함을 증명한 것이다.

[보 기]

$k=\log_2(x+1)$로 놓으면 $x>1$일 때, $k>1$이고

$x=\boxed{(가)}$, 즉 $2^k = \boxed{}$

그런데 $x>1$에서 부등식 $3^x > 2^x+1$이 성립하므로

$3^k > \boxed{(나)} \Leftrightarrow \log_2(x+1) > \log_3(x+2)$

따라서 부등식 $\log_2(x+1) > \log_3(x+2)$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

[인터넷 수능]

① $2^k-1,\ x$ ② $2^k-1,\ x+1$ ③ $2^k-1,\ x+2$
④ $2^k+1,\ x+1$ ⑤ $2^k+1,\ x+2$

상 중 하

52. 부등식 $|\log_4 x - 2| \le 1 - \log_4 y$를 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

[인터넷 수능]

① 94 ② 95 ③ 96
④ 97 ⑤ 98

주관식

상 중 하

53. 다음 로그부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

[수능특강]

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2) \ge \log_{\frac{1}{5}} 3(x+4)$$

상 중 하

54. 로그부등식 $\log_4 x^2 + \log_{\sqrt{x}} 8 \le 7$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.

[인터넷 수능]

018 로그 부등식이 항상 성립할 조건

밑조건, 진수조건에 따른 절대부등식을 해결한다.

주관식

상 중 하

55. 부등식

$\log_a(3x^2+ax+2)<\log_a 4+\log_a(x^2+x+2)$

가 임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하도록 하는 양수 a의 조건은 $p<a<q$이다. 상수 $p,\ q$에 대하여 p^2+q^2의 값을 구 하여라.

[고득점 N제]

019 $\log_a x$ 가 반복되는 로그 부등식⇒ 치환

$\log_a x=t$ 로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

상 중 하

56. 방정식 $(\log_2 9x)(\log_2 x)=2$가 서로 다른 두 실근 α,β를 가질 때, $\alpha\beta$의 값은?

[인터넷 수능]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

020 지수에 로그가 포함된 로그부등식

지수에 로그가 포함되는 부등식은 양변에 로그를 취한다.
$\log_a x^{\log_a x} > \log_a b$ 에서 $(\log_a x)^2 > \log_a b$

상 중 하

57. 부등식 $x^{2\log x} < \dfrac{100}{x^3}$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은? (단, $\alpha < \beta$)

[수능특강]

① 10 ② $10\sqrt{10}$ ③ 100
④ $100\sqrt{10}$ ⑤ 1000

021 로그부등식의 영역

그래프를 활용해서 부등식의 영역을 나타낸다.

상 중 하

58. 연립부등식 $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2-2) < 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y < \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^2 \end{cases}$ 을 만족하는 실수 x, y에 대하여 좌표평면 위에서 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역의 넓이는?

[수능특강]

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$
④ $\dfrac{3\pi}{4}$ ⑤ π

상 중 하

59. 두 부등식

$$\log_8 y^3 \geq \log_2(2x^2-7x+5)$$
$$\log_2 y \leq 2\log_4(x-1)$$

을 동시에 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\log_{\sqrt{5}}(x+y)$의 최댓값은?

[고득점 N제]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

상 중 하

60. 부등식

$$2(\log_x y)^2 - 3\log_x y + 1 \leq 0 \ (0 < x \leq 4)$$

을 만족시키는 양수 x, y에 대하여 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 2^y$의 최솟값은?

[고득점 N제]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{2}{27}$

④ $\frac{8}{81}$ ⑤ $\frac{4}{81}$